

T6 EM1 EM2 révisions

Durée de l'épreuve : 3 H

En complément du DM 9 :

T6 Conduction thermique

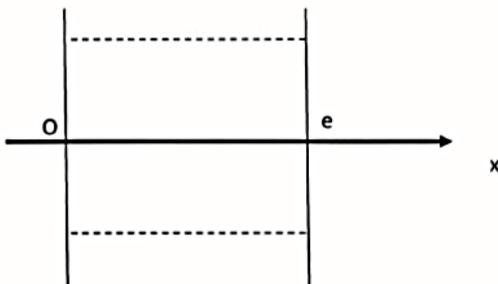
Les calculs numériques seront faits avec un ou deux chiffres significatifs à l'appréciation des candidats.

On donne l'intensité de la pesanteur $g=9,8 \text{ m.s}^{-2}$ et $\sqrt{3,6} = 1,9$

I Problème d'isolation

1) Rappeler la loi de Fourier de la conduction thermique, en précisant les unités des différentes grandeurs impliquées. Commenter le signe.

2) On considère un matériau plan étendu, d'épaisseur e , mis en contact sur sa face $x=0$ avec une source de chaleur à la température T_0 , et sur sa face en $x=e$ avec une source à la température T_1 (fig 1).



fig(1)

En introduisant la masse volumique μ , la chaleur massique c et la conductivité thermique λ , déterminer, en justifiant les étapes, l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x,t)$. Quel est le temps caractéristique τ pour que la chaleur diffuse sur une distance L ?

3) Déterminer $T(x)$ en régime stationnaire.

4) Définir et exprimer la résistance thermique R pour une section de 1m^2 , ainsi que la résistance r d'une plaque de surface S .

5) On considère maintenant deux matériaux de conductivités différentes λ_1 et λ_2 , d'épaisseurs respectives e_1 et e_2 , ayant une face commune (fig.2). Déterminer en régime permanent la température à l'interface T_0 lorsque les faces externes sont à, respectivement, T_1 et T_2 . A quelle condition T_0 est-elle proche de T_1 ? de T_2 ?

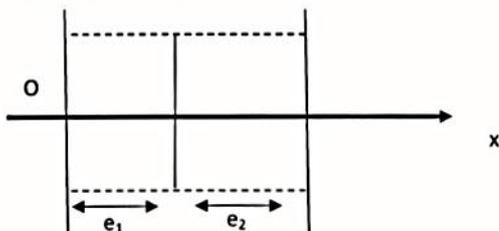


Fig.2

6) Donner l'ordre de grandeur de la conductivité thermique pour un gaz, un corps condensé non conducteur et un solide conducteur

7) Il est recommandé de revêtir les murs d'une maison d'une couche de polystyrène expansé. Justifier quantitativement cette assertion par estimation du flux thermique selon deux situations que l'on précisera.

8) On considère un matériau solide de température T_s au contact d'un gaz à la température T_e . Il existe alors une couche de faible épaisseur δ de gaz accrochée à la surface du solide. La température varie de T_s à T_e sur cette couche. En considérant que la température ne varie qu'en fonction de z (cf fig .3), montrer que la puissance thermique transférée à travers la surface d'échange S vaut $P=hS(T_s-T_e)$, h s'exprimant en fonction de la conductivité thermique du gaz et de δ .

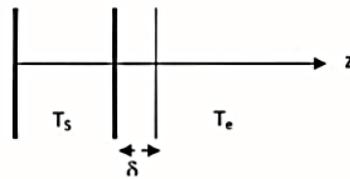


fig.3.

9) Déterminer la résistance thermique surfacique associée à ce processus. Que peut-on entreprendre pour diminuer h ?

1)
$$j_{th} = -k \text{ grad } T$$

$W \cdot m^{-2}$ $K \cdot m^{-1}$

$$\frac{W \cdot m^{-2}}{K \cdot m^{-1}} = W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$$

Signe \ominus : le vecteur densité de flux est orienté des Températures élevées vers les Températures basses
 \neq le gradient de T est orienté dans l'autre sens.



