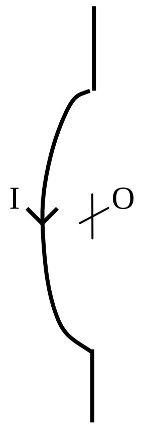
EM2 MAGNETOSTATIQUE DU VIDE

Travaux Dirigés

Exercice 1

Soit le circuit suivant représenté en perspective, constitué de deux demi fils rectilignes infinis reliés par un demi-cercle de centre O et de rayon R :



Ce circuit est parcouru par un courant d'intensité I.

a) Chercher un plan de symétrie et un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant.

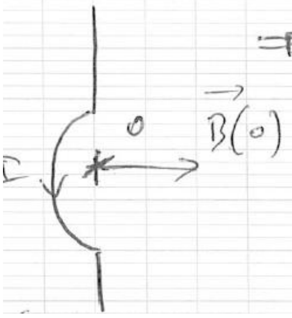
b) En déduire la direction du champ magnétique en O.

1) a) Plan de symétrie : plan passant par O et la spire.

b) $\Rightarrow \vec{B}(O) \perp$ à ce plan.

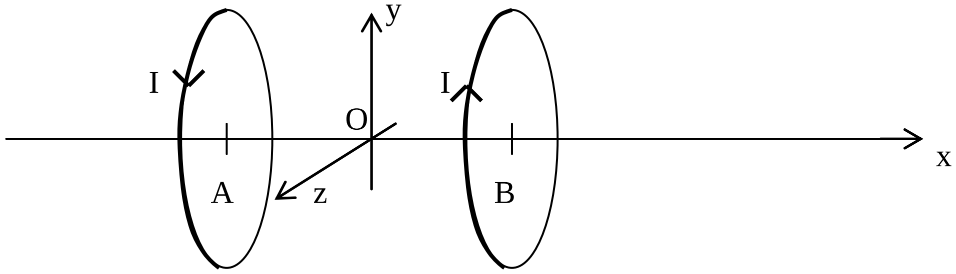
Plan d'antisymétrie : plan passant par O et $\perp$ aux fils

$\Rightarrow \vec{B}(O)$ contenu dans ce plan



Exercice 2

On considère deux spires de rayon R d'axe (Ox) parcourues par un courant d'intensité I mais les sens des courants sont opposés comme le montre la figure ci-dessous :

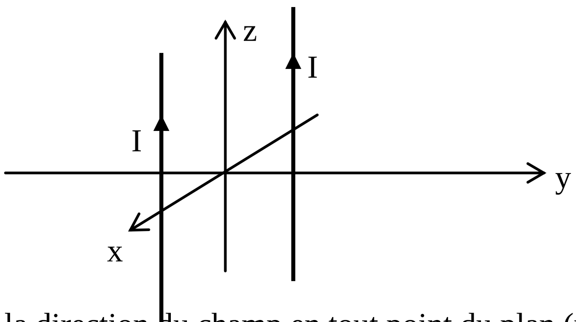


a) Chercher un plan de symétrie et un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant.

b) Déterminer la direction du champ magnétique en tout point du plan (yOz).
c) Déterminer la direction du champ en tout point de l'axe (Ox).
d) Déterminer le champ magnétique en O.

a) Plans d'antisymétrie : xOz, xOy, yOz.
b) $M \in (yOz)$
$\Rightarrow \vec{B}(M)$ contenu dans ce plan et radial
c) $M \in (Ox)$ càd (xOz) et (xOy)
$\Rightarrow \vec{B}(M)$ contenu dans (xOz) et (xOy)
$\Rightarrow \vec{B}(M)$ suivant Ox.
d) $O \in (yOz)$ et $O \in (Ox)$
$\Rightarrow \vec{B}(M)$ contenu dans (yOz) et suivant Ox
$\Rightarrow \vec{B}(O) = \vec{0}$.

