CPGE ATS

Programme de colles – Semaine 20 (17 au 22 mars 2025)

Chapitres étudiés et questions de cours :

EM2 : Magnétostatique du vide et conduction électrique

Réponses attendues en bleu ou manuscrit.

1ère question de cours : questions 1 à 8

2ème question de cours : questions 9 à 11

Rappel : les expressions du gradient, de la divergence et du rotationnel doivent être connues, en coordonnées cartésiennes. Elles sont fournies en coordonnées cylindriques.

$f(x,y,z)$ est un champ scalaire quelconque. $\vec{A}(x,y,z)$ est un champ vectoriel quelconque. Pour alléger les notations des dérivées partielles, on ne note pas les variables qui sont gardées fixées, mais elles sont sous-entendues.

On note les vecteurs avec la notation $\vec{A} = \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = A_x\,\vec{e}_x + A_y\,\vec{e}_y + A_z\,\vec{e}_z$

On introduit le "vecteur" nabla : $\vec{\nabla} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$. Ce n'est pas vraiment un vecteur. C'est un moyen pratique de retrouver les formules des différents opérateurs en coordonnées cartésiennes (mais pas forcément pour les autres systèmes de coordonnées).

Opérateur	Remarque importante	Expression en coordonnées cartésiennes	Comment le retrouver avec nabla
Gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$	s'applique à un scalaire retourne un vecteur	$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$	$\vec{\nabla} f = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$
Divergence $\text{div}\,\vec{A}$	s'applique à un vecteur retourne un scalaire	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Rotationnel $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$	s'applique à un vecteur retourne un vecteur	$\begin{vmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$

Données de la divergence et du rotationnel en coordonnées cylindriques :

Vecteurs de base : $\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}$

$$div(\vec{a}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(r.a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(a_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(a_z)}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{a}) = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial(a_z)}{\partial\theta} - \frac{\partial(a_\theta)}{\partial z}\right].\overrightarrow{u_r} + \left[\frac{\partial(a_r)}{\partial z} - \frac{\partial(a_z)}{\partial r}\right].\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r.a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(a_r)}{\partial\theta}\right].\overrightarrow{u_z}$$

1) Définir le vecteur densité de courant $\vec{j}$ et l'intensité du courant I.

Dans un milieu conducteur de l'électricité, le déplacement des charges électriques peut être traduit par le **vecteur densité de courant $\vec{j}$**.

$$\vec{j} = \rho_l.\vec{v} = n^*.q.\vec{v}$$

$\vec{j}$: vecteur densité de courant (C.m^{-2}.s^{-1} ou A.m^{-2})

ρ_l : densité volumique de charges libres (C.m^{-3})

$\vec{v}$: vitesse moyenne de déplacement des charges (m.s^{-1})

n^* : nombre de porteurs de charges par unité de volume (m^{-3})

q : charge de chaque porteur de charge (C)

L'intensité du courant électrique I est définie comme le flux de $\vec{j}$ à travers une surface (section) S du conducteur mais aussi comme le débit de charges électriques :

$$I = \iint_S \vec{j}.\overrightarrow{dS} = \frac{dq}{dt}$$

I : Intensité du courant électrique (A)

q : Charge électrique (C)

2) Enoncer les règles de symétrie de la distribution de courant et du champ magnétostatique $\vec{B}$.

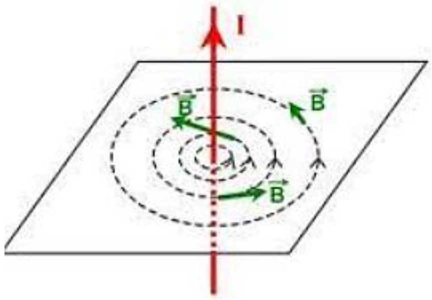
Tout plan de symétrie Π pour les courants est un plan d'antisymétrie pour le champ magnétostatique $\vec{B}$.

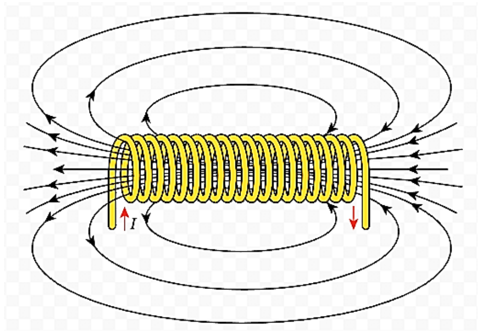
Remarque : Pour tout point M appartenant à un plan de symétrie des courants, le champ $\vec{B}$ est perpendiculaire à ce plan.

