

DEVOIR SURVEILLE N°6

Durée de l'épreuve : 3 H

L'usage de la calculatrice est interdit.

Lire tout l'énoncé avant de commencer, numéroté les feuilles et les questions, utiliser les notations de l'énoncé, apporter des justifications brèves mais précises et complètes, fournir des résultats homogènes et encadrés et des applications numériques soulignées et accompagnées d'une unité.

Calculatrice INTERDITE

I) Electrostatique et Théorème de Gauss (Extrait concours) (Environ 8 % du barème)

➤ Questions 6 à 8

On considère ainsi une boule chargée uniformément (densité volumique de charge électrique ρ), de rayon R . Cette distribution de charges produit un champ électrique $\vec{E}$. On utilise les coordonnées sphériques (r, θ, φ) dont le centre O est le centre de la boule.

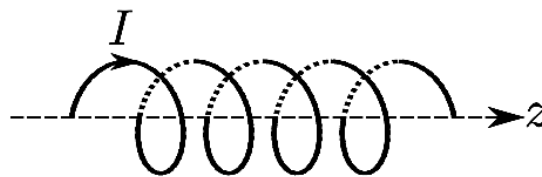
- 6 - Donner l'expression de la charge électrique totale, notée Q , portée par la boule, en fonction de ρ et de R .
- 7 - En explicitant les invariances et les symétries du problème, donner les variables dont dépend le champ électrique $\vec{E}$, ainsi que sa direction en fonction des vecteurs de la base sphérique.
- 8 - En utilisant le théorème de Gauss, établir l'expression du champ électrique $\vec{E}$ à la fois dans la boule et à l'extérieur.

II) Magnétostatique et Théorème d'Ampère (Extrait concours) (Environ 8 % du barème)

➤ Questions 22 à 24

Production du champ magnétique

Les trois questions qui suivent sont indépendantes du reste. On s'intéresse ici au dispositif qui permet de créer le champ magnétique stationnaire des rails de Laplace. Il s'agit d'une bobine cylindrique, ou solénoïde, parcourue par un courant I constant. On note n le nombre de spires par unité de longueur.



Document 9 : schéma de la bobine.

- 22 - Tracer l'allure de la carte des lignes de champ magnétique produites par la bobine.

On supposera dans la suite que le champ magnétique est nul en dehors du solénoïde. On néglige tout effet de bord : le solénoïde peut être considéré comme infini. On utilise les coordonnées cylindriques dont l'axe Oz est celui du solénoïde.

- 23 - En utilisant les symétries et invariances de la distribution de courants, déterminer les variables dont dépend le champ $\vec{B}$ ainsi que sa direction.
- 24 - À l'aide du théorème d'Ampère, établir l'expression du champ $\vec{B}$ à l'intérieur du solénoïde.

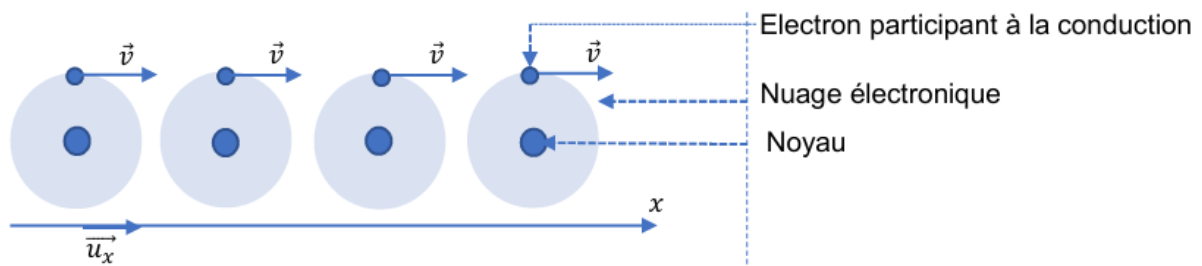
III) Conduction électrique (extrait concours) (Environ 30 % du barème)

➤ Questions 1 à 15

I- Résistance électrique

a) Loi d'Ohm locale

On considère un échantillon de cuivre dont on note la masse volumique ρ et la masse molaire M . On adopte un modèle classique de la conduction électrique pour lequel chaque atome de cuivre possède un électron susceptible de se déplacer sur l'ensemble de l'échantillon sous l'action d'une force électrique.



