

CPGE ATS

Programme de colles – Semaine 21 (24 au 29 mars 2025)

Chapitres étudiés et questions de cours :

EM2 : Magnétostatique du vide et conduction électrique

M6 : Ondes mécaniques transversales (début) : ondes progressives uniquement

Réponses attendues en bleu ou manuscrit.

1^{ère} question de cours : questions 1 à 12

2^{ème} question de cours : questions 13 à 17

1) Définir le vecteur densité de courant \vec{j} et l'intensité du courant I .

Dans un milieu conducteur de l'électricité, le déplacement des charges électriques peut être traduit par le **vecteur densité de courant** \vec{j} .

$$\vec{j} = \rho_l \cdot \vec{v} = n^* \cdot q \cdot \vec{v}$$

\vec{j} : vecteur densité de courant (C.m⁻².s⁻¹ ou A.m⁻²)

ρ_l : densité volumique de charges libres (C.m⁻³)

\vec{v} : vitesse moyenne de déplacement des charges (m.s⁻¹)

n^* : nombre de porteurs de charges par unité de volume (m⁻³)

q : charge de chaque porteur de charge (C)

L'**intensité du courant** électrique I est définie comme le flux de \vec{j} à travers une surface (section) S du conducteur mais aussi comme le débit de charges électriques :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \frac{dq}{dt}$$

I : Intensité du courant électrique (A)

q : Charge électrique (C)

2) Enoncer les règles de symétrie de la distribution de courant et du champ magnétostatique \vec{B} .

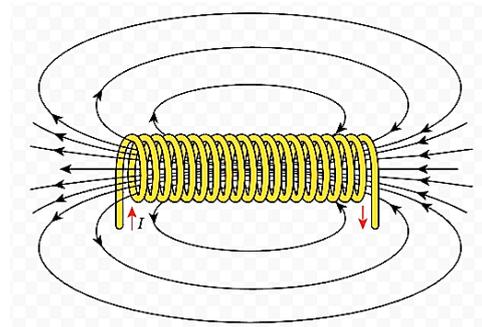
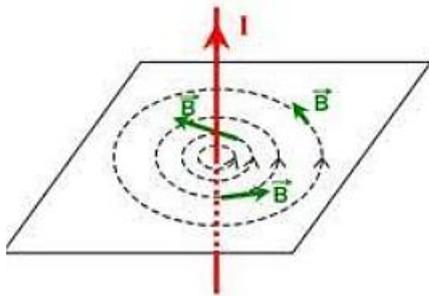
Tout plan de symétrie Π pour les courants est un plan d'antisymétrie pour le champ magnétostatique \vec{B} .

Remarque : Pour tout point M appartenant à un plan de symétrie des courants, le champ \vec{B} est perpendiculaire à ce plan.

Tout plan d'antisymétrie Π^* pour les courants (plan qui transforme les courants en leurs opposés) est un plan de symétrie pour le champ magnétostatique \vec{B} .

Remarque : Pour tout point M appartenant à un plan d'antisymétrie des courants, le champ \vec{B} est contenu dans ce plan.

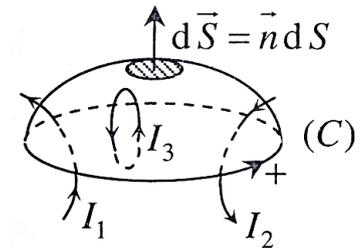
- 3) Dessiner et orienter les lignes de champ magnétostatique \vec{B} dans les cas suivants :
 Fil infini traversé par un courant I ; bobine longue traversée par un courant I .



- 4) Enoncer le Théorème d'Ampère.

Théorème d'Ampère (forme intégrale) :

La circulation du champ magnétostatique le long d'un contour (C) fermé et orienté est égale au produit de μ_0 par l'intensité I_e enlacée, intensité qui traverse une surface S orientée s'appuyant sur (C).