Exercice 3
Soient deux fils rectilignes infinis équidistant de (Oz) parcourus par le même courant I :



a) Déterminer la direction du champ en tout point du plan (yOz) ;
b) En tout point de l'espace, quelle est la composante du champ magnétique nulle ? : Bx ? By ? Bz ?
c) De quelles coordonnées, à priori, dépendent ses composantes non nulles x ? y ? z ?

a) (yOz) plan de symétrie des courants
$\Rightarrow \vec{B}(M) \perp (yOz)$ pour $M \in (yOz)$
$\Rightarrow \vec{B}$ suivant x.
b) Pour M quelconque, (xMy) plan d'antisymétrie
$\Rightarrow \vec{B}(M)$ contenu dans ce plan
$\Rightarrow B_z = 0$

c) Invariance en translation suivant z :
$\Rightarrow \vec{B}(M)$ ne dépend pas de z.
$\Rightarrow \vec{B}(M)$ ne dépend que de x et y

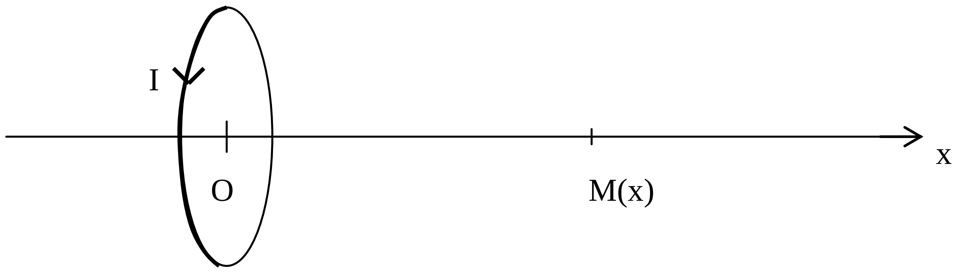
Exercice 4

On considère une spire de rayon R d'axe (Ox) parcouru par un courant d'intensité I.

a) Déterminer la direction du champ magnétique en tout point de l'axe (Ox).
L'intensité du champ magnétique B(x) est donnée par l'expression suivante :

$$B(x) = \frac{\mu_o I}{2} \cdot \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

b) Dessiner la courbe représentative de la fonction $B(x)$. Que vaut le champ maximal ?



c) Retrouver $B(0)$ puis $B(x)$ à partir de la loi de Biot et Savart.

a/ Tout plan contenant Ox est plan d'antisymétrie
$\Rightarrow \vec{B}(M)$ contenu dans tous ces plans.
$\Rightarrow \vec{B}(M)$ suivant Ox.

b)

$$\frac{dB}{dx}(x) = \frac{\mu_o I}{2} \frac{d}{dx}\left(R^2 (x^2 + R^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{\mu_o I}{2} R^2 \frac{d}{dx}\left((x^2 + R^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

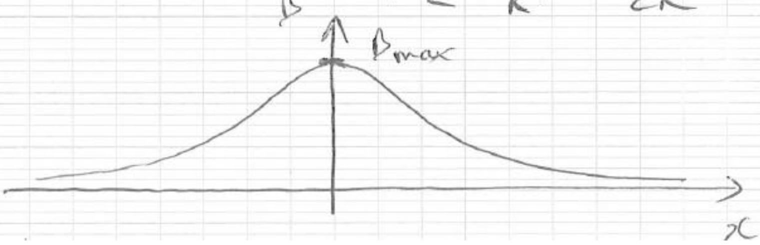
$$= \frac{\mu_o I}{2} R^2 \cancel{2}x\left(-\frac{3}{\cancel{2}}\right)(x^2 + R^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$= -\frac{\mu_o I}{2} \frac{R^2 3x}{(x^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$\frac{dB}{dx} = 0$ lorsque $x = 0$ $\quad x > 0 \Rightarrow B \searrow$
$x < 0 \Rightarrow B \nearrow$

