

ONDES MECANIKES TRANSVERSALES

Programme ATS

14. Ondes	
Onde mécanique transversale	Établir l'équation de propagation dans le cas des ondes transversales d'une corde. Reconnaître le caractère progressif ou stationnaire d'une onde. Utiliser les conditions aux limites et identifier les modes propres d'une onde stationnaire.

I) PHENOMENE DE PROPAGATION

I)1) Définition

Expérience : propagation d'une perturbation le long d'une corde.

- Expérience : corde élastique plus ou moins tendue, propagation d'une perturbation.
- Simulateur : https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_fr.html

Photo à l'instant t :

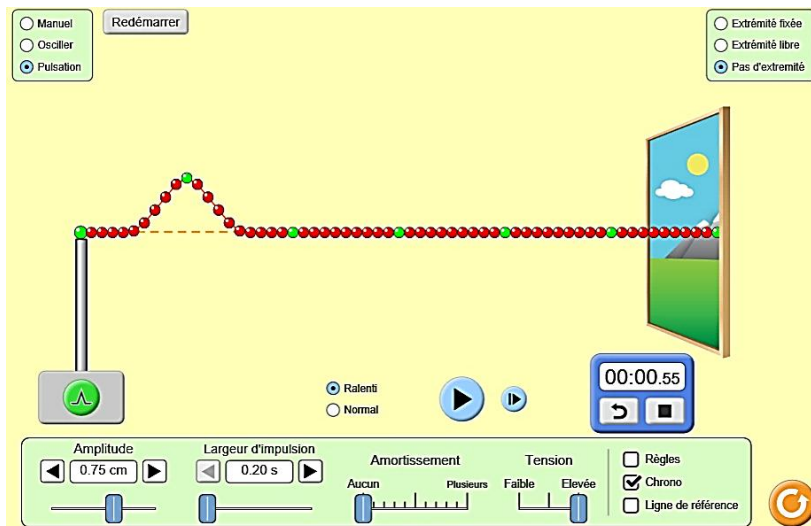
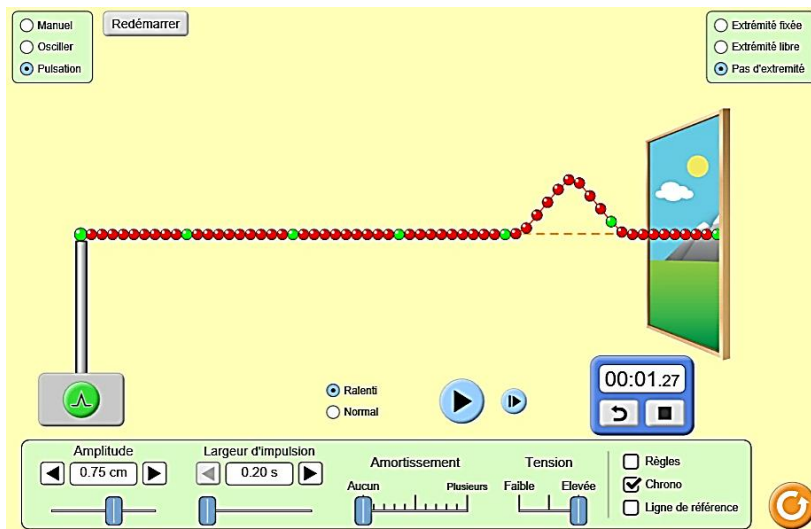


Photo à l'instant $t + \Delta t$:



Définition d'une onde : On appelle onde la propagation d'un signal (ou perturbation) de proche en proche sans qu'il y ait propagation de matière entre le lieu de production du signal et le lieu d'observation du signal

On appelle **célérité de l'onde** la **vitesse de propagation** de la perturbation ; elle ne dépend que du milieu de propagation.

Une onde est dite « mécanique » si elle a besoin d'un milieu matériel pour se propager.