Bilan thermique : $[j(x) - j(x+dx)] S dt = dm \cdot c [T(t+dt) - T(t)]$

$[-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x) + \lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x+dx)] S dt = \rho S dx c [T(t+dt) - T(t)]$

$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx S dt = \rho S dx c \frac{\partial T}{\partial t} dt$

$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$

3

ou $\frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0$

1

Coefficient de diffusion thermique D

$\tau = \frac{L^2}{D} = \frac{L^2 \rho c}{\lambda}$

3) En régime stationnaire $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{dT}{dx^2} = 0$

$\Rightarrow T(x) = ax + b$

Conditions aux limites :

$T(0) = T_0 \Rightarrow b = T_0$

$T(e) = T_1 \Rightarrow T_1 = ae + T_0$

$\Rightarrow a = \frac{T_1 - T_0}{e}$

d'où : $T(x) = \frac{(T_1 - T_0)}{e} x + T_0$

1 4) $R_{th} = \frac{e}{\lambda S} = \frac{e}{\lambda}$ pour $S = 1 \text{ m}^2$ -

1 $r = \frac{e}{\lambda S}$ -

5) Les 2 résistances sont traversées par le même flux donc en série

1 $\phi = \frac{T_1 - T_0}{R_{th1}} = \frac{T_0 - T_2}{R_{th2}}$ -

On peut raisonner sur 1 m^2

$$\phi = \frac{T_1 - T_0}{e_1} \lambda_1 = \frac{T_0 - T_2}{e_2} \lambda_2$$

$$\frac{T_1 \lambda_1}{e_1} + \frac{T_0 \lambda_2}{e_2} = T_0 \left(\frac{\lambda_2}{e_2} + \frac{\lambda_1}{e_1} \right)$$

$$T_0 = \frac{\frac{T_1 \lambda_1}{e_1} + \frac{T_2 \lambda_2}{e_2}}{\frac{\lambda_2}{e_2} + \frac{\lambda_1}{e_1}} = \frac{T_1 \lambda_1 e_2 + T_2 \lambda_2 e_1}{\lambda_2 e_1 + \lambda_1 e_2}$$

T_0 proche de T_1 si λ_2 ou e_1 petits -

T_0 proche de T_2 si λ_1 ou e_2 petits -

→ Cela permet de vérifier l'aspect physique!

6) Conductivités thermiques :

Air $0,03 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ -

Non conducteur $0,04 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ -

Conducteur $400 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ -

7) λ polyst. très faible

→ R_{th} polyst. très élevée

Non sans polystyrène

→ R_{th} moyenne

→ $\phi = \frac{\Delta T}{R_{th}}$ moyen -

Non avec polystyrène

→ $R_{th} = \Sigma R_{th}$ élevée -

→ $\phi = \frac{\Delta T}{\Sigma R_{th}}$ faible.

8) Conductif - et non convectif à travers cette couche de gaz

$$\phi = \frac{\Delta T}{R_{\text{gaz}}} = \frac{\Delta T}{\delta} \times \lambda_{\text{gaz}} S$$

$$= \frac{\lambda_{\text{gaz}} S}{\delta} (T_s - T_e)$$

$$= R S (T_s - T_e)$$

D'où : $h = \frac{\lambda_{\text{gaz}}}{\delta}$

9) $R_h = \frac{\delta}{\lambda_{\text{gaz}} S} = \frac{1}{R S}$

En complément du DM 10 :

EM 1 Electrostatique (TSI centrale 2018)

III.B - Le microphone électrostatique

Le microphone électrostatique, dont la courbe de réponse est donnée figure 2, est constitué d'une membrane P_1 de surface S , extrêmement légère de masse m_e . Celle-ci, réalisée en métal (ou en polyester rendu conducteur par un saupoudrage de métal), est mobile et constitue l'une des armatures d'un condensateur plan. L'espace entre la membrane P_1 et l'armature fixe P_2 est entièrement rempli d'air de permittivité électrique ϵ_0 . Au repos, la distance entre les deux armatures parallèles est notée e . En mouvement, la liaison entre l'isolant et la membrane peut être modélisée par une force de rappel élastique de constante de raideur k_e .

Les variations de pression provoquées par l'onde sonore font varier la distance entre les deux armatures par un déplacement de la membrane parallèlement à l'axe Ox . Ce déplacement induit une variation de la capacité et cet effet est exploité dans le circuit électrique de la figure 15 de manière à récupérer le signal $u(t)$ aux bornes de la résistance $R = 10 \text{ k}\Omega$. Les variations de $u(t)$ sont à l'image de celles de la pression acoustique.