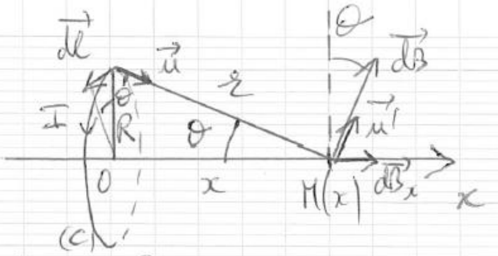
$x \to +\infty \Rightarrow B \to 0$
$x \to -\infty \Rightarrow B \to 0$.

$$B_{max} = B(0) = \frac{\mu_o I}{2} \frac{R^2}{R^3} = \frac{\mu_o I}{2R}$$



Exercice 4

c)



Loi de Biot et Savart :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\vec{dl}\wedge\vec{u}}{r^2}$$

$$d\vec{B} = \oint_{(C)} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{I\,\vec{dl}\wedge\vec{u}}{r^2}$$

* $\vec{dl}$ et $\vec{u}$ sont $\perp$ * $dl = R.d\theta'$
* $\vec{dl}\wedge\vec{u} = dl.\vec{u}'$
* $r^2 = R^2 + x^2$
* $\sin\theta = \dfrac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$

Seules les composantes $\vec{dB}_x$ s'additionnent au niveau de M (les autres composantes se compensent).

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\vec{dl}\wedge\vec{u}}{r^2}.\vec{u_x}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl.\vec{u}'.\vec{u_x}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I.dl}{r^2}\sin\theta$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I.dl}{R^2+x^2}\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{(R^2+x^2)^{3/2}}dl$$

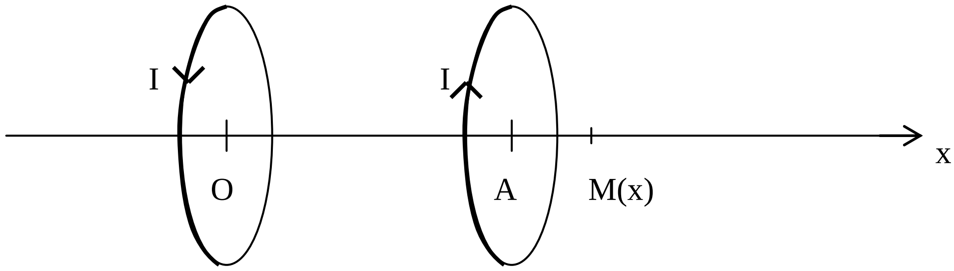
d'où : $$B_x = \oint \frac{\mu_0 IR}{4\pi(R^2+x^2)^{3/2}}dl$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 IR}{4\pi(R^2+x^2)^{3/2}}R\,d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 IR^2\cancel{2\pi}}{\underset{2}{\cancel{4\pi}}(R^2+x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

Exercice 5

On considère deux spires de rayon R d'axe (Ox) parcouru par un courant d'intensité I mais le sens des courants est opposé comme le montre la figure ci-dessous :



On appelle a la distance séparant O de A.
L'intensité du champ magnétique créé par la spire de centre O en un point M(x) est donné dans l'exercice précédent.

a) En utilisant le principe de superposition, déterminer l'expression du champ magnétique $B_t(x)$ créé par les deux spires en tout point M de l'axe (Ox). On exprimera ce champ en fonction de μ_o , R, I, a et x.
b) Déterminer la position du point où le champ s'annule.
c) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $B_t(x)$.