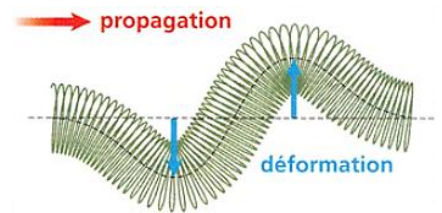
- Exemple d'onde mécanique : déformation le long d'une corde, houle, onde sismique

- Exemple d'onde non mécanique qui se propage dans le vide : onde électromagnétique.

On distingue ondes transversale et longitudinale :

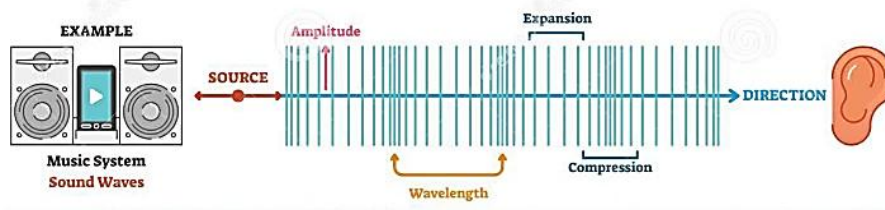
- Onde transversale** : la déformation est perpendiculaire à la direction de propagation,

Exemple : déformation sur une corde, houle,



- Onde longitudinale** : la déformation est parallèle à la direction de propagation,

Exemple : onde acoustique,



Quelques ordres de grandeurs de célérités d'ondes :

- Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
- Vitesse du son dans l'air : $c = 3,4 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1}$; dans l'eau : $c = 1,5 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$
- Houle : quelques m.s^{-1}

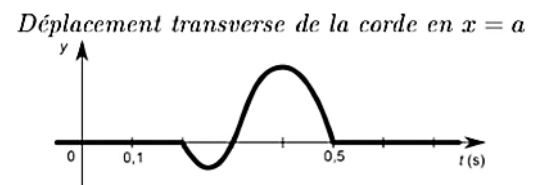
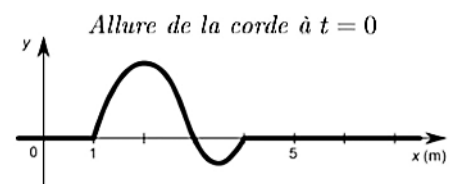
1)2) Modèle de l'onde progressive unidimensionnelle ou onde plane progressive

Une **onde plane progressive** est une onde qui se propage

Exemple d'onde plane progressive : déformation qui se propage le long d'une corde.

Représentation spatiale, type **photo** : on représente l'ensemble de la corde à un instant donné.

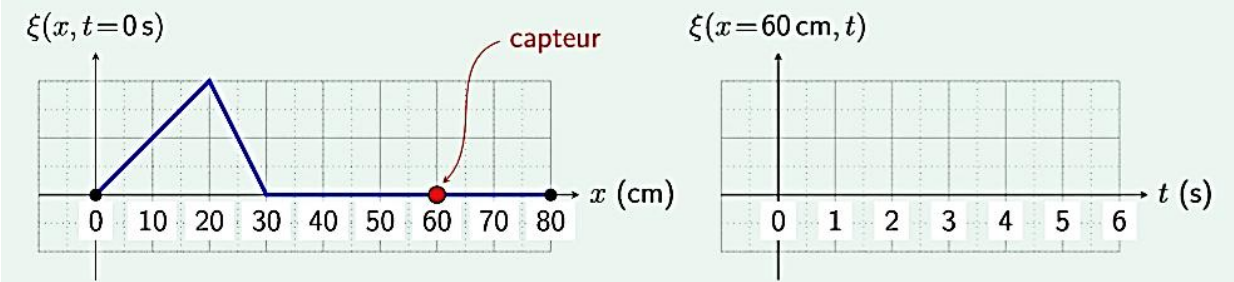
Représentation temporelle, type **chronogramme** : on représente l'évolution de la hauteur d'un point donné de la corde, enregistrée par exemple par un capteur.



Remarque :

Les représentations spatiales et temporelles apparaissent inversées l'une par rapport à l'autre.

La figure ci-dessous est la représentation spatiale d'une onde à l'instant $t = 0$. Cette onde se propage dans le sens des x croissants à la célérité $c = 20 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Un capteur est situé en $x = 60 \text{ cm}$. Compléter le chronogramme du signal reçu par le capteur.



