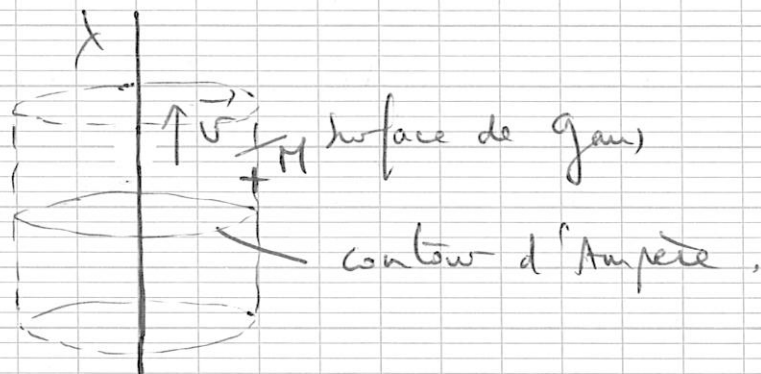


Electromagnetisme TD n° 1

Exercice 1



* Champ électrique radial

$$\vec{E} = E(r) \cdot \vec{e}_r$$

Surface de Gauss : cylindre | hauteur h
rayon r

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

* Champ magnétique orthoradial

$$\vec{B} = B(r) \cdot \vec{e}_\theta$$

Contour d'Ampère choisi
Cercle de rayon r

$$I_c = \frac{\lambda L}{L} = \lambda$$

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_c = \mu_0 \lambda$$

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 \lambda$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 \lambda}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

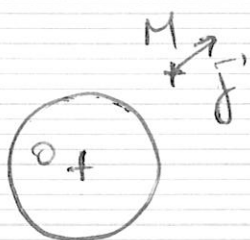
$$\star \quad \vec{E}' = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

$$\vec{B}' = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

Faisons, $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}' = \frac{v\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_\theta$

d'où, $\vec{B}' = \mu_0 \epsilon_0 v \vec{\nabla} \wedge \vec{E}'$

Exercice 2



- 1) Tout plan contenant OM est plan de symétrie des charges $\Rightarrow \vec{E}(r)$ suivant $\vec{e}_r$
 (+) Invariance par rotation $\Rightarrow \vec{E}(M) = E(r, t) \cdot \vec{e}_r$

Tout plan contenant OM est plan de symétrie des courants $\Rightarrow \vec{B}(r) \perp$ à tous les plans, $\Rightarrow \vec{B}(r)$ nul.

- 2) Théorème de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r, t) = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E}(r, t) = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

d'où : $\vec{j}' = \delta \cdot \vec{E}' = \frac{\delta \cdot Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

$$3) \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) = \vec{0} \quad (= \text{rot } \vec{B})$$

$$\vec{j} + \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} = \vec{0}$$

$$\frac{\delta \cdot Q(t)}{4\pi \cancel{\epsilon_0 r^2}} + \epsilon_0 \frac{1}{4\pi \cancel{\epsilon_0 r^2}} \frac{dQ}{dt}(t) = 0$$

$$\delta \cdot Q(t) + \epsilon_0 \frac{dQ}{dt}(t) = 0$$

$$\frac{dQ}{dt}(t) + \frac{\delta}{\epsilon_0} Q(t) = 0$$

$$4) \quad Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{\delta}{\epsilon_0}$$

$$\tau = \frac{\epsilon_0}{\delta}$$

Exercice 3

1) Théorème de Stokes appliqué à un contour de rayon $r < R_0$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$2\pi r E(r) = \iint_S -\frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \left(= -\frac{d\Phi}{dt} \right)$$

$$= -\mu_0 n \frac{di}{dt} \cdot \pi r^2 \underbrace{\vec{u}_z \cdot \vec{u}_z}_1$$

$$E(r) = -\frac{\mu_0 n r}{2} \frac{di}{dt}$$

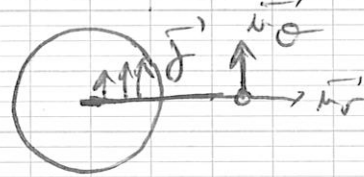
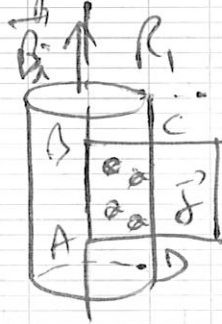
$$\vec{E}(r, t) = -\frac{\mu_0 n r}{2} \frac{di}{dt} \vec{u}_\theta$$

$$2) \vec{j} = \delta \vec{E} = - \frac{\delta \mu_0 n r}{2} \frac{d}{dt} \vec{u}_g$$

$$= - \frac{\delta \mu_0 n r \omega I \sin(\omega t)}{2} \vec{u}_g$$

Effet peau !