On prête à chaque électron participant à la conduction une vitesse commune $\vec{v}$ (mesurée par rapport au référentiel galiléen lié à l'échantillon).

- 1) Etablir l'expression de la concentration volumique n^* d'électrons mobiles (en m^{-3}) en fonction de ρ , M et N_a la constante d'Avogadro. On pourra utiliser l'analyse dimensionnelle ou toute autre méthode.
- 2) Calculer n^* sachant que $\rho \approx 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $M \approx 6 \times 10^1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $N_a \approx 6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

On impose à tout l'échantillon un champ électrique $\vec{E}$ uniforme et stationnaire tel que $\vec{E} = -E\vec{u}_x$ (avec $E > 0$). On rappelle que la charge de l'électron est $-e$ avec $e \approx 10^{-19} \text{ C}$. Dans ces conditions, chaque électron est affecté d'une énergie potentielle de la forme $E_p = -eEx + E_{p0}$ où E_{p0} est une constante. Le mouvement rectiligne suivant $\vec{u}_x$ de chaque électron s'accompagne d'une force de frottement $\vec{f}$ donnée par $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$ où m est la masse d'un électron et $\tau > 0$ est une constante. On négligera le poids de l'électron.

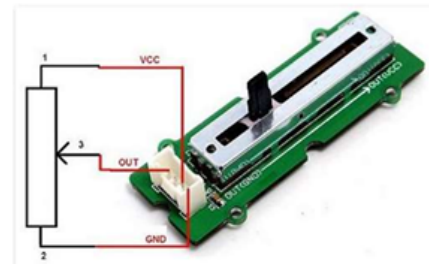
- 3) Appliquer le théorème de la puissance mécanique à un électron afin de montrer que $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = KE$. On donnera l'expression de K en fonction des constantes du sujet.
- 4) Donner la dimension de τ et proposer une interprétation de cette grandeur.
- 5) Donner l'expression de $v(t)$ sachant que $v(0) = 0$. Tracer l'allure de $v(t)$ et en déduire l'expression de sa valeur limite v_∞ en fonction de E, e, m et τ .
- 6) On donne $\tau \approx 10^{-14} \text{ s}$, $m \approx 10^{-30} \text{ kg}$, $E \approx 10^{-1} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Calculer v_∞ en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

En régime établi, le modèle étudié aboutit à la loi d'Ohm locale reliant le vecteur densité de courant $\vec{j}$ au champ électrique $\vec{E}$ tel que $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ où γ est une quantité réelle définissant la conductivité du matériau en régime stationnaire.

- 7) Exprimer $\vec{j}$ en fonction de m, e, τ, n^* et $\vec{E}$. En déduire l'expression de γ puis calculer sa valeur numérique.

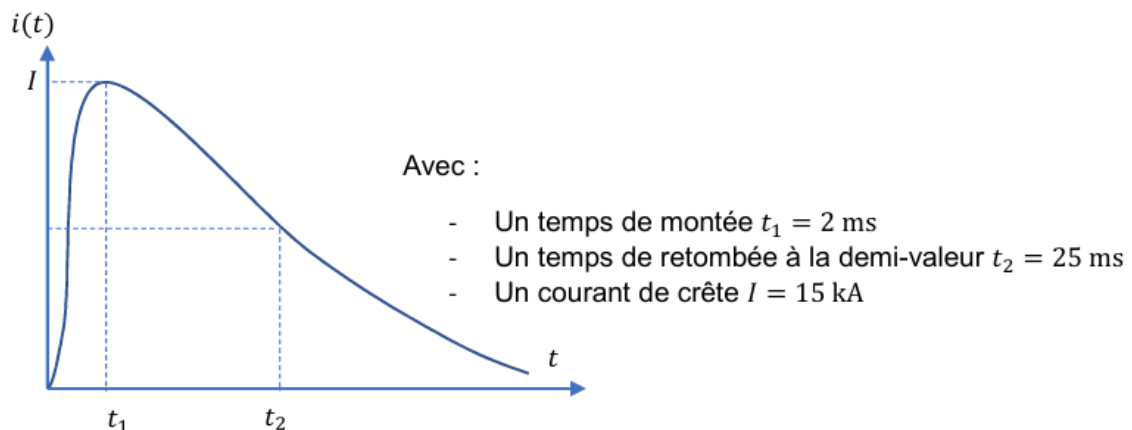
L'échantillon étudié est un barreau de cuivre cylindrique, homogène, de section S , de longueur ℓ . Le champ électrique uniforme et stationnaire est obtenu en appliquant une tension $U > 0$ entre les deux extrémités de ce cylindre. Le mouvement des électrons est à l'origine d'un courant dont l'intensité est notée $I > 0$.