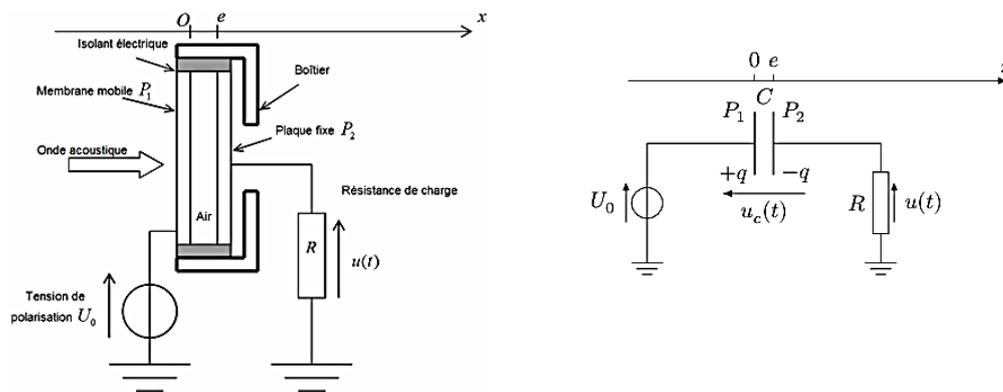


Figure 15 Microphone électrostatique

La membrane P_1 et l'armature fixe P_2 sont chargées uniformément par les charges $+q$ et $-q$. On associe à P_1 et P_2 les densités surfaciques uniformes de charges $+\sigma = +q/S$ pour P_1 et $-\sigma = -q/S$ pour P_2 . De plus, on assimile les deux plaques à des plans infinis afin de négliger par la suite les effets de bord.

III.B.1) Capacité du condensateur au repos

Q 37. Montrer, par des considérations de symétrie et d'invariance, que le champ électrique $\vec{E}_1(M)$ créé par la plaque P_1 en tout point de l'espace est perpendiculaire à ce plan et ne dépend que d'une variable d'espace.

Q 38. Justifier que $\vec{E}_1(M) = -\vec{E}_1(M')$ où M et M' sont deux points placés symétriquement par rapport au plan P_1 .

Q 39. En appliquant le théorème de Gauss sur une surface clairement indiquée, exprimer le champ électrique $\vec{E}_1(M)$.

Q 40. Dédurre du résultat précédent l'expression du champ électrique total $\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$ créé par les deux plaques P_1 et P_2 en tout point de l'espace.

Q 41. Montrer que la différence de potentiel entre les deux plaques s'exprime par $u_c = V_{P_1} - V_{P_2} = q/C_0$ avec $C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{e}$, la capacité du condensateur au repos.

III.B Le microphone électrostatique

III.B.1. Capacité du condensateur au repos

Q37. Étude des raisons de symétrie, en ne considérant que la plaque P_1 :

— Tout plan $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ est un plan de symétrie pour la distribution de charge (considérée infinie), donc pour le champ \vec{E}_1 . Donc $\vec{E}_1(M) \cdot \vec{e}_z = 0$.

— Tout plan $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie pour la distribution de charge, donc pour le champ \vec{E}_1 . Donc $\vec{E}_1(M) \cdot \vec{e}_y = 0$.

On en déduit que $\vec{E}_1(M) = E_1(x, y, z)\vec{e}_x$.

— Comme la plaque est considérée infinie, il y a invariance par translation d'axes (Oy) et (Oz) donc $E_1(M)$ ne dépend respectivement ni de y ni de z .

Finalement $\vec{E}_1(M) = E_1(x)\vec{e}_x$.

Q38. Le plan $(O, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie pour la distribution de charges, donc pour $\vec{E}_1(M)$. On en déduit que $E_1(-x) = -E_1(x)$ (la fonction E_1 est impaire) donc on a bien $\vec{E}_1(M) = -\vec{E}_1(M')$ si $M' = \text{sym}(M)$.