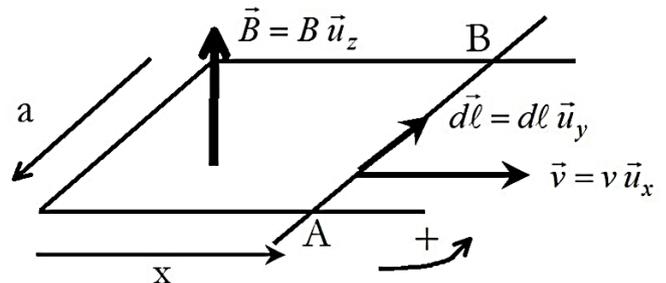
$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_e \text{ avec } I_e = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

μ_0 : perméabilité magnétique du vide

- 5) Donner la définition de la force de Laplace.

Un élément filiforme de longueur dl parcouru par un courant d'intensité i et placé dans un champ magnétostatique \vec{B} subit la force de Laplace élémentaire suivante :

$$d\vec{F}_L = i \cdot d\vec{l} \wedge \vec{B}$$



Par intégration :

$$\vec{F}_L = \int_l i \cdot d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Exemple sur la tige AB ci-contre (Rail de Laplace) :

$$\vec{F}_L = i \int_{AB} d\vec{l} \wedge \vec{B} = i \cdot \vec{AB} \wedge \vec{B} = i \cdot l \cdot B \cdot \vec{u}_x$$

6) Donner l'équation de conservation de la charge.

Equation de conservation de la charge, ou équation de continuité :

$$\text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho_l}{\partial t} = 0$$

\vec{j} : densité de courant (A.m⁻²)

ρ_l : densité volumique de charges libres (C.m⁻³)

7) Donner la loi d'ohm sous forme locale.

Loi d'ohm locale dans un milieu conducteur : $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$

\vec{E} : champ électrique (V.m⁻¹)

\vec{j} : densité de courant (A.m⁻²)

σ : conductivité électrique (Ω⁻¹.m⁻¹)

8) Donner les 4 équations de Maxwell.

Equation	Statique Présence de sources	Remarques	Variable Quelconque Présence de sources
Maxwell Gauss $\text{div} \vec{E} =$	$\frac{\rho}{\epsilon_0}$	Forme locale du théorème de Gauss $\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	$\frac{\rho}{\epsilon_0}$
Maxwell Faraday $\text{rot} \vec{E} =$	$\vec{0}$	La circulation du champ électrostatique est conservative	$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell Thomson ou Maxwell Flux $\text{div} \vec{B} =$	0	Le champ magnétique est à flux conservatif	0

Maxwell Ampère $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} =$	$\mu_0\vec{J}$	Forme locale du théorème d' Ampère $\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_e$	$\mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
---	----------------	--	--

9) Donner le modèle mathématique d'une onde plane progressive se propageant à la célérité c dans le sens des x croissants.

$$y(x, t) = F(x - ct) \quad \text{avec } F \text{ fonction quelconque}$$

Pour $t = 0$, $y(x, 0) = F(x)$

La fonction F correspond à la représentation spatiale à $t = 0$.

Autre expression :

$$y(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \text{avec } f \text{ fonction quelconque}$$

Pour $x = 0$, $y(0, t) = f(t)$

La fonction f correspond à la représentation temporelle en $x = 0$.

10) Donner le modèle mathématique d'une onde plane progressive se propageant à la célérité c dans le sens des x décroissants.

$$y(x, t) = G(x + ct) \quad \text{avec } G \text{ fonction quelconque}$$

Pour $t = 0$, $y(x, 0) = G(x)$

La fonction G correspond à la représentation spatiale à $t = 0$.

Autre expression :

$$y(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad \text{avec } g \text{ fonction quelconque}$$

Pour $x = 0$, $y(0, t) = g(t)$

La fonction g correspond à la représentation temporelle en $x = 0$.

11) Donner le modèle mathématique d'une Onde Progressive Harmonique OPH y de pulsation ω se propageant à la célérité c dans la direction x . Définir les différents termes.

$$y(x, t) = Y_m \cos(\omega t \pm kx + \varphi)$$

$Y_m > 0$ est l'amplitude de l'onde

$\omega > 0$ est la pulsation de l'onde (rad.s⁻¹)

$k > 0$ est la norme du vecteur d'onde (rad.m⁻¹)

φ est la phase à l'origine (rad)

12) Donner les caractéristiques de la « double périodicité » de l'OPH $y(x, t) = Y_m \cos [\omega t \pm kx + \varphi]$.