Tout plan d'antisymétrie Π^* pour les courants (plan qui transforme les courants en leurs opposés) est un plan de symétrie pour le champ magnétostatique $\vec{B}$.

Remarque : Pour tout point M appartenant à un plan d'antisymétrie des courants, le champ $\vec{B}$ est contenu dans ce plan.

3) Dessiner et orienter les lignes de champ magnétostatique $\vec{B}$ dans les cas suivants : Fil infini traversé par un courant I ; bobine longue traversée par un courant I.





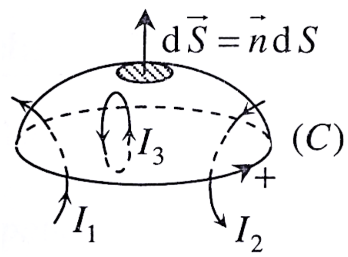
4) Enoncer le Théorème d'Ampère.

Théorème d'Ampère (forme intégrale) :

La circulation du champ magnétostatique le long d'un contour (C) fermé et orienté est égale au produit de μ_0 par l'intensité I_e enlacée, intensité qui traverse une surface S orientée s'appuyant sur (C).

$$\oint_{(C)} \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 . I_e \quad \text{avec} \quad I_e = \iint_S \vec{j}.\vec{dS}$$

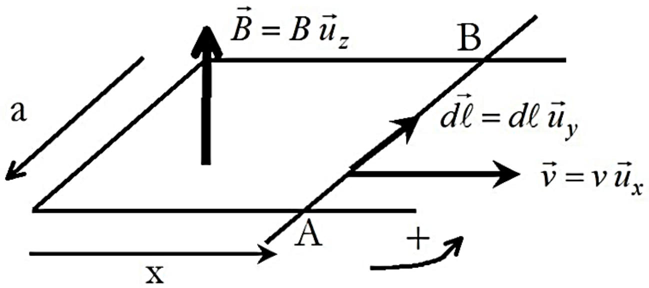
μ_0 : perméabilité magnétique du vide



5) Donner la définition de la force de Laplace.

Un élément filiforme de longueur dl parcouru par un courant d'intensité i et placé dans un champ magnétostatique $\vec{B}$ subit la force de Laplace élémentaire suivante :

$$d\vec{F}_L = i.\vec{dl} \wedge \vec{B}$$



Par intégration :

$$\vec{F}_L = \int_l i.\vec{dl} \wedge \vec{B}$$

Exemple sur la tige AB ci-contre (Rail de Laplace) :

$\vec{F}_L = i\int_{AB} \vec{dl}\wedge\vec{B} = i.\overrightarrow{AB}\wedge\vec{B} = i.l.B.\vec{u_x}$

6) Donner l'équation de conservation de la charge.

Equation de conservation de la charge, ou équation de continuité :

$$div(\vec{j}) + \frac{\partial \rho_l}{\partial t} = 0$$

$\vec{j}$: densité de courant (A.m^{-2})

ρ_l : densité volumique de charges libres (C.m^{-3})

7) Donner la loi d'ohm sous forme locale.

Loi d'ohm locale dans un milieu conducteur : $\vec{j} = \sigma.\vec{E}$

$\vec{E}$: champ électrique (V.m^{-1})

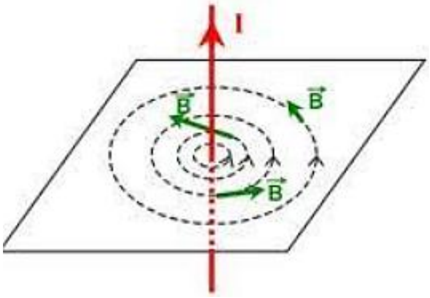
$\vec{j}$: densité de courant (A.m^{-2})

σ : conductivité électrique (Ω^{-1}.m^{-1})

8) Donner les 4 équations de Maxwell.

Equation	**Statique** Présence de sources	**Remarques**	**Variable Quelconque** Présence de sources
Maxwell Gauss $div\vec{E} =$	$\frac{\rho}{\varepsilon_0}$	Forme locale du théorème de Gauss $\oiint_\Sigma \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$	$\frac{\rho}{\varepsilon_0}$
Maxwell Faraday $\overrightarrow{rot}\vec{E} =$	$\vec{0}$	La **circulation** du champ électrostatique est **conservative**	$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell Thomson ou Maxwell Flux $div\vec{B} =$	0	Le champ magnétique est à **flux conservatif**	0
Maxwell Ampère $\overrightarrow{rot}\vec{B} =$	$\mu_0\vec{j}$	Forme locale du théorème d' Ampère $\oint_{(C)} \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0.I_e$	$\mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

9) Cas du fil infini parcouru par un courant d'intensité I : Déterminer le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ dans tout l'espace par utilisation du théorème d'Ampère.