Exercice 5

a) $B_t(x) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}} - \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{((x-a)^2+R^2)^{3/2}}$

b) $B_t = 0$

$(x^2+R^2)^{3/2} = ((x-a)^2+R^2)^{3/2}$

$x^2+\cancel{R^2} = (x-a)^2+\cancel{R^2}$

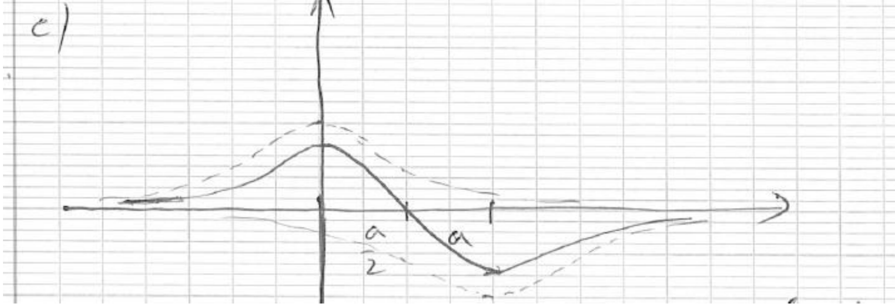
$x^2 = (x-a)^2$

$x = x-a$ impossible

ou $x = a - x$

$\Rightarrow x = \frac{a}{2}$

c)



Exercice 6

On considère un fil rectiligne de longueur infinie parcouru par un courant d'intensité I.

a) Déterminer l'expression du champ magnétique en tout point de l'espace.

On considère maintenant deux fils rectilignes de longueur infinie parcouru par deux courants identiques I et de même sens. Ces deux fils sont parallèles et distants de a.
Dans le repère cartésien, on pourra prendre ces deux fils dans le plan (xOz) parallèle à (Oz) et passant par les deux points de coordonnées respectives *A(a/2,0,0)* et *B(-a/2,0,0).*

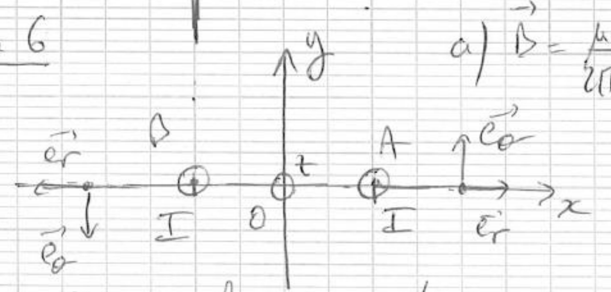
b) Déterminer le champ magnétique en tout point du plan (xOz) : plan contenant les deux fils.

c) Même question en tout point du plan (yOz) : plan médian des deux fils.

Exercice 6

(cours)

a) $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{r}} \vec{e_\theta}$



b) Plan xOz = plan de symétrie
⇒ si $M \in (xOz)$, $\vec{B}(M) \perp xOz$
càd $\vec{B}(M)$ suivant y

$\vec{e_\theta} = \vec{e_y}$ si $x>0$
$\vec{e_\theta} = -\vec{e_y}$ si $x<0$

$$\vec{B} = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+y^2}} + \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+y^2}} \right) \vec{e_y} \quad \text{pour } x>0$$

c) Plan yOz = plan de symétrie
⇒ si $M \in (yOz)$, $\vec{B}(M) \perp (yOz)$
càd $\vec{B}(M)$ suivant x

$\vec{e_\theta} = -\vec{e_x}$ si $y>0$
$\vec{e_\theta} = \vec{e_x}$ si $y<0$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{(\frac{a}{2})^2+y^2}}(-\vec{e_x}) + \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{(\frac{a}{2})^2+y^2}}(-\vec{e_x}) \quad \text{si } y>0$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{(\frac{a}{2})^2+y^2}}(-\vec{e_x}) \quad \text{si } y>0$$

A reprendre

Exercice 7

On considère un fil épais rectiligne de longueur infinie parcouru par un courant d'intensité I. Ce fil a un rayon R et on suppose que le vecteur densité de courant $\vec{j}$ est uniforme au sein du fil.