- 8) Démontrer la relation entre U, E et ℓ .
 9) Donner la relation entre I, j et S .
 10) Obtenir à partir des résultats précédents la loi d'Ohm $U = RI$ et donner l'expression de R en fonction de γ, S et ℓ .
 11) La photo ci-contre représente un potentiomètre à glissière utilisé, par exemple, dans les tables de mixage. Expliquer succinctement le principe de fonctionnement de ce potentiomètre.

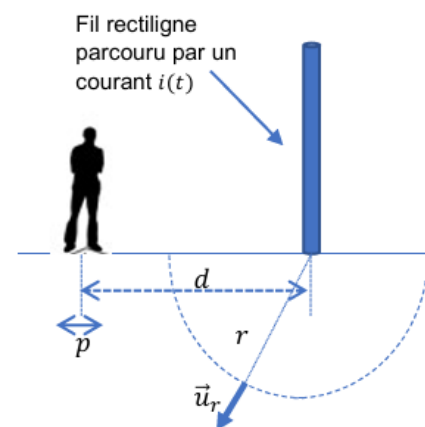


- b) Comment se protéger de la foudre ?

Un coup de foudre est associé à un courant de forte intensité et de courte durée. La mesure de l'intensité du courant $i(t)$ conduit typiquement au graphe ci-dessous :



Un éclair est associé à un déplacement de charges et donc à un courant électrique. Dans l'air, on assimile ce courant à celui d'un fil rectiligne, parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ uniformément réparti. Dans le sol, on suppose que la densité de courant volumique est radiale, de la forme $\vec{j} = j(r, t)\vec{u}_r$ où $\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire radial de la base sphérique. On se place dans l'approximation des régimes stationnaires, le sol est alors associé à une conductivité électrique réelle γ . Un homme se trouve à la distance moyenne d du point d'impact de la foudre et la distance entre ses pieds est notée p .



- 12) Montrer que le champ électrique $\vec{E}(r, t)$ dans le sol a pour expression $\vec{E} = \frac{i(t)}{2\pi\gamma r^2} \vec{u}_r$

- 13) Montrer que l'expression de la différence de potentiel $U_p > 0$ entre les pieds de l'homme peut se mettre sous la forme $U_p = Ri$. On exprimera R en fonction de p, d et γ .

On donne l'opérateur gradient en repérage sphérique :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \overrightarrow{u_\varphi}$$

On prend $\gamma = 1 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, $p = 0,5 \text{ m}$ et $d = 1 \text{ m}$. On assimile par la suite la fonction $i(t)$ à une fonction affine par morceaux.

- 14) Le programme Scilab fourni au document 1 en annexe permet d'obtenir le tracé de l'intensité $i(t)$ du courant. En vous aidant de ce programme, écrire sur votre copie les lignes de code supplémentaires permettant d'obtenir le graphe de $U_p(t)$.
- 15) A l'aide des documents 2 et 3 fournis en annexe, prévoir en le justifiant si la personne est en danger.

IV) Condensateur plan (Extrait concours) (Environ 25 % du barème)

➤ Questions 23 à 32

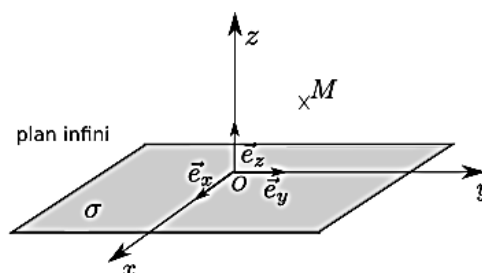
II Étude du capteur de niveau d'eau

Le suivi du niveau d'eau dans la piscine est essentiel pour commander son remplissage, détecter des fuites ou encore étudier l'évaporation. Nous étudions ici un capteur de type capacitif.