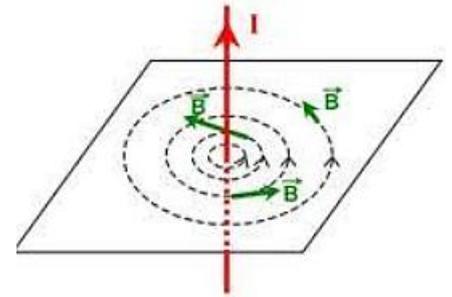
L'OPH $Y_m \cos [\omega t \pm kx + \varphi]$ est une fonction « doublement sinusoïdale » :

- A x fixé, elle est une fonction sinusoïdale de t (représentation temporelle = chronogramme), de **pulsation temporelle ω** .
- A t fixé, elle est une fonction sinusoïdale de x (représentation spatiale = photo), de **pulsation spatiale k** .

L'OPH possède donc une **double périodicité**, spatiale et temporelle.

	Pulsation	Fréquence	Période
Temporel	ω	f	T
Spatial	$k = \frac{\omega}{c}$	$\sigma = \frac{f}{c}$	$\lambda = \frac{c}{f} = cT$

13) Cas du fil infini parcouru par un courant d'intensité I :
 Déterminer le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ dans tout
 l'espace par utilisation du théorème d'Ampère.



Symétries de la distribution de courants I (antisymétries du champ \vec{B}) : Plan passant par M et contenant Oz

$\Rightarrow \vec{B}(M)$ perpendiculaire à ce plan donc suivant \vec{e}_θ

Antisymétries de la distribution de courants I (symétries du champ \vec{B}) : Plan passant par M et perpendiculaire à Oz

Invariances : Invariance par translation suivant l'axe z , invariance par rotation suivant θ .

$\Rightarrow \vec{B}(M)$ ne dépend ni de z ni de θ

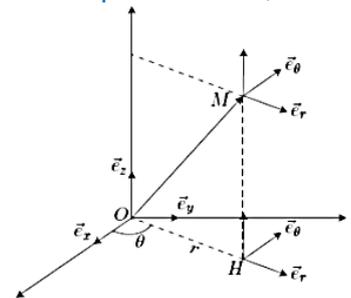
$\Rightarrow \vec{B}(M) = \vec{B}(r)$

Conclusion des symétries et invariances : $\vec{B}(M) = B(r) \cdot \vec{e}_\theta$; lignes de champ circulaires, autour de z ; \vec{B} « ortho radial ».

Contour d'Ampère orienté : Cercle d'axe Oz et de rayon r

$\Rightarrow \vec{B}$ tangent au cercle

$\Rightarrow \|\vec{B}\|$ constant (uniforme) sur tout le cercle



Théorème d'Ampère :

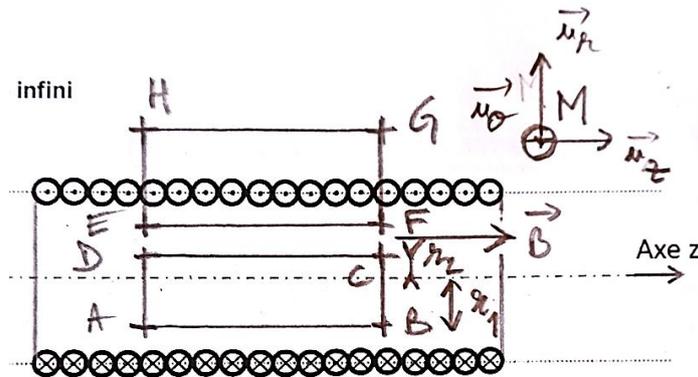
$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{(C)} B(r) \cdot \vec{e}_\theta \cdot dl \cdot \vec{e}_\theta = \oint_{(C)} B(r) \cdot dl = B(r) \oint_{(C)} dl = B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot I$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} \quad \text{Unités : T, A, m}$$

Conclusion :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \quad \vec{B}(M) \text{ orthoradial}$$

14) Cas du fil solénoïde infini parcouru par un courant d'intensité I : Déterminer le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ dans tout l'espace par utilisation du théorème d'Ampère.