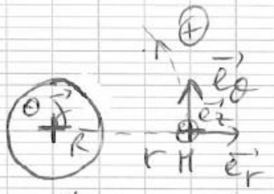
a) Calculer l'expression de $\|\vec{j}\|$ en fonction de I et R.

b) Par application du théorème d'Ampère, déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ en tout point de l'espace tant intérieur qu'extérieur au fil.

c) Tracer $B(r)$.

a) $\|\vec{j}\| = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi R^2}$

b)



Plan d'antisymétrie : $M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}$
$\Rightarrow \vec{B}(M)$ contenu dans ce plan

Plan de symétrie : $M, \vec{e_r}, \vec{e_z}$
$\Rightarrow \vec{B}(M) \perp$ à ce plan
$\Rightarrow \vec{B}(M)$ suivant $\vec{e_\theta}$.

Invariance en translation suivant Oz
$\Rightarrow \vec{B}(M)$ ne dépend pas de z

Invariance en rotation autour de Oz
$\Rightarrow \vec{B}(M)$ ne dépend pas de θ

Concl : $\vec{B}(M) = B(r).\vec{e_\theta}$

Cas $r > R$

Contour d'Ampère : cercle de rayon r orienté
$\Rightarrow$ Tous les $\vec{j}$ | I | comptés ⊕

$$\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 I$$

$$\oint_C B(r)\,\vec{e_\theta}.dl\,\vec{e_\theta} = \mu_0 I$$

$$B(r).2\pi r = \mu_0 I \qquad \boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}}$$

Cas $r < R$

Même contour d'Ampère

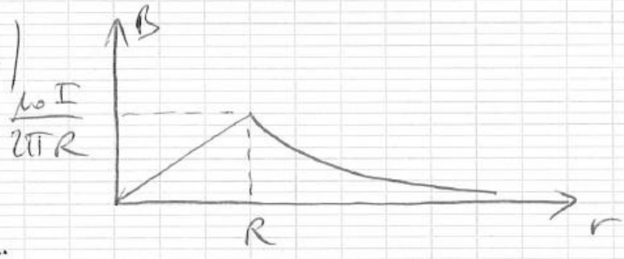
$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \iint_S \vec{j}\cdot\vec{dS}$$

$$= \mu_0\, j \times \pi r^2$$

$$B(r)\cdot 2\pi r = \mu_0 I \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

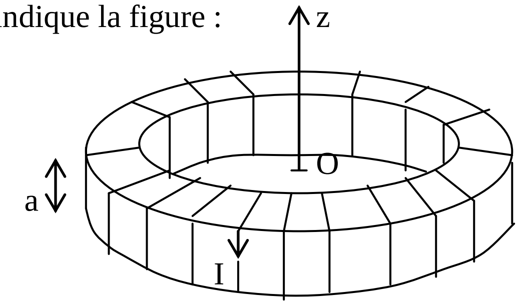
$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{R^2}\vec{e_\theta}}$$

c)



Exercice 8

On considère un circuit constitué par un tore à spires carrées de rayon moyen R. Les spires sont de côtés a comme l'indique la figure :



Chacune des spires est parcourue par un courant d'intensité I et on supposera un nombre de spires (réparties régulièrement) N suffisant pour que les lignes de champ soient des cercles d'axe (Oz) : la norme du champ n'est alors fonction que de la distance à l'axe (Oz).
Déterminer les caractéristiques du champ magnétique en tout point de l'espace.

Exercice 2

Symétries courants / antisymétries champ :

Tout plan passant par Oz.

$\Rightarrow \vec{B}$ suivant $\vec{e_\theta}$

Invariance par rotation suivant Oz :

$\Rightarrow \vec{B}$ ne dépend pas de θ

Concl : $\vec{B}(M) = B(r, z) . \vec{e_\theta}$

1er cas : M à l'intérieur

$r < R - \frac{a}{2}$

Contour d'ampère de rayon r

$$\oint \vec{B} . \vec{dl} = 0 \Rightarrow \vec{B}(M) = \vec{0}$$

2ème cas : M à l'extérieur

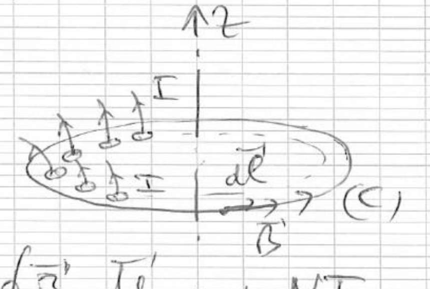
$r > R + \frac{a}{2}$

Contour d'Ampère de rayon r

$$\oint \vec{B} . \vec{dl} = \mu_0 (NI - NI) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = \vec{0}$$