I)3) Modèle mathématique de l'onde plane progressive

Une **onde plane progressive** se propageant à la célérité c **dans le sens des x croissants** se modélise mathématiquement sous la forme :

Remarque : dans l'expression mathématique d'une onde progressive, **les variables de temps t et d'espace x sont couplées.**

Une **onde plane progressive** se propageant à la célérité c **dans le sens des x décroissants** se modélise mathématiquement sous la forme :

Deuxième écriture de l'onde progressive :

Une **onde plane progressive** se propageant à la célérité c **dans le sens des x croissants** peut aussi s'écrire mathématiquement sous la forme :

Une **onde plane progressive** se propageant à la célérité c **dans le sens des x décroissants** peut aussi s'écrire mathématiquement sous la forme :

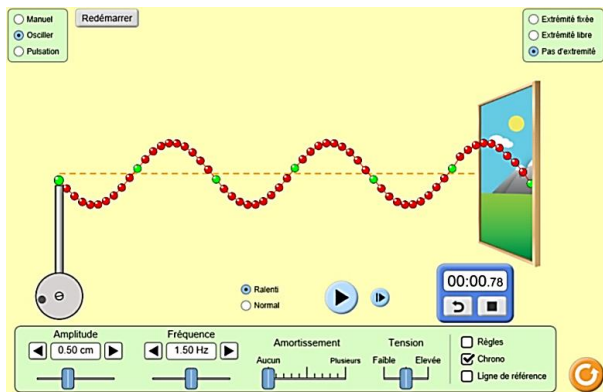
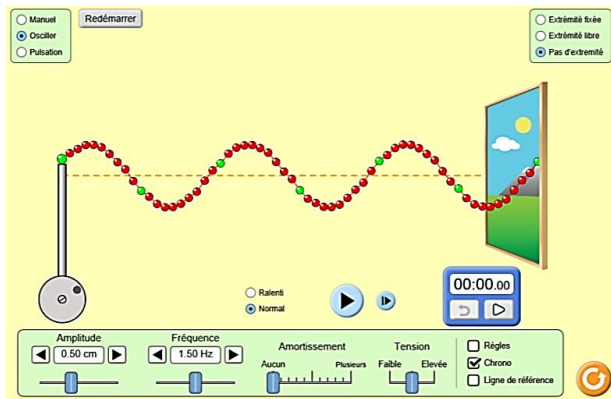
I)4) Onde progressive sinusoïdale ou harmonique

Une **Onde Progressive Harmonique (OPH)** est une onde progressive telle que le signal associé, mesuré en n'importe quel point, est sinusoïdal et de pulsation indépendante du point choisi.

Dans ce cas, les fonctions F , G , f et g définies précédemment sont des fonctions sinusoïdales.

Une **Onde Progressive Harmonique OPH** y de pulsation ω se propageant à la célérité c dans la direction x est modélisée mathématiquement par :

Simulateur : https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_fr.html



En mettant $y(x, t)$ sous la forme $f(t \pm \frac{x}{c})$:

$$y(x, t) = Y_m \cos [\omega t \pm kx + \varphi] = Y_m \cos [\omega(t \pm \frac{k}{\omega}x) + \varphi] = f(t \pm \frac{x}{c})$$

On identifie : $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$ d'où : $c = \frac{\omega}{k}$ ou $k = \frac{\omega}{c}$ **Relation de dispersion**

L'OPH $Y_m \cos [\omega t \pm kx + \varphi]$ est une fonction « doublement sinusoïdale » :

- A x fixé, elle est une fonction sinusoïdale de t (représentation temporelle = chronogramme), de **pulsation temporelle ω** .
- A t fixé, elle est une fonction sinusoïdale de x (représentation spatiale = photo), de **pulsation spatiale k** .

L'OPH possède donc une **double périodicité**, spatiale et temporelle.

	Pulsation	Fréquence	Période
Temporel			
Spatial			

La période spatiale λ est appelée

On s'intéresse maintenant au **déphasage** induit par la propagation.