Nombre de spires par unité de longueur : $n = \frac{N}{L}$

Hypothèses : L « infinie » ; enroulement hélicoïdal \Rightarrow les spires peuvent être considérées comme circulaires

Symétries : Tout plan $\Pi (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

$\Rightarrow \vec{B}(M) \perp \Pi$ donc $\vec{B}(M)$ suivant z : $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \cdot \vec{u}_z$ pour tout point M

Antisymétries : Tout plan $\Pi^* (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$

Invariances : Par translation suivant z , par rotation suivant θ

Conclusion : $\vec{B}(M)$ ne dépend ni de r ni de θ : $\vec{B}(M) = B(r) \cdot \vec{u}_z$ pour tout point M

Hypothèse : $\vec{B} = \vec{0}$ à l'extérieur du solénoïde

- Contour d'Ampère orienté ABCD à l'intérieur du solénoïde, contenu dans le plan contenant l'axe du solénoïde $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r_1) \cdot AB + 0 - B(r_2) \cdot CD + 0 = \mu_0 \cdot 0 = 0 \text{ (pas de contour enlacé)}$$

Conclusion : $B(r_1) = B(r_2) = B_{int}$; **Champ uniforme à l'intérieur du solénoïde**

- Contour d'Ampère orienté EFGH, contenu dans le plan contenant l'axe du solénoïde $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{EF} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{FG} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{GH} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{HE} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{EF} \vec{B}_{int} \cdot d\vec{l} = B_{int} \cdot EF = \mu_0 \cdot n \cdot EF \cdot I$$

d'où : $B_{int} = \mu_0 \cdot n \cdot I$

Conclusion : $\vec{B}_{int} = \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot \vec{u}_z$ à l'intérieur du solénoïde

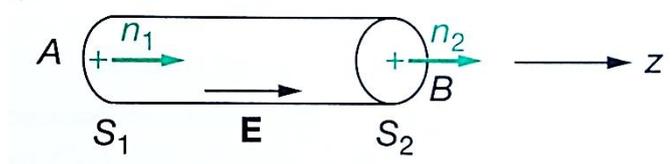
15) Passer de la loi d'ohm sous forme locale à la loi d'ohm sous forme intégrale.

$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$ avec champ électrique \vec{E} uniforme

$$\text{Or : } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} = -\frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z = -\frac{dV}{dz} \vec{u}_z = -\frac{\Delta V}{\Delta z} \vec{u}_z = -\frac{V(B)-V(A)}{L} \vec{u}_z$$

$$\text{D'où : } E = -\frac{V(B)-V(A)}{L} = \frac{V(A)-V(B)}{L}$$

$$\text{On obtient : } I = jS = \sigma ES = \sigma \frac{V(A)-V(B)}{L} S = \frac{\Delta U}{R}$$



Avec :

$$R = \frac{\Delta U}{I} = \frac{L}{\sigma S}$$

R : résistance électrique (Ω)

σ : conductivité électrique ($\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$)

L : longueur du conducteur (m)

S : section du conducteur (m^2)

16) Une Onde Progressive Harmonique se propage suivant les x croissants. Elle est définie par la fonction :

$$y(x, t) = Y_m \cos [\omega t - kx + \varphi]$$

Deux capteurs placés à 2 positions x_1 et $x_2 > x_1$ enregistrent 2 signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.