3)
AB = h



(On s'intéresse aux champs B_i créés par les courants induits B_i)

Hyp: B_i nul à l'extérieur du cylindre.

Contour d'Ampère: On suppose $\vec{B}$ suivant $\vec{u}_z$ partout (symétrie)

$$\oint \vec{B}_i \cdot d\vec{l}' = \mu_0 I_e$$

$$\int \vec{B}_i \cdot \vec{AB} \cdot d\vec{l}' = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}'$$

$$= \mu_0 \int_h^0 \int_0^{R_1} \frac{\delta \mu_0 n r \omega I \sin(\omega t)}{2} dz dr$$

$$\vec{B}_i \cdot \vec{R} = \mu_0 R \left[\frac{\delta \mu_0 n r^2 \omega I \sin(\omega t)}{4} \right]_0^{R_1}$$

$$\vec{B}_i = \frac{\delta \mu_0^2 n R_1^2 \omega I \sin(\omega t)}{4}$$

$$\vec{B}_i = \frac{\delta \mu_0^2 n R_1^2 \omega I \sin(\omega t)}{4} \cdot \vec{u}_z$$

$$\frac{B_{i \max}}{B_{\max}} = \frac{\delta \mu_0 R_1^2 \omega}{4}$$

Il faut ω faible (δ faible)

Par le
théorème
d'Ampère.

(Din)

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}} \vec{B}_i &= \mu_0 \vec{j} \\ &= \frac{\delta \mu_0^2 n r \omega I}{2} \sin(\omega t) \vec{u}_z\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial B_{i\alpha}}{\partial z} - \frac{\partial B_{i\alpha}}{\partial r} \right) \vec{u}_z = \frac{\delta \mu_0^2 n r \omega I}{2} \sin(\omega t) \vec{u}_z$$

Symétries + circonvances

$$\Rightarrow \vec{B}_i \text{ suivant } \vec{u}_z^2 \text{ (seule } B_{iz} \text{ non nulle)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial B_{i\alpha}}{\partial z} = 0 \quad (\text{car } B_{i\alpha} \neq 0)$$

$$-\frac{\partial B_{iz}}{\partial r} = \frac{\delta \mu_0^2 n r \omega I}{2} \sin(\omega t)$$

$$B_{iz} = -\frac{\delta \mu_0^2 n r^2 \omega I}{4} \sin(\omega t) + \text{cte}$$

$$B_{iz}(R_1) = -\frac{\delta \mu_0^2 n R_1^2 \omega I}{4} \sin(\omega t) + \text{cte} = 0$$

$$\Rightarrow \text{cte} = \frac{\delta \mu_0^2 n R_1^2 \omega I}{4} \sin(\omega t)$$

d'où :

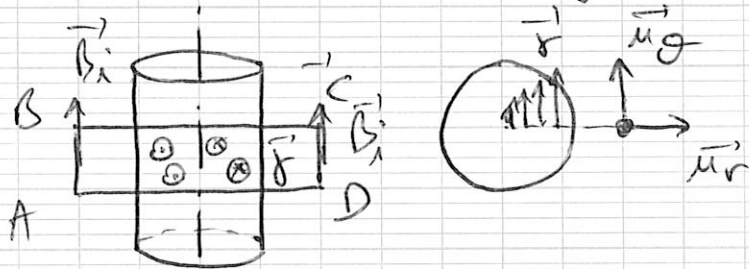
$$\begin{aligned}B_{iz}(r, t) &= -\frac{\delta \mu_0^2 n r^2 \omega I}{4} \sin(\omega t) \\ &\quad + \frac{\delta \mu_0^2 n R_1^2 \omega I}{4} \sin(\omega t)\end{aligned}$$

Sur l'axe ($r=0$) :

$$\vec{B}_i(r, t) = \frac{\delta \mu_0^2 n R_1^2 \omega I}{4} \sin(\omega t) \vec{u}_z$$

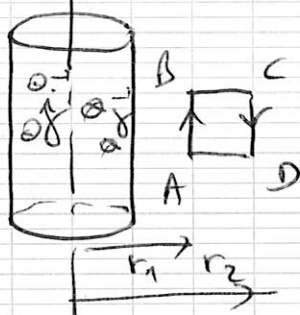
Par
Maxwell -
Ampère.

B_z nul à l'extérieur du cylindre?



B_z suivant $\vec{u}_z$ partout (symétrie!)
 B_z sur AB = B_z sur CD

(Antisymétrie des courants $\Rightarrow$ symétrie du champ)



Symétries +
 invariances
 $\Rightarrow B_z = B_z(r) \vec{u}_z$

$$\oint \vec{B}_z \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_e = 0$$

$$B_z(r_1) \times AB - B_z(r_2) \times CD = 0$$

$$B_z(r_1) = B_z(r_2)$$

Identique solénoïde
 $B_{ext} = 0$