Application

Une Onde Progressive Harmonique se propage suivant les x croissants. Elle est définie par la fonction :

$$y(x, t) = Y_m \cos [\omega t - kx + \varphi]$$

Deux capteurs placés à 2 positions x_1 et $x_2 > x_1$ enregistrent 2 signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.

- Exprimer les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.
- Identifier leur phase à l'origine, en déduire le déphasage $\Delta\varphi_{2/1}$ et l'exprimer en fonction de λ .
- Etablir une condition sur x_1 , x_2 et λ pour que les signaux soient en phase. Même question pour l'opposition de phase.

II) EQUATION DE PROPAGATION D'UNE ONDE TRANSVERSALE SUR UNE CORDE

On s'intéresse à la propagation d'une onde sur une corde « idéale », supposée :

- **Inextensible** (aucune élasticité)
- **Sans raideur** (infiniment souple) ;
- **Homogène**, de masse linéique μ (masse par unité de longueur de la corde) ;
- **Tendue horizontalement** avec une force constante F_0 et **excitée verticalement** à son extrémité A.

Le **poids de la corde est négligé** devant la tension de la corde (hypothèse valable pour une corde bien tendue), de telle sorte qu'**à l'équilibre elle est horizontale**.

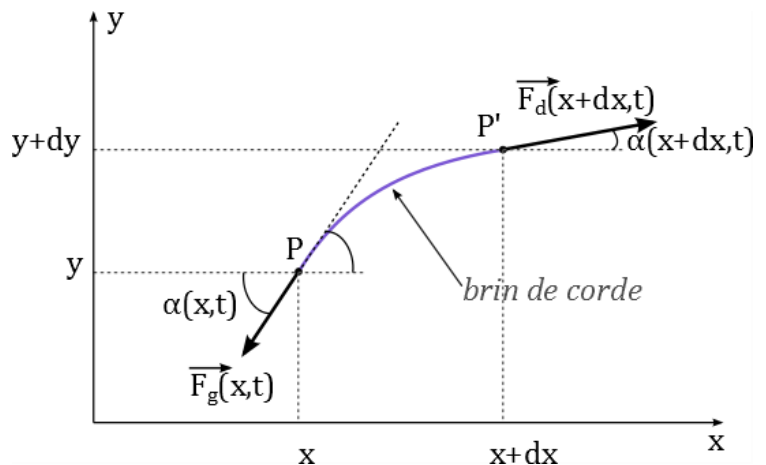
Soit $x'x$ la position de repos de la corde.

Un point P de la corde est repéré par son abscisse x (fixe) et son ordonnée y , susceptible de varier au cours du temps. **La déformation du milieu est caractérisée par la fonction :** $y(x, t)$.

Etude des petits mouvements au voisinage de cet équilibre selon le modèle suivant :

- On **néglige tout amortissement** ;

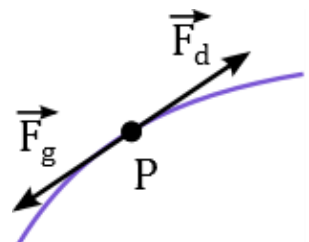
- L'élément de corde situé au point $P_0(x, y = 0)$ à l'équilibre se trouve à un instant t quelconque de la propagation au point $P(x, y(x, t))$, c'est-à-dire qu'on néglige son déplacement selon (Ox) . Les **déplacements** des points de la corde sont alors dits **transversaux** (ici car le déplacement de la corde se fait dans la direction (Oy) verticale perpendiculaire à la direction de propagation (Ox) horizontale de l'onde).



- On ne considère que des **déplacements de faible amplitude**. En notant $\alpha(x, t)$ l'angle que fait la tangente à la corde en P avec l'horizontale, les mouvements étant de faible amplitude, α est faible et on limite son développement limité à l'ordre 1 :

- L'hypothèse d'une **corde sans raideur** (infiniment souple) implique que si on considère un point d'abscisse x de la corde, l'action exercée par la partie gauche de la corde sur la partie droite se réduit à une force tangente à la corde et opposée à l'action exercée par la partie droite sur la partie gauche.