Symétries de la distribution de courants I (antisymétries du champ $\vec{B}$) : Plan passant par M et contenant Oz

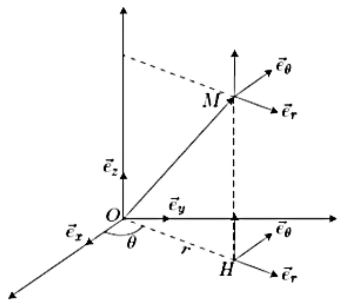
⇨ $\vec{B}(M)$ perpendiculaire à ce plan donc suivant $\vec{e}_\theta$

Antisymétries de la distribution de courants I (symétries du champ $\vec{B}$) : Plan passant par M et perpendiculaire à Oz

Invariances : Invariance par translation suivant l'axe z, invariance par rotation autour de l'axe z.

⇨ $\vec{B}(M)$ ne dépend ni de z ni de θ
⇨ $\vec{B}(M) = \vec{B}(r)$

Conclusion des symétries et invariances : $\boldsymbol{\vec{B}(M) = B(r).\vec{e}_\theta}$; lignes de champ circulaires, autour de z ; $\vec{B}$ « ortho radial ».



Contour d'Ampère orienté : Cercle d'axe *Oz* et de rayon r

⇨ $\vec{B}$ tangent au cercle
⇨ $\|\vec{B}\|$ constant (uniforme) sur tout le cercle

Théorème d'Ampère :

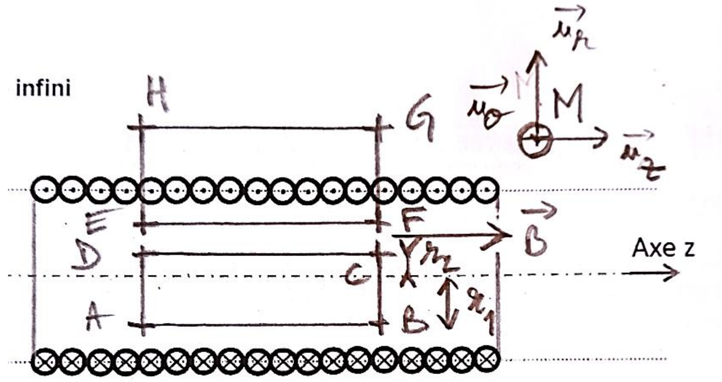
$$\oint_{(C)} \vec{B}.\vec{dl} = \oint_{(C)} B(r).\vec{e}_\theta.dl.\vec{e}_\theta = \oint_{(C)} B(r).dl = B(r)\oint_{(C)} dl = B(r).2\pi r = \mu_0.I$$

⇨ $B(r) = \frac{\mu_0.I}{2\pi r}$ Unités : T, A, m

Conclusion :

$$\boldsymbol{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0.I}{2\pi r}\vec{e}_\theta} \qquad \textbf{$\vec{B}(M)$ orthoradial}$$

10) Cas du fil solénoïde infini parcouru par un courant d'intensité I : Déterminer le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ dans tout l'espace par utilisation du théorème d'Ampère.



Nombre de spires par unité de longueur : $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{L}}$

Hypothèses : L « infinie » ; enroulement hélicoïdal => les spires peuvent être considérées comme circulaires

Symétries : Tout plan Π $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

⇨ $\vec{B}(M) \perp \Pi$ donc $\vec{B}(M)$ suivant z : $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z).\overrightarrow{u_z}$ pour tout point M

Antisymétries : Tout plan Π^* $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$

Invariances : Par translation suivant z, par rotation suivant θ

Conclusion : $\vec{B}(M)$ ne dépend ni de r ni de θ : $\vec{B}(M) = B(r).\overrightarrow{u_z}$ pour tout point M

Hypothèse : $\vec{B} = \vec{0}$ à l'extérieur du solénoïde

- Contour d'Ampère orienté ABCD à l'intérieur du solénoïde, contenu dans le plan contenant l'axe du solénoïde $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$

$\oint_{(C)} \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \int_{AB} \vec{B}.\overrightarrow{dl} + \int_{BC} \vec{B}.\overrightarrow{dl} + \int_{CD} \vec{B}.\overrightarrow{dl} + \int_{DA} \vec{B}.\overrightarrow{dl} = B(r_1).AB + 0 - B(r_2).CD + 0 = \mu_0.0 = 0$ (pas de contour enlacé)