- Exprimer les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.
- Identifier leur phase à l'origine, en déduire le déphasage $\Delta\varphi_{2/1}$ et l'exprimer en fonction de λ .
- Etablir une condition sur x_1 , x_2 et λ pour que les signaux soient en phase. Même question pour l'opposition de phase.

$$s_1(t) = Y_m \cos [\omega t - kx_1 + \varphi] \quad \text{Phase a l'origine : } \varphi_1 = -kx_1 + \varphi$$

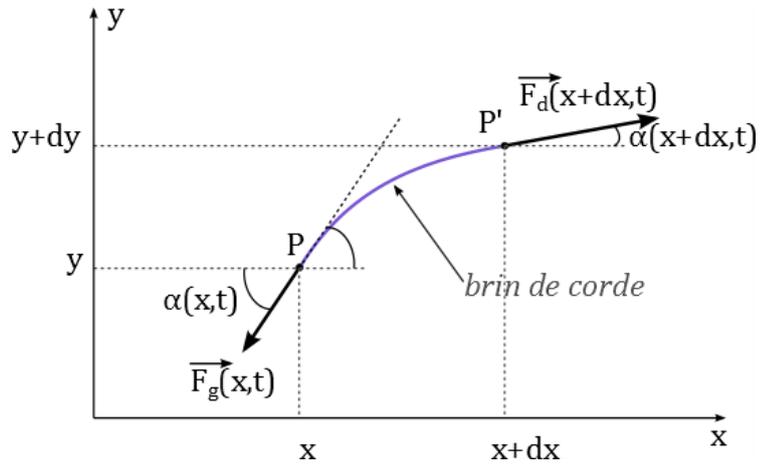
$$s_2(t) = Y_m \cos [\omega t - kx_2 + \varphi] \quad \text{Phase a l'origine : } \varphi_2 = -kx_2 + \varphi$$

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{2/1} &= \varphi_2 - \varphi_1 = -kx_2 + \varphi + kx_1 - \varphi = -k(x_2 - x_1) = -\frac{\omega}{c}(x_2 - x_1) = -\frac{2\pi}{cT}(x_2 - x_1) \\ &= -\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Signaux en phase : $\Delta\varphi_{2/1} = 2n\pi$ ou $-\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = 2n\pi$, on obtient : $x_1 - x_2 = n\lambda$

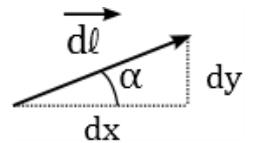
Signaux en opposition de phase : $\Delta\varphi_{2/1} = 2(n+1)\pi$, on obtient : $x_1 - x_2 = \frac{2n+1}{2}\lambda$

17) Etablir l'équation de propagation d'une onde transversale sur une corde inextensible, sans raideur, homogène et tendue horizontalement.



Système étudié : Brin de corde compris entre les points P et P' , soit entre les abscisses x et $x + dx$, de longueur élémentaire $d\ell$ et de masse dm .

On a : $dx = d\ell \cos\alpha \approx d\ell$ (avec $\alpha \ll 1$), et $dm = \mu d\ell$ soit $dm \approx \mu dx$



Bilan des forces exercées sur le système :

- Tension du reste de la corde côté gauche : $\vec{F}_g(x, t) = -\vec{F}(x, t)$, en x
- Tension du reste de la corde côté droit, $\vec{F}_d(x + dx, t) = +\vec{F}(x + dx, t)$ en $x + dx$
- Le poids de la corde est négligé.

Relation fondamentale de la dynamique (seconde loi de Newton) dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

$$dm \vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_d$$

soit, avec $dm = \mu dx$

$$\mu dx \vec{a} = -\vec{F}(x, t) + \vec{F}(x + dx, t)$$

En coordonnées cartésiennes, l'accélération \vec{a} s'écrit dans le cas général :

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \vec{u}_x + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \vec{u}_z$$

Projection sur Ox de vecteur unitaire \vec{u}_x

Le mouvement étant par hypothèse considéré transversal (mouvement vertical seulement, pas de mouvement selon \vec{u}_x) :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$$

Projection de la relation issue du principe fondamental de la dynamique :

$$0 = -F(x, t) \cos(\alpha(x, t)) + F(x + dx, t) \cos(\alpha(x + dx, t))$$

soit dans l'approximation des petits angles, en limitant les calculs à l'ordre 1 (soit $\cos(\alpha) \approx 1$) :

$$0 = -F(x, t) + F(x + dx, t)$$

$$F(x, t) = F(x + dx, t)$$

La tension du fil est uniforme (indépendante de la position x le long de la corde).