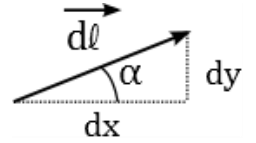
Si on note $\vec{F}$ la tension de la corde orientée de gauche à droite, on peut écrire, en un point P , à la date t :



II)1) Détermination de l'équation de propagation

- **Système étudié** : Brin de corde compris entre les points P et P' , soit entre les abscisses x et $x + dx$, de longueur élémentaire $d\ell$ et de masse dm .

On a :



- **Bilan des forces exercées sur le système** :

Tension du reste de la corde côté gauche :

Tension du reste de la corde côté droit,

- Le poids de la corde est négligé.

- **Relation fondamentale de la dynamique** (seconde loi de Newton) dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

En coordonnées cartésiennes, l'accélération $\vec{a}$ s'écrit dans le cas général :

- Projection sur Ox de vecteur unitaire $\vec{u}_x$

Le mouvement étant par hypothèse considéré transversal (mouvement vertical seulement, pas de mouvement selon $\vec{u}_x$) :

Projection de la relation issue du principe fondamental de la dynamique :

soit dans l'approximation des petits angles, en limitant les calculs à l'ordre 1 (soit $\cos(\alpha) \approx 1$) :

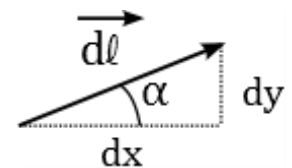
La tension du fil est uniforme (indépendante de la position x le long de la corde).

La condition aux limites imposée au bout de la corde par l'opérateur qui la tend impose $F(x, t) = F_0$, de telle sorte que cette tension **ne dépend pas non plus du temps.**

$F(x, t) = F_0$, indépendante de x et t

- Projection sur Oy de vecteur unitaire $\vec{u}_y$

Dans l'approximation des petits angles, en limitant les calculs à l'ordre 1 (soit $\sin(\alpha) \approx \alpha$) :



En remarquant que $\alpha \approx \tan \alpha \approx \frac{\partial y}{\partial x}$ est la pente de la corde, on a $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

Et on obtient une équation qui régit l'évolution de la déformation de la corde $y(x, t)$:

Equation d'onde de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

II)2) Remarques et commentaires

- Vérification de l'homogénéité

Célérité de l'onde : $c = \sqrt{\frac{F_0}{\mu}}$. en $m.s^{-1}$.

La célérité c augmente avec la tension de la corde, et diminue lorsque la masse linéique de la corde augmente.

III) INTERFERENCES ENTRE 2 ONDES DE MEME FREQUENCE

III)1) Principe de superposition

Dans un milieu au comportement linéaire, l'onde résultant de la présence de 2 ondes, au même point M , et au même instant t , est la somme de ces 2 ondes :

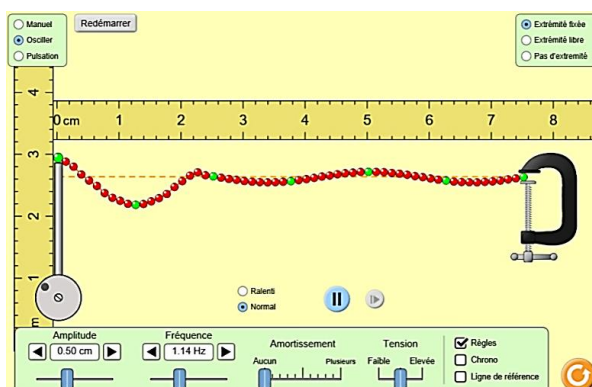
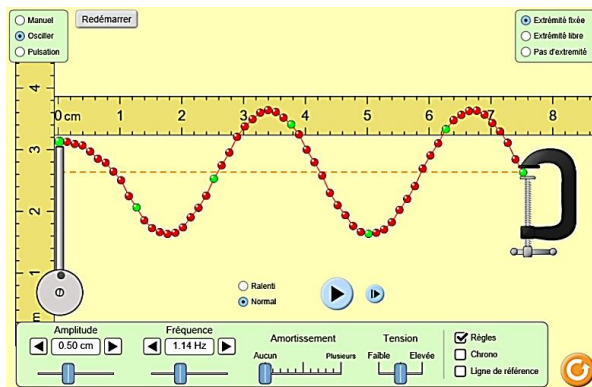
$$y_{tot}(M, t) = y_1(M, t) + y_2(M, t)$$