On donne la permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

II.1 Étude du condensateur plan

On considère d'abord un plan infini, chargé avec une densité surfacique de charge σ uniforme. On utilise le repère de la figure ci-contre. $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sont des vecteurs unitaires.



Document 7

- 23 - Par des arguments d'invariance et de symétrie, établir la direction du champ électrique créé par ce plan, en un point M quelconque de l'espace, ainsi que les variables dont il dépend.
- 24 - Par un argument de symétrie, montrer que $\vec{E}(z) = -\vec{E}(-z)$.
- 25 - Démontrer que le champ électrique a pour expression :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z \text{ pour } z > 0, \text{ et } \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z \text{ pour } z < 0. \quad (3)$$

Pour la démonstration, on fera un schéma de la surface de Gauss considérée.

On étudie maintenant un condensateur. On le modélise par deux plans parallèles, chacun de surface S . On note Oz l'axe orthogonal aux plans. Le plan en $z = 0$ porte une densité surfacique de charge $-\sigma$, et le plan en $z = e$ (avec e distance positive) porte une densité surfacique de charge $+\sigma$. On néglige tout effet de bord.

26 - À l'aide d'un schéma, montrer que le champ électrique est non nul dans une certaine zone de l'espace et nul ailleurs. Donner l'expression du champ dans la zone où il est non nul.

On note $U = V(e) - V(0)$ la différence de potentiel électrostatique entre les deux plans. On rappelle que la capacité C d'un condensateur est définie par la relation $Q = CU$ avec Q la charge de l'armature positive.

27 - Établir l'expression de C en fonction de ϵ_0 , S et e .

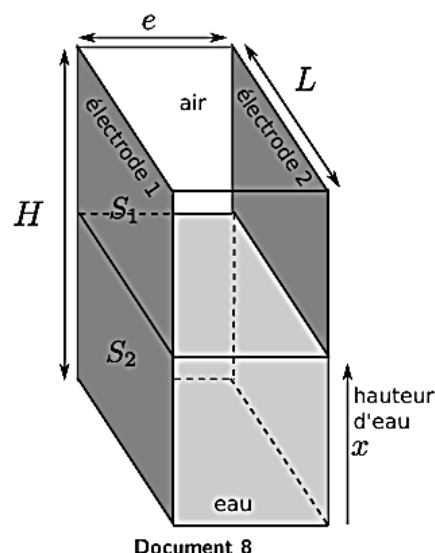
II.2 Application au capteur de niveau d'eau

Le principe du capteur est schématisé ci-contre. Dans un milieu de permittivité diélectrique relative ϵ_r , l'expression de la capacité d'un condensateur plan s'écrit :

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{e}. \quad (4)$$

On a $\epsilon_r = 1$ pour l'air et $\epsilon_r = 80$ pour l'eau.

Le capteur est équivalent à deux condensateurs C_1 et C_2 placés en parallèle, l'un situé dans l'air (surface des électrodes S_1 dans l'air) et l'autre dans l'eau (surface des électrodes S_2 dans l'eau). Les capacités de ces deux condensateurs placés en parallèle s'additionnent.



28 - Établir l'expression de la capacité totale $C = C_1 + C_2$, et l'écrire sous la forme $C = ax + b$, avec a et b des constantes à exprimer en fonction des dimensions H , L et e du condensateur, de ϵ_0 et de la permittivité diélectrique relative ϵ_r de l'eau.

Pour mesurer la valeur de C , on place le capteur dans un montage électrique (document 9). Le générateur de tension impose une tension $e(t) = A \cos \omega t$ avec $A > 0$.

On mesure alors la tension u aux bornes de la résistance. On admet qu'elle vérifie l'équation suivante :

$$RC \frac{de}{dt} = RC \frac{du}{dt} + u. \quad (5)$$

On utilise le formalisme complexe : $e(t)$ est représenté par $\underline{e}(t) = Ae^{j\omega t}$ et $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$ par $\underline{u}(t) = \underline{U}_0 e^{j\omega t}$ avec $\underline{U}_0 = U_0 e^{j\varphi}$.