Q39. On choisit comme surface de Gauss un cylindre Σ d'axe Mx , de section S , situé entre les plans de cote x et $-x$. On applique alors le théorème de Gauss :

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{E}_1 \cdot d^2\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi = \iint_{S(-x)} E_1(-x)\vec{e}_x \cdot d^2S(-\vec{e}_x) + \underbrace{\iint_{S_{lat}} E_1(M)\vec{e}_x \cdot d^2S_{lat}}_{=0} + \iint_{S(x)} E_1(x)\vec{e}_x \cdot d^2S\vec{e}_x = E_1(x) \cdot S - E_1(-x)S = 2SE_1(x)$$

$Q_{int} = \sigma S$ et finalement on trouve, pour $x > 0$ $E_1(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_x$. En utilisant l'imparité de la fonction, on aboutit alors à l'expression générale :

$$\vec{E}_1(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{|x|}{x} \text{ pour } x \neq 0$$

Q40. On applique le théorème de superposition :

x	$-\infty$	0	e	$+\infty$
E_1	$-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$		$+\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$	$+\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
E_2	$+\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$		$+\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$	$-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
E	0		$\frac{\sigma}{\epsilon_0}$	0

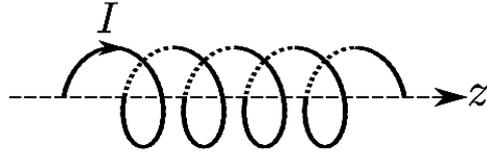
Finalement, le champ est nul partout, sauf entre les armatures où il vaut : $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{e}_x$ pour $x \in]0; e[$

Q41. $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ donc on trouve V par intégration : $V(x) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}x + U_0$. On a donc $u_c = V(0) - V(e) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}e$. En faisant

intervenir la section, il vient : $u_c = \frac{\sigma S \cdot e}{\epsilon_0 S} = q \frac{e}{\epsilon_0 S} = \frac{q}{C_0}$ avec $C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{e}$.

EM 2 Magnétostatique (ATS 2023)

Les trois questions qui suivent sont indépendantes du reste. On s'intéresse ici au dispositif qui permet de créer le champ magnétique stationnaire des rails de Laplace. Il s'agit d'une bobine cylindrique, ou solénoïde, parcourue par un courant I constant. On note n le nombre de spires par unité de longueur.



Document 9 : schéma de la bobine.

22 - Tracer l'allure de la carte des lignes de champ magnétique produites par la bobine.

On supposera dans la suite que le champ magnétique est nul en dehors du solénoïde. On néglige tout effet de bord : le solénoïde peut être considéré comme infini. On utilise les coordonnées cylindriques dont l'axe Oz est celui du solénoïde.

23 - En utilisant les symétries et invariances de la distribution de courants, déterminer les variables dont dépend le champ \vec{B} ainsi que sa direction.

24 - À l'aide du théorème d'Ampère, établir l'expression du champ \vec{B} à l'intérieur du solénoïde.

22

23 - Plan $(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi)$ plan de symétrie -
 $\Rightarrow \vec{B} \perp$ plan de symétrie,
 $\Rightarrow \vec{B}$ suivant \vec{e}_z - $\vec{B} = B(r) \cdot \vec{e}_z$
 Invariances suivant ϕ et z
 $\Rightarrow \vec{B} = B(r) \cdot \vec{e}_z$

24 - Contour d'Ampère :
 Rectangle, longueur L , largeur r

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{\ell}' = \mu_0 I = \mu_0 N I$$

$$B \cdot L = \mu_0 N I$$

$$B = \frac{\mu_0 N}{L} I = \mu_0 n I$$

$$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$$

T6 EM2 (conductions thermique et électrique) (ATS 2022)

IV Effets magnétiques et thermiques de la foudre

La foudre se manifeste particulièrement en montagne, milieu propice à la formation de nuages d'orage.

IV.1 Effet de tension induite

La foudre peut causer des dégâts matériels de plusieurs façons. L'une d'elle est par un effet de tension induite dans les circuits électriques avoisinants. Ces circuits peuvent être l'installation électrique d'un refuge de montagne, ou les accessoires électroniques du randonneur.

Pour étudier ceci, on modélise d'abord le coup de foudre comme un fil rectiligne infini, d'axe z vertical ascendant, parcouru par un courant I constant et dirigé dans le sens des z croissants. On se place dans le vide. On utilise un système de coordonnées *cylindriques* d'axe z . La perméabilité magnétique du vide est $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.