III)2) Interférences entre 2 ondes de même fréquence

Dans l'expérience ci-dessous :

- Une onde $y_1(x, t)$ est émise par le vibreur à gauche, elle se propage vers la droite ;
- Par phénomène de réflexion, une onde $y_2(x, t)$ **de même fréquence** est émise par l'extrémité fixée à droite, elle se propage vers la gauche.

L'amplitude de l'onde résultante peut être supérieure à l'amplitude de chaque onde : on dit qu'il y a **interférences**.



Le phénomène d'interférences est caractéristique d'un phénomène ondulatoire : tous les types d'ondes donnent lieu à des interférences.

III)3) Modélisation

On considère 2 OPH de même fréquence f , de même amplitude A , et de même phase à l'origine $\varphi = 0$, émises par 2 sources S_1 et S_2 placées à 2 endroits distincts.

On étudie les interférences entre ces 2 ondes en un point M quelconque de l'espace, situé à des distances d_1 de S_1 et d_2 de S_2 .

Schéma :

Au point, les 2 signaux résultant s'écrivent :

Le signal résultant $s(t)$ possède les caractéristiques suivantes :

- Pulsation : ω identique à celle des 2 ondes
- Fréquence : f identique à celle des 2 ondes
- Période : T identique à celle des 2 ondes
- Amplitude :

$$A_{tot} = 2A \cos\left[k\left(\frac{d_2 - d_1}{2}\right)\right]$$

Remarque 1 : $A_{tot} \neq A + A$

Remarque 2 : L'expression fait apparaître le déphasage $\Delta\varphi_{1/2}$ entre les 2 signaux.

On peut écrire : $A_{tot} = 2A \cos\left(\frac{\Delta\varphi_{1/2}}{2}\right)$ avec : $\Delta\varphi_{1/2} = k(d_2 - d_1)$

Ce déphasage $\Delta\varphi_{1/2} = k(d_2 - d_1)$ est lié à la différence de chemin parcouru par les 2 ondes, appelée **différence de marche**.

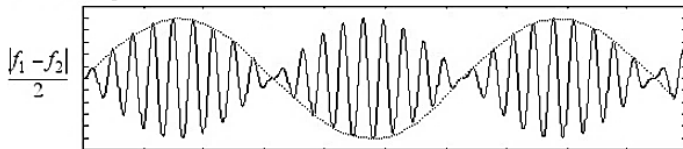
Conditions d'interférences parfaitement constructives :

Conditions d'interférences parfaitement destructives :

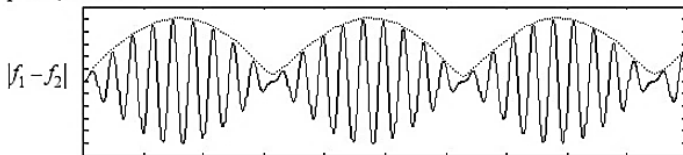
Remarque 1 : si les 2 ondes n'ont pas la même amplitude, le phénomène d'interférences existe mais il n'y a pas d'interférences parfaitement destructrices => notion de **contraste**.

Remarque 2 : si les ondes n'ont pas la même fréquence, l'amplitude de l'onde résultante varie au cours du temps => phénomène de **battements**.