3ème cas : M à l'intérieur du tore



$$\oint \vec{B} . \vec{dl} = \mu_0 NI$$

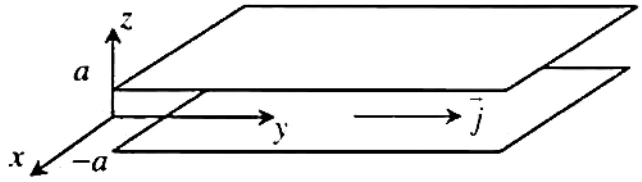
$$B_{int} 2\pi r = \mu_0 NI$$

$$\vec{B}_{int} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \vec{e_\theta}$$

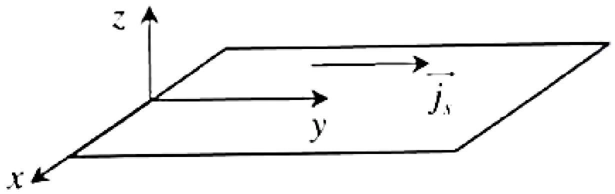
Exercice 9

On modélise une piste conductrice dans un circuit intégré, où les courants circulent sur de très faibles épaisseurs, par la distribution de courants suivante :

- Pour $-a < z < a$: $\vec{j} = j_0.\overrightarrow{e_y}$
- Pour $z < -a$ *ou* $z > a$: $\vec{j} = \vec{0}$



1. Analyser les symétries et invariances de cette distribution de courants. En déduire une information sur la parité de la fonction $B = f(z)$.
2. Déterminer le champ magnétique créé dans tout l'espace. Tracer l'allure de $B = f(z)$.
3. On passe à la limite surfacique en considérant que l'épaisseur e = 2a de la distribution volumique tend vers zéro.

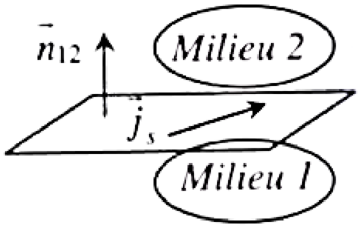


a. Donner l'expression de la densité surfacique de courant j_s en fonction j et a.
b. Donner l'expression du champ magnétique en tout point de l'espace.
c. Le résultat est-il en accord avec la relation de passage pour $\vec{B}$ en présence de courants surfaciques ?

On donne la relation de passage qui traduit la continuité de la composante normale de $\vec{B}$ et la discontinuité de sa composante tangentielle en présence de courants surfaciques :

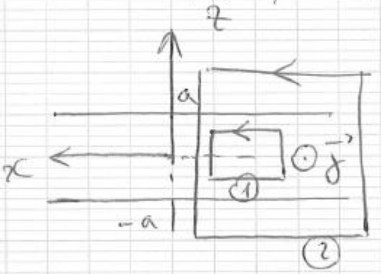
$$\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0.\overrightarrow{j_S} \wedge \overrightarrow{n_{12}}$$

où $\overrightarrow{n_{12}}$ désigne le vecteur unitaire normal à la surface de séparation entre les 2 milieux et est dirigé du milieu 1 vers le milieu 2. $\overrightarrow{B_1}$ et $\overrightarrow{B_2}$ sont respectivement les champs dans les milieux 1 et 2 au voisinage immédiat de la surface.