- 36 - En utilisant les symétries et invariances du problème, déterminer la direction du champ magnétique produit par le fil, et les variables dont il dépend.
- 37 - Déterminer ensuite l'expression du champ magnétique \vec{B} produit à l'extérieur du fil.

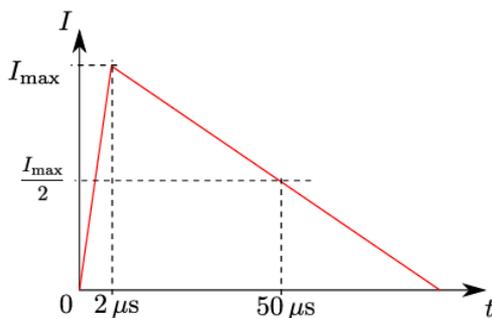
Le courant I n'est en réalité pas constant. On admet toutefois que l'expression précédente du champ magnétique reste valable à chaque instant en remplaçant I par $I(t)$.

- 38 - (**Résolution de problème**) En utilisant notamment les deux schémas ci-dessous, et en proposant des ordres de grandeur raisonnables pour les dimensions considérées, estimer la valeur maximale de la force électromotrice (ou tension) induite dans le circuit électrique d'un refuge de montagne, si le coup de foudre tombe à une distance $d = 10 \text{ m}$ de celui-ci.

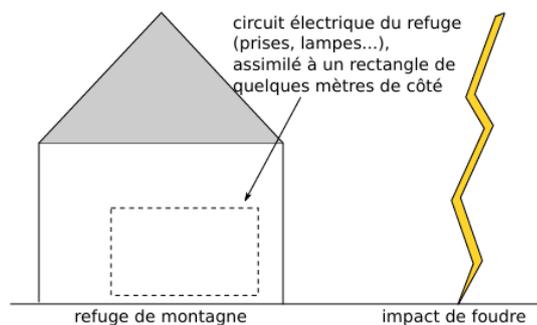
Commenter le résultat.

Remarque : on commencera par identifier les effets et lois physiques en jeu. On effectuera des approximations pour rendre les calculs simples.

Remarque : on commencera par identifier les effets et lois physiques en jeu. On effectuera des approximations pour rendre les calculs simples.



Document 10a : profil standardisé de l'intensité $I(t)$ délivrée par un coup de foudre, utilisé pour les études de risques dans les installations électriques. On pourra prendre $I_{\text{max}} = 50 \text{ kA}$.



Document 10b : vue schématique de la situation.

IV.2 Échauffement d'un fil parcouru par un fort courant

Que ce soit par effet de tension induite ou par passage direct de la décharge électrique, la foudre engendre de forts courants dans les câbles électriques des habitations ou du réseau. Nous allons ici estimer le courant maximal que peut supporter un fil avant de fondre.

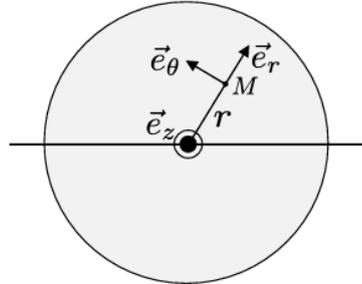
On considère un fil électrique en cuivre, cylindrique, de rayon $R = 2,0 \text{ mm}$. Il est parcouru par un courant stationnaire I orienté dans le sens des z croissants. On utilise des coordonnées cylindriques dont l'axe Oz est celui du fil (cf schéma).

Grandeurs caractéristiques du cuivre :

- conductivité thermique $\lambda = 400 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$,
- conductivité électrique $\gamma = 6 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$,
- température de fusion sous 1 bar : $T_{\text{fus}} = 1085^\circ\text{C}$.

On donne l'expression du gradient en coordonnées cylindriques pour une fonction ne dépendant que de r :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{df}{dr} \vec{e}_r.$$



Document 11 : vue en coupe du fil.

- 39 - On suppose que le vecteur densité de courant $\vec{j} = j\vec{e}_z$ est uniforme au sein du fil. Établir son expression en fonction de I , R et \vec{e}_z .
- 40 - La puissance dissipée par effet Joule, par unité de volume, est donnée par $p_J = \vec{j} \cdot \vec{E}$ où \vec{E} est le champ électrique dans le conducteur. Rappeler l'expression de la loi d'Ohm locale et l'utiliser pour donner une expression de p_J en fonction de I , R et d'une grandeur caractéristique du cuivre.