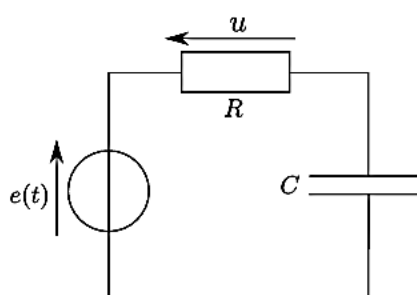
j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.

29 - À partir de l'équation (5), établir l'expression de $\underline{U}_0$ en fonction de A , ω , R et C .

30 - Établir l'expression de l'amplitude U_0 de la tension $u(t)$ en fonction des mêmes grandeurs.

31 - On se place dans la limite basse fréquence. Préciser ce que cela signifie, et donner alors l'expression approchée de U_0 .

32 - Expliquer comment ce montage permet une mesure du niveau d'eau.



v) Conduction thermique : Isolation de ruches en hiver (environ 30 % du barème)

➤ Questions 1 à 11

En hiver, l'activité de la colonie d'abeilles est réduite à son maximum ; les abeilles s'occupent principalement de maintenir la grappe à une température suffisante, en se resserrant et en agitant pour certaines leurs ailes, ce qui nécessite de l'énergie et entraîne donc une consommation de miel. Certains apiculteurs effectuent une isolation thermique extérieure de la ruche à l'aide par exemple de plaques de polystyrène.

On cherche à étudier certains aspects des transferts thermiques au sein d'une ruche.

Données :

Température intérieure : $T_i = 10,0 \text{ }^\circ\text{C}$, supposée uniforme

Température extérieure : $T_e = 5,0 \text{ }^\circ\text{C}$, supposée uniforme

Conductivités thermiques λ (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) :

Bois : $\lambda_b = 1,00$ Polystyrène expansé : $\lambda_{\text{PSE}} = 0,036$

Masse volumique du bois : $\rho_b = 800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Capacité thermique du bois : $C_b = 2,0 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$



On s'intéresse d'abord à une unique paroi d'une ruche en bois non isolée, de surface S , d'épaisseur e et de conductivité thermique λ_b supposées constantes et uniformes pour l'ensemble de la paroi (voir **figure 3** ci-après).

On note $\vec{e}_x$ le vecteur unitaire normal à la surface de la paroi, dirigé vers l'extérieur de la ruche.

On tient compte uniquement des transferts thermiques par conduction, et on considère la conduction comme étant unidimensionnelle selon le vecteur $\vec{e}_x$.

On souhaite étudier l'évolution des températures dans la paroi et on définit pour cela un axe (Ox) de vecteur $\vec{e}_x$ et d'origine O située sur la paroi intérieure de la ruche (voir **figure 3**).

On se place en régime stationnaire, les différentes grandeurs ne dépendant alors que de x .

On note $\Phi(x)$ le flux thermique à travers une surface S située à x constant et $\vec{J}_{\text{th}}(x)$ le vecteur densité surfacique de flux thermique associée.