$F(x, t) = F_0$, indépendante de x et t

Projection sur Oy de vecteur unitaire \vec{u}_y

$$\mu dx \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -F(x, t) \sin(\alpha(x, t)) + F(x + dx, t) \sin(\alpha(x + dx, t))$$

Soit avec $F(x, t) = F(x + dx, t) = F_0$

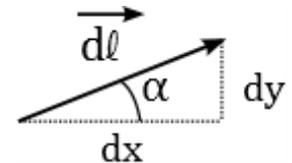
$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -F_0 \sin(\alpha(x, t)) + F_0 \sin(\alpha(x + dx, t))$$

Dans l'approximation des petits angles, en limitant les calculs à l'ordre 1 (soit $\sin(\alpha) \approx \alpha$) :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -F_0 \alpha(x, t) + F_0 \alpha(x + dx, t) = F_0 [\alpha(x + dx, t) - \alpha(x, t)]$$

Or $\alpha(x + dx, t) - \alpha(x, t) = \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$

D'où $\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$, soit $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x}$



En remarquant que $\alpha \approx \tan \alpha \approx \frac{\partial y}{\partial x}$ est la pente de la corde, on a

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Et on obtient une équation qui régit l'évolution de la déformation de la corde $y(x, t)$:

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Equation d'onde de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Célérité de l'onde : $c = \sqrt{\frac{F_0}{\mu}}$ en $m \cdot s^{-1}$.

Puis : de 1 à 2 exercices proposés par le colleur.

Programme ATS

5. Conduction électrique	
Courant dans un conducteur	<p>Définir le vecteur densité de courant. Établir l'équation de conservation de la charge à une dimension en régime variable. Énoncer sa généralisation à trois dimensions puis expliquer que le vecteur densité de courant est à flux conservatif en régime stationnaire. Énoncer la loi d'Ohm locale. Expliquer l'effet Joule, définir la résistance électrique dans un conducteur et présenter le lien avec la conduction thermique en régime stationnaire. Exprimer la condition d'application de l'ARQS en fonction de la taille du circuit et de la fréquence des signaux.</p>
6. Magnétostatique du vide	
Effets magnétiques d'un courant de charges	<p>Décrire un dispositif permettant de réaliser un champ magnétique quasi uniforme. Citer des ordres de grandeur de champs magnétiques : au voisinage d'aimants, dans une machine électrique, dans un appareil d'IRM, dans le cas du champ magnétique terrestre. Définir la notion de ligne de champ magnétostatique. Énoncer la relation donnant la force de Laplace s'exerçant sur un élément de circuit filiforme parcouru par un courant et placé dans un champ magnétostatique.</p>
	<p>Identifier les propriétés de symétrie et d'invariance d'une distribution de courant. Tracer l'allure des cartes de champs magnétiques pour un aimant droit, un fil rectiligne, une spire circulaire, une bobine longue et un tore.</p>
Équation de Maxwell-Ampère de la statique, théorème d'Ampère et équation de Maxwell relative au flux du champ magnétique	<p>Énoncer le théorème d'Ampère et le relier à l'équation de Maxwell-Ampère de la statique. Énoncer l'équation de Maxwell relative au flux du champ magnétique. Utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie (fil infini, câble coaxial, nappe de courant supposée « infinie », tore, solénoïde « infini » en admettant que le champ magnétique est nul à l'extérieur). Énoncer les relations de passage du champ magnétostatique. Mettre en œuvre un dispositif expérimental permettant d'apprécier la validité du modèle du solénoïde infini.</p>
14. Ondes	
Onde mécanique transversale	<p>Établir l'équation de propagation dans le cas des ondes transversales d'une corde. Reconnaître le caractère progressif ou stationnaire d'une onde. Utiliser les conditions aux limites et identifier les modes propres d'une onde stationnaire.</p>