Pour obtenir le profil de température $T(r)$ en fonction de la distance radiale r , il faut d'abord établir l'équation de la chaleur dans le fil. Il y a ici deux différences par rapport au cas à une dimension cartésienne et sans terme source : les coordonnées sont cylindriques (dépendance en r) et il y a présence d'un chauffage volumique p_J . On admet alors que l'équation de la chaleur est la suivante, en régime stationnaire :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{r p_J}{\lambda}.$$

De plus, le fil est refroidi par un transfert conducto-convectif avec l'air sur sa périphérie, selon la loi de Newton qui donne l'expression du vecteur densité de flux thermique en $r = R$:

$$j_{\text{th}}(R) = h(T(R) - T_{\text{ext}}),$$

avec T_{ext} la température extérieure, égale à 20°C , et $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

- 41 - Résoudre l'équation de la chaleur pour obtenir une expression de $T(r)$. On exprimera la ou les constantes d'intégration en fonction de $T_0 = T(r=0)$ (température au centre du fil).
- 42 - En utilisant la condition aux limites en $r = R$, établir une expression de T_0 en fonction de p_J , R , h , λ et T_{ext} .
- 43 - À quelle condition sur R , λ et h peut-on simplifier l'expression précédente de T_0 sous la forme :

$$T_0 \simeq T_{\text{ext}} + \frac{p_J R}{2h}.$$

Cette condition est-elle vérifiée ici ?

- 44 - En déduire l'expression du courant à partir duquel le fil de cuivre fond, puis une valeur numérique approchée.

Merci à :

IV Effet magnétique et thermique de la foudre

IV.1 Effet de la tension induite

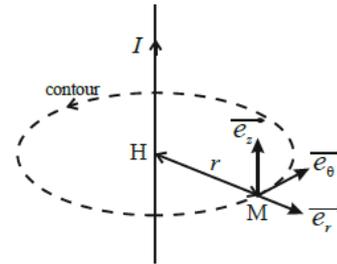
36 - La distribution de courant est invariante en θ et z donc $\vec{B}(r, \theta, z)$.

Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est plan de symétrie pour la distribution de courant ; or le champ magnétique est perpendiculaire aux plans de symétrie de la distribution de courant donc $\vec{B} = B_\theta \vec{e}_\theta$.

En conclusion, $\vec{B} = B_\theta(r) \vec{e}_\theta$

37 - Je note H le projeté orthogonal de M sur le fil.

Je choisis comme contour d'Ampère le cercle de centre H passant par M.



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint (B_\theta(r) \vec{e}_\theta) \cdot (d\ell \vec{e}_\theta) = B_\theta(r) \oint d\ell = B_\theta(r) 2\pi r$$

Théorème d'Ampère : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}}$ avec $I_{\text{enl}} = +I$

$$\Rightarrow 2\pi r B_\theta(r) = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

38 - Le circuit électrique a une surface $S \approx 10 \text{ m}^2$. Le champ magnétique traversant ce circuit est

de l'ordre de grandeur de $\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi d}$ ce qui correspond à un flux $\Phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} dS \approx \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi d} S$.

D'après la loi de Lenz Faraday, la force électromotrice induite dans le circuit est

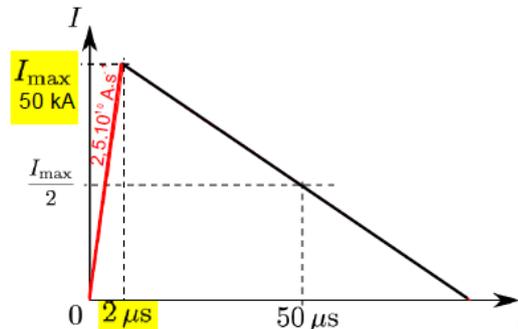
$$|e| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{\mu_0}{2\pi d} S \left| \frac{dI}{dt} \right|$$

$$e_{\text{max}} = \frac{\mu_0}{2\pi d} S \left| \frac{dI}{dt} \right|_{\text{max}}$$

$$\left| \frac{dI}{dt} \right|_{\text{max}} = \frac{50 \text{ kA}}{2 \mu\text{s}} = 2,5 \cdot 10^{10} \text{ A.s}^{-1}$$

$$e_{\text{max}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi \times 10} \cdot 10 \times 2,5 \cdot 10^{10} \text{ soit } e_{\text{max}} = 5 \text{ kV}$$

Cette valeur de surtension est très largement suffisante pour causer des dégâts matériel.