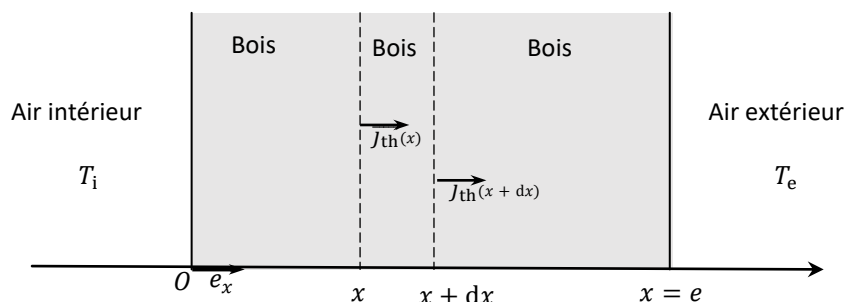


Figure 3 : Flux thermique à travers une paroi de la ruche en régime stationnaire

1. Donner la relation dans le cas général entre flux thermique Φ et densité de flux thermique $\vec{j}_{th}$ en précisant les unités de ces grandeurs dans le système international d'unités, puis indiquer la relation simplifiée entre $\Phi(x)$ et $j_{th}(x)$ dans le cas étudié.
2. Énoncer la loi de Fourier décrivant le transfert thermique par conduction, ainsi que sa simplification dans le cas d'une conduction unidimensionnelle selon $\vec{e}_x$.
3. Justifier à l'aide d'un bilan énergétique que le flux thermique en régime stationnaire est le même à travers toutes les sections de la paroi.
4. En déduire que la température $T(x)$ varie suivant une fonction affine de la position x à travers la paroi de la ruche de la forme $T(x) = ax + b$. Établir les expressions des coefficients a et b en fonction de la température T_i à l'intérieur de la ruche et de la température extérieure T_e . Tracer l'allure de la courbe représentative de $T(x)$ pour $x \in [-e, 2e]$.

On souhaite à présent étudier l'isolation de la ruche qui permet de limiter les pertes d'énergie des abeilles et d'améliorer leur survie en cas d'épisode de froid intense. Certains apiculteurs préfèrent toutefois ne pas isoler les ruches, les abeilles pouvant être trompées par des températures ressenties trop douces et s'épuiser dans une quête prématurée de fleurs à butiner.

On utilise pour cette isolation une plaque de polystyrène expansé (PSE) de même surface S que la paroi en bois étudiée ci-dessus, d'épaisseur e_{PSE} et de conductivité thermique λ_{PSE} positionnée entre la paroi et l'intérieur de la ruche (voir **figure 4** ci-après).

On se place à nouveau en régime stationnaire, le flux Φ étant le même à travers toutes les sections de la paroi entre $x = 0$ et $x = e + e_{PSE}$. On supposera, à nouveau pour simplifier, la température uniforme à l'intérieur de la ruche. On note R_{iso} la résistance thermique totale de la paroi isolée, tenant compte à la fois de la couche de bois et de celle de polystyrène expansé.

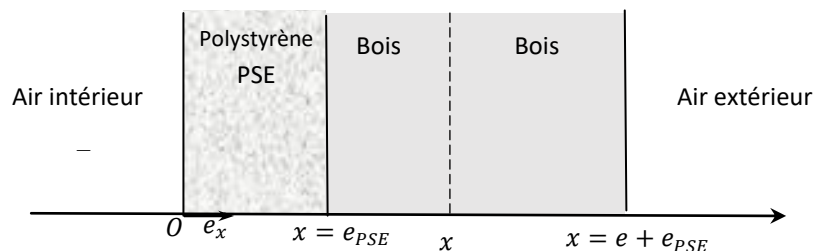


Figure 4 : Paroi d'une ruche isolée avec une couche de polystyrène expansé

5. Montrer que la résistance thermique de la paroi de la ruche de surface S a pour expression $R_{th} = \frac{e}{\lambda_b \cdot S}$. Faire l'application numérique pour une paroi en bois de ruche non isolée de dimensions $400 \text{ mm} \times 500 \text{ mm}$ et d'épaisseur 20 mm .
6. Exprimer la résistance totale R_{iso} de la paroi de la ruche isolée en fonction des grandeurs suivantes : S , e , e_{PSE} , λ_b et λ_{PSE} .
7. Déterminer l'expression de l'épaisseur e_{PSE} de polystyrène à utiliser pour diviser les pertes de chaleur par 2 et effectuer l'application numérique. Commenter le résultat obtenu et le modèle sachant que l'épaisseur réelle de PSE utilisée en apiculture est 4 cm .

On se place désormais en régime variable (non stationnaire) et on étudie de nouveau la ruche non isolée (**figure 3**).

8. En faisant un bilan local d'enthalpie entre les abscisses x et $x + dx$, et les instants t et $t + dt$, établir **l'équation de la chaleur**, sous la forme :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Avec $T(x, t)$ la Température de la tranche entre x et $x + dx$ à un instant t .

On montrera que :

$$D = \frac{\lambda_b}{c_b \cdot \rho_b}$$

Calculer une valeur approchée de D , et préciser son unité.