1. Symétrie courant / antisymétrie champ :
$yMz \Rightarrow \vec{B}(M)$ suivant x
Antisymétrie courant / symétrie champ.
$xMz \Rightarrow \vec{B}(M)$ suivant x.
Invariance par translation | suivant x
| suivant y
$\Rightarrow B$ ne dépend que de z.
Plan xOy plan de symétrie des courants / antisymétrie du champ
$\Rightarrow B(-z) = -B(z)$ $B(z)$ impaire

2. On a : $\vec{B}(M) = B(z).\vec{u}_x$
et $B(-z) = -B(z)$



* M tel que $-a < z < a$
Contour d'Ampère orienté 1 : carré côté $2z$

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 I_e = \mu_0 j (2z)^2 = \mu_0 j 4z^2$$

$$B(z) \times \cancel{4z} = \mu_0 j \cancel{4} z^{\cancel{2}}$$

$$B(z) = \mu_0 j z \qquad \vec{B}(z) = \mu_0 j z \vec{u}_x$$

* M tel que $z > a$ ou $z < -a$.
Contour d'Ampère orienté 2 : carré côté $2z$.

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 I_e = \mu_0 j .2z.2a.$$

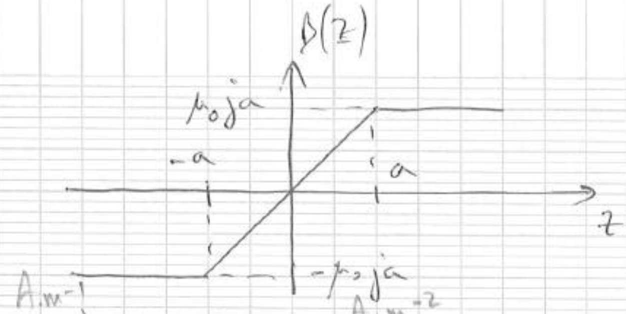
$$B(z).\cancel{4z} = \mu_0 .j.\cancel{2z}.\cancel{2}a.$$

$$B(z) = \mu_0 j a \qquad \vec{B}(z) = \mu_0 j a \vec{u}_x \quad z > 0$$

ou

$$B(z) = -\mu_0 j a \qquad \text{ou} \quad \vec{B}(z) = -\mu_0 j a \vec{u}_x \quad z < 0$$

T $\qquad$ $A.m^{-2}$ $\qquad$ A



3. $j_s = \lim_{a \to 0} j_v \times 2a$ — m

Pour M quelconque :

$I_e = \mu_0 j_v \cdot 2z \cdot 2a = \mu_0 j_s \cdot 2z$

$= \mu_0 j_s \cdot 2z$

$B(z) \cdot 4\cancel{z} = \mu_0 j_s \cdot 2\cancel{z}$

$B(z) = \frac{\mu_0 j_s}{2}$

$B(z) = \frac{\mu_0 j_s}{2}$ si $z > 0$

$B(z) = -\frac{\mu_0 j_s}{2}$ si $z < 0$

Relation de passage

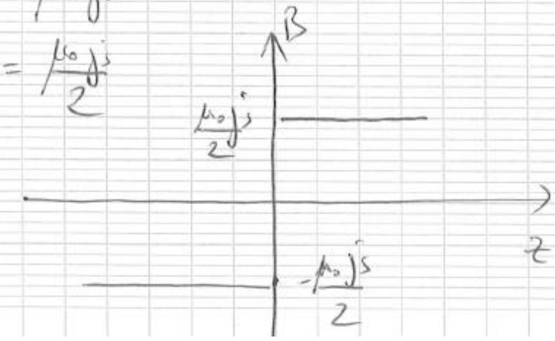
$\vec{B}(z) - \vec{B}(-z) = \mu_0 \vec{j_s}(M) \wedge \vec{n}_{12}$

$= \mu_0 j_s \wedge \vec{e}_z$

$2B(z) = \mu_0 j_s$

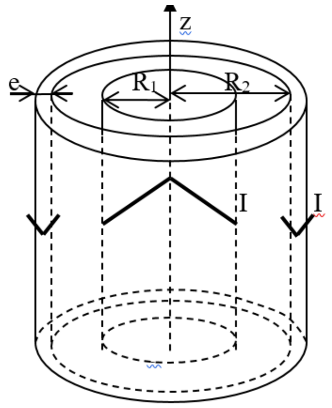
$B(z) = \frac{\mu_0 j_s}{2}$

Discontinuité du champ.