IV.2 Échauffement d'un fil parcouru par un courant fort

39 - Définition : $I = \iint \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \iint j \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z dS \stackrel{j \text{ uniforme}}{=} j \iint dS = j\pi R^2 \Rightarrow \vec{j} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{e}_z$

40 - Loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

En substituant $\vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{j}$ et $\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{e}_z$ dans $p_J = \vec{j} \cdot \vec{E}$, j'obtiens $p_J = \frac{I^2}{\gamma \pi^2 R^4}$

41 - Équation de la chaleur $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -r \frac{p_J}{\lambda}$

NB : $D \left(\Delta T + \frac{p_J}{\lambda} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ en stationnaire avec $\Delta T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

J'intègre par rapport à r : $r \frac{dT}{dr} = -\frac{p_J}{\lambda} \frac{r^2}{2} + C_1$

En $r=0$, $0 = 0 + C_1$ donc $C_1 = 0$ et $\frac{dT}{dr} = -\frac{p_J}{\lambda} \frac{r}{2}$

J'intègre par rapport à r : $T(r) = -\frac{p_J}{\lambda} \frac{r^2}{4} + C_2$

En $r=0$, $T_0 = 0 + C_2$ donc $C_2 = T_0$ et $T(r) = -\frac{p_J}{\lambda} \frac{r^2}{4} + T_0$

42 - Dans le fil, d'après la loi de Fourier $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$, $j_{th}(r) = -\lambda \frac{dT}{dr} = p_J \frac{r}{2}$ donc $j_{th}(R) = \frac{p_J R}{2}$

La puissance est $\Phi = p_J \pi R^2 \ell$ donc la densité de flux en surface $j_{th}(R) = \frac{\Phi}{2\pi R \ell} = \frac{p_J \pi R^2 \ell}{2\pi R \ell} = \frac{p_J R}{2}$

D'après la loi de Newton, $j_{th}(R) = h(T(R) - T_{ext})$

La continuité de $j_{th}(r)$ en $r=R$ implique $p_J \frac{R}{2} = h(T(R) - T_{ext})$

or $T(R) = -\frac{p_J}{\lambda} \frac{R^2}{4} + T_0$ donc $p_J \frac{R}{2} = h \left(-\frac{p_J}{\lambda} \frac{R^2}{4} + T_0 - T_{ext} \right)$

$\Rightarrow T_0 = T_{ext} + p_J \frac{R}{2h} + \frac{p_J}{\lambda} \frac{R^2}{4} \Rightarrow T_0 = T_{ext} + \frac{p_J R}{2h} \left(1 + \frac{Rh}{2\lambda} \right)$

43 - $T_0 \approx T_{ext} + \frac{p_J R}{2h}$ si $\frac{Rh}{2\lambda} \ll 1$ soit $R \ll \frac{2\lambda}{h} = \frac{2 \times 400}{10} = 80 \text{ m}$ $R = 2 \text{ mm} \ll 80 \text{ m}$, la condition est vérifiée.

NB : Cela revient physiquement à dire que le fil (excellent conducteur thermique de faible diamètre) est isotherme, soit $T(R) = T_0$ d'où la loi de Newton, $j_{th}(R) = h(T_0 - T_{ext}) = \frac{p_J R}{2}$.

44 - Le fil fond si $T_0 \geq T_{fus} \Rightarrow T_{ext} + \frac{p_J R}{2h} \geq T_{fus} \Rightarrow p_J \geq \frac{2h}{R} (T_{fus} - T_{ext})$

or $p_J = \frac{I^2}{\gamma \pi^2 R^4}$ donc $\frac{I^2}{\gamma \pi^2 R^4} \geq \frac{2h}{R} (T_{fus} - T_{ext}) \Rightarrow I \geq \pi \sqrt{2h\gamma R^3 (T_{fus} - T_{ext})}$

$I \geq \pi \sqrt{2 \times 10 \times 6.10^7 \times 8.10^{-9} \times (1065)} = \pi \sqrt{96 \times 1,065 \times 10^2}$ soit $I_{lim} \approx 320 \text{ A}$