Conclusion : $B(r_1) = B(r_2) = B_{int}$; **Champ uniforme à l'intérieur du solénoïde**

- Contour d'Ampère orienté EFGH, contenu dans le plan contenant l'axe du solénoïde $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$

$\oint_{(C)} \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \int_{EF} \vec{B}.\overrightarrow{dl} + \int_{FG} \vec{B}.\overrightarrow{dl} + \int_{GH} \vec{B}.\overrightarrow{dl} + \int_{HE} \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \int_{EF} \overrightarrow{B_{int}}.\overrightarrow{dl} = B_{int}.EF = \mu_0.n.EF.I$

d'où : $B_{int} = \mu_0.n.I$

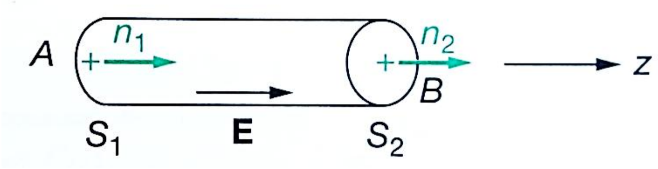
Conclusion : $\boldsymbol{\overrightarrow{B_{int}} = \mu_0.n.I.\overrightarrow{u_z}}$ **à l'intérieur du solénoïde**

11) Passer de la loi d'ohm sous forme locale à la loi d'ohm sous forme intégrale.

$\vec{j} = \boldsymbol{\sigma}.\vec{E}$ avec champ électrique $\vec{E}$ uniforme

Or : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{u_z} = -\frac{dV}{dz}\overrightarrow{u_z} = -\frac{\Delta V}{\Delta z}\overrightarrow{u_z} = -\frac{V(B)-V(A)}{L}\overrightarrow{u_z}$

D'où : $E = -\frac{V(B)-V(A)}{L} = \frac{V(A)-V(B)}{L}$



On obtient : $I = jS = \boldsymbol{\sigma E S} = \boldsymbol{\sigma}\frac{V(A)-V(B)}{L}\boldsymbol{S} = \frac{\Delta U}{R}$

Avec :

$$R = \frac{\Delta U}{I} = \frac{L}{\sigma S}$$

R : résistance électrique (Ω)

σ : conductivité électrique ($\Omega^{-1}.m^{-1}$)

L : longueur du conducteur (m)

S : section du conducteur (m^2)

Puis : de 1 à 2 exercices proposés par le colleur.

Programme ATS

5. Conduction électrique	
Courant dans un conducteur	Définir le vecteur densité de courant. Établir l'équation de conservation de la charge à une dimension en régime variable. Énoncer sa généralisation à trois dimensions puis expliquer que le vecteur densité de courant est à flux conservatif en régime stationnaire. Énoncer la loi d'Ohm locale. Expliquer l'effet Joule, définir la résistance électrique dans un conducteur et présenter le lien avec la conduction thermique en régime stationnaire. Exprimer la condition d'application de l'ARQS en fonction de la taille du circuit et de la fréquence des signaux.
6. Magnétostatique du vide	
Effets magnétiques d'un courant de charges	Décrire un dispositif permettant de réaliser un champ magnétique quasi uniforme. Citer des ordres de grandeur de champs magnétiques : au voisinage d'aimants, dans une machine électrique, dans un appareil d'IRM, dans le cas du champ magnétique terrestre. Définir la notion de ligne de champ magnétostatique. Énoncer la relation donnant la force de Laplace s'exerçant sur un élément de circuit filiforme parcouru par un courant et placé dans un champ magnétostatique.
	Identifier les propriétés de symétrie et d'invariance d'une distribution de courant. Tracer l'allure des cartes de champs magnétiques pour un aimant droit, un fil rectiligne, une spire circulaire, une bobine longue et un tore.
Équation de Maxwell-Ampère de la statique, théorème d'Ampère et équation de Maxwell relative au flux du champ magnétique	Énoncer le théorème d'Ampère et le relier à l'équation de Mawxell-Ampère de la statique. Énoncer l'équation de Maxwell relative au flux du champ magnétique. Utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie (fil infini, câble coaxial, nappe de courant supposée « infinie », tore, solénoïde « infini » en admettant que le champ magnétique est nul à l'extérieur). Énoncer les relations de passage du champ magnétostatique. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental permettant d'apprécier la validité du modèle du solénoïde infini.**