Exercice 10

1) Un câble coaxial est constitué d'un conducteur cylindrique central (1) d'axe (Oz) de rayon R_1 (âme du conducteur) entouré d'un conducteur cylindrique creux (2) lui aussi d'axe (Oz) de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_2+e (on supposera $e<<R_2$) . Ces conducteurs cylindriques sont supposés de très grande longueur par rapport à leur rayon. Le conducteur (1) est parcouru par un courant d'intensité I uniformément réparti sur la section de rayon R_1 alors que le conducteur (2) est parcouru par le courant de retour d'intensité $-I$.



Représentation d'une longueur l des deux cylindres (quasi-infinis selon Oz))

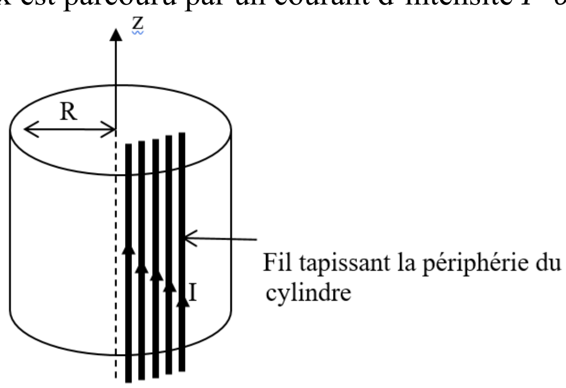
Déterminer l'expression du vecteur champ magnétique (direction, sens et intensité) en tout point M distant de r de l'axe Oz dans les 3 cas suivant :

$0 < r < R_1$

$R_1 < r < R_2$

$r > R_2+e$

2) Un cylindre de longueur infinie, d'axe (Oz), de rayon R est tapissé de fils électriques de longueur infini de diamètre $d<<R$ sur toute sa périphérie. Ces fils sont jointifs et chacun d'entre eux est parcouru par un courant d'intensité $I=0,5A$.



a) Calculer le nombre de fils tapissant le conducteur si R=5cm et d=0,5mm (vernis compris).
b) Par des considérations de symétrie, déterminer la direction du champ magnétique en tout point de l'espace.

c) Par application du théorème d'Ampère, exprimer le champ magnétique en tout point de l'espace.

1) Symétries / antisymétries / invariances

$\Rightarrow \vec{B}$ orthoradial

$\Rightarrow \vec{B}(M) = B(r).\vec{e_\theta}$

1er cas : $0 < r < R_1$

Contour d'Ampère orienté :

Cercle de rayon r d'axe Oz

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 I \left(\frac{r}{R_1}\right)^2$$

$$B.2\pi r = \mu_0 I \left(\frac{r}{R_1}\right)^2$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R_1^2}$$

2ème cas : $R_1 < r < R_2$

Contour d'Ampère orienté :

Cercle de rayon r d'axe Oz.

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 I$$

$$B.2\pi r = \mu_0 I$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

3ème cas : $r > R_2 + e$

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 (I - I) = 0$$

$$B(r) = 0$$

2/a) $n = \frac{2\pi R}{d} = \frac{2\pi \times 5}{0,05} = 200\pi$

b) $\vec{B}$ orthoradial, suivant $\vec{e_\theta}$

c) Contour d'Ampère orienté : cercle de rayon r

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_e$$

* $r < R \Rightarrow I_e = 0$

$\vec{B} = \vec{0}$

* $r > R \Rightarrow I_e = nI$

$B \times 2\pi r = \mu_0 n I$

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r} \vec{e_\theta}$$