mathématiquement

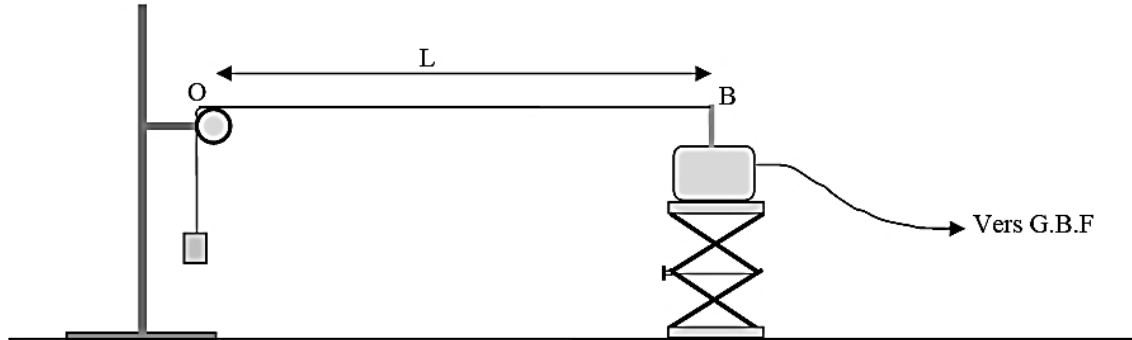


perceptivement



IV) ONDES STATIONNAIRES

IV)1) Expérience de la corde de Melde



L'alimentation du vibreur par GBF + amplificateur permet de faire varier la fréquence d'excitation du système.

Observations :

- On ne voit pas d'onde se propager
- A certaines fréquences (de résonance) :
 - L'amplitude du mouvement de la corde devient importante,
 - Il y a apparition d'un motif stationnaire en fuseaux.

IV)2) Modélisation d'une onde stationnaire

Dans l'expérience précédente, l'onde incidente émise par le vibreur est partiellement transmise, partiellement réfléchi, lorsqu'elle atteint l'extrémité de la corde (car il y a discontinuité du milieu de propagation),

L'onde dans le milieu incident est alors la **superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchi**.

Forme mathématique de l'onde incidente :

$$y_1(x, t) = Y_m \cos [\omega t - kx + \varphi_1]$$

Forme mathématique de l'onde réfléchi :

$$y_2(x, t) = Y_m \cos [\omega t + kx + \varphi_2]$$

Forme mathématique de l'onde résultante :

Forme mathématique générale d'une **Onde Stationnaire Harmonique (OSH)** :

$$y(x, t) = Y_m \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

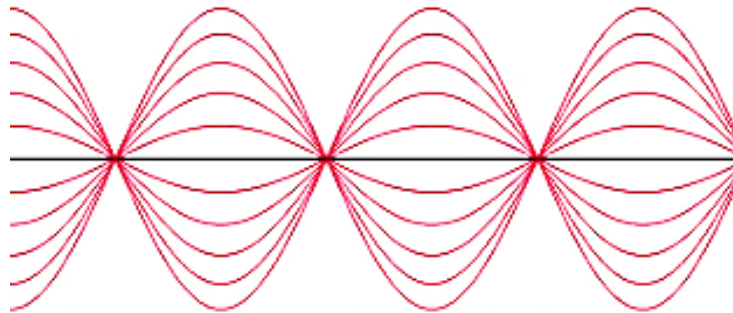
Pour une Onde Stationnaire Harmonique (OSH), les termes dépendant du temps $\cos(\omega t + \varphi)$ et de l'espace $\cos(kx + \psi)$ sont **découplés**, contrairement à l'OPH.

Le terme $Y_m \cos(kx + \psi)$ représente l'amplitude de vibration locale en x .

IV)3) Ventres et nœuds de vibrations

Ventres de vibration : points où l'**amplitude** de vibration est toujours **maximale**.

Nœuds de vibration : points où l'**amplitude** de vibration est toujours **nulle**.