On s'intéresse à la propagation d'une onde thermique dans la paroi de la ruche, dans les conditions de la question 8). On recherche une fonction $T(x, t)$ solution de l'équation de la chaleur du 8) de la forme :

$$T(x, t) = T_0 + \theta(x, t) \text{ avec :}$$

$$\theta(x, t) = \theta_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

- $T = \frac{2\pi}{\omega}$ période temporelle liée aux saisons
- $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\delta$ période spatiale (ou longueur d'onde) liée à la propagation dans la paroi
- $\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$ terme d'atténuation de l'onde

9. Montrer que la grandeur complexe $\underline{\theta}(x, t)$ associée à la grandeur $\theta(x, t)$ peut s'écrire :

$$\underline{\theta}(x, t) = \theta_0 \exp(j\omega t) \exp\left(-(1 + j)\frac{x}{\delta}\right)$$

10. En introduisant $\underline{\theta}(x, t)$ dans l'équation de la chaleur du 8), montrer que l'on obtient la condition nécessaire suivante :

$$\omega - D \frac{2}{\delta^2} = 0$$

11. Exprimer δ , distance caractéristique de l'onde thermique, en fonction de D et ω . Vérifier l'homogénéité du résultat.

Annexes :

```
//constantes
gam=1
p=0.5
d=1
t1=2*10^-3
t2=25*10^-3
Imax=15*10^3
R=p/(2*pi*gam*(d^2-(p^2)/4))

//Définitions

function I=i(t)
    if t<=t1
        I=Imax*t/t1
    else
        I=-Imax/(3*t2)*(t-t1)+Imax
    end
endfunction

function L=liste_valeurs_i(liste_t,i)
    L=[]
    for t = liste_t
        L($+1)=i(t)
    end
endfunction

//tracé

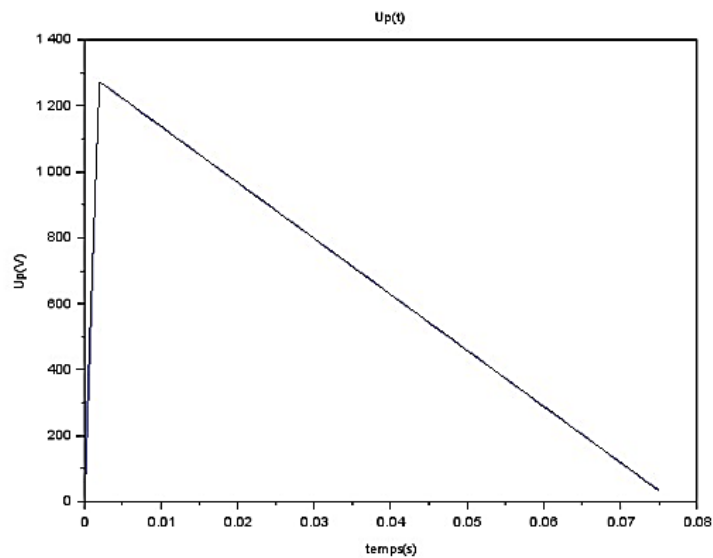
liste_t=linspace(0,3*t2,1000)
liste_i=liste_valeurs_i(liste_t,i)
plot(liste_t,listes_i)
xlabel("temps(s)")
ylabel("i(A)")
title("i(t)")
```

Document 1 : Programme Scilab

Tension de contact U_c (V)	Impédance électrique du corps humain Z_n (Ω)	Courant passant par le corps humain I_n (mA)	Temps de passage maximal t_n (s)
50	1725	29	≥ 5
75	1625	46	0,60
100	1600	62	0,40
150	1550	97	0,28
230	1500	153	0,17
300	1480	203	0,12
400	1450	276	0,07
500	1430	350	0,04

Le tableau ci-contre indique, par exemple, qu'une tension de 230V imposée à un individu entraîne un courant de 153 mA et qu'il ne faut pas dépasser 0,17s d'exposition pour éviter tout risque.

Document 2 : Risque de chocs électriques sur le corps humain



Document 3 : Tracé de la fonction $U_p(t)$