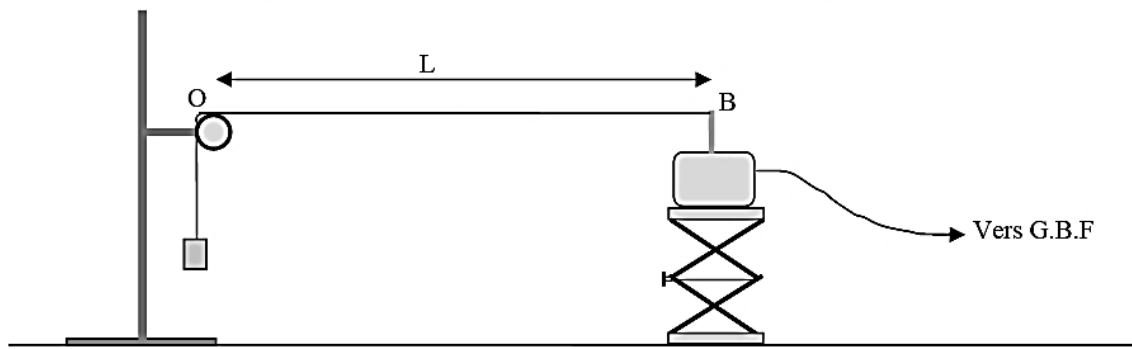
Exercice

Soit une onde stationnaire modélisée par la fonction suivante :

$$y(x, t) = A \cos(\omega t) \cos(kx)$$

- 1) Définir l'amplitude locale de vibration $A(x)$.
- 2) En déduire la position des ventres de vibration en fonction de la longueur d'onde λ et d'un nombre entier n . Quelle distance sépare 2 ventres ?
- 3) Même question pour les nœuds de vibration. Quelle distance sépare 2 nœuds ?
- 4) Quelle distance sépare un ventre et un nœud ?

IV)4) Modes propres



Hypothèse : la corde est soumise à une onde stationnaire d'écriture mathématique :

$$y(x,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

On définit les **conditions aux limites (CL)** :

- L'amplitude de vibration est nulle au niveau de la poulie en O : le point d'abscisse $x = L$ est un nœud :
- L'amplitude de vibration est négligeable au niveau du vibreur en B : le point d'abscisse $x = 0$ est un nœud :

Conséquences :

Pour la corde le Melde, les **modes propres** N sont quantifiés par un entier N positif :

Leurs fréquences f_N valent : $f_N = \frac{N.c}{2L}$

Leurs longueurs d'onde λ_N sont telles que : $L = \frac{N.\lambda_N}{2}$

Ils s'écrivent mathématiquement :

$$y_N(x, t) = A \cos(\omega_N t + \varphi_N) \cos(k_N x + \psi_N) \quad \text{ou :}$$

$$y_N(x, t) = A \cos\left(\frac{N.\pi.c}{L} t + \varphi_N\right) \cos\left(\frac{N.\pi}{L} x + \frac{\pi}{2}\right)$$

La corde de Melde entre en **résonance** lorsque la fréquence d'excitation imposée par le vibreur est égale à une de ses fréquences propres.

IV)5) Mouvement général d'une corde fixée à ses extrémités

On enlève le vibreur et on pince la corde (corde de guitare par exemple).

- ⇒ Aucune fréquence propre n'est privilégiée,
- ⇒ La corde vibre suivant toutes ses fréquences,
- ⇒ L'onde n'est plus une OSH mais une superposition d'OSH

Le mouvement le plus général d'une corde de longueur L , fixée à ses extrémités, est une superposition de tous ses modes propres :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{N.\pi.c}{L} t + \varphi_N\right) \cos\left(\frac{N.\pi}{L} x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Superposition des différents modes :

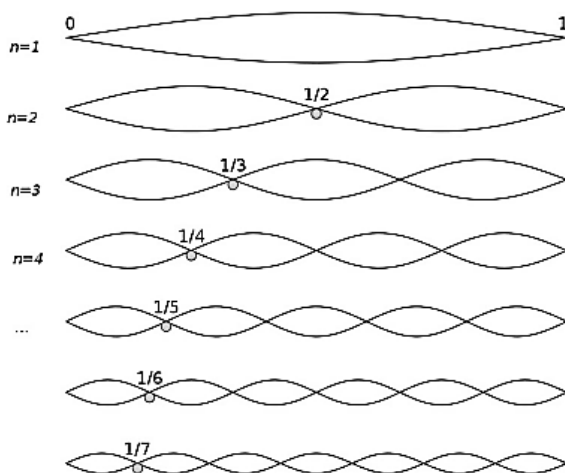


FIG. 4.5 – Harmoniques de la corde vibrante.