EM3 ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS LE VIDE

Programme ATS

10. Propagation des ondes électromagnétiques	
Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide	Énoncer les équations de Maxwell dans le vide. Interpréter qualitativement le lien entre l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday. Établir l'équation de propagation des champs dans le vide.
Équation locale de Poynting	Décrire un bilan d'énergie électromagnétique dans le cas du vide et définir le vecteur de Poynting. Citer des ordres de grandeur de flux énergétiques moyens (Laser, flux solaire, etc.) Utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée.
Onde plane, onde plane progressive, onde plane progressive harmonique	Définir une onde plane, une onde plane progressive et une onde plane progressive harmonique. Expliquer la pertinence et les limites de ces modèles.
Onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement	Décrire la structure d'une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement. Expliquer la pertinence de ce modèle. Décrire la propagation de l'énergie des ondes planes progressives harmoniques polarisées rectilignement. **Mettre en œuvre un protocole expérimental illustrant la polarisation rectiligne d'une onde électromagnétique.**
Spectre des ondes électromagnétiques	Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications.
Réflexion sous incidence normale d'une onde plane, progressive et monochromatique polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait. Onde stationnaire	Exploiter la nullité des champs dans un métal parfait. Établir l'expression de l'onde réfléchie en exploitant les relations de passage fournies. Interpréter qualitativement la présence de courants localisés en surface. Reconnaître et caractériser une onde stationnaire.
Applications aux cavités à une dimension. Mode d'onde stationnaire	Mettre en œuvre un dispositif permettant d'étudier une onde électromagnétique, dans le domaine des ondes centimétriques.

I) PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS LE VIDE

I)1) Equation de propagation

Equations de Maxwell dans le vide en l'absence de charges ($\boldsymbol{\rho = 0}$) et de courants ($\vec{\boldsymbol{j}} = \vec{\boldsymbol{0}}$) :

On a aussi :

$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{rot}\vec{E}}\right) = \overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\left(\boldsymbol{div}\vec{\boldsymbol{E}}\right) - \vec{\Delta}(\vec{\boldsymbol{E}})$ **(5)** **(fourni)**

$\vec{\Delta}(\vec{\boldsymbol{E}}) = \vec{\nabla}^2(\vec{\boldsymbol{E}})$ **Laplacien vectoriel de $\vec{\boldsymbol{E}}$** (voir Analyse Vectorielle) :

Laplacien vectoriel $\Delta\vec{A}$	s'applique à un **vecteur** retourne un **vecteur**	$\begin{vmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{vmatrix}$	Rq : on trouve parfois la notation $\vec{\Delta}\vec{A}$, qui insiste sur le fait que le laplacien vectoriel retourne un vecteur.

En l'absence de charges :

$$\vec{\Delta}(\vec{E}) - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Equation de d'Alembert ou de propagation de $\vec{E}$ dans le vide

Rappel :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Equation de d'Alembert ou de propagation d'une onde mécanique sur une corde

De même :

$$\vec{\Delta}(\vec{B}) - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Equation de d'Alembert ou de propagation de $\vec{B}$ dans le vide

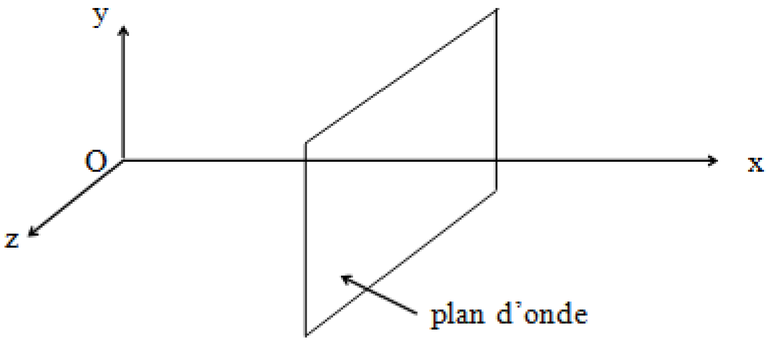
ε_0 : Permittivité diélectrique du vide, $\varepsilon_0 = 8.854.10^{-12}\ F.m^{-1}$

μ_0 : perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ H.m^{-1}$

$\boldsymbol{\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1}$ avec **c célérité (vitesse) de la lumière** dans le vide ($c = 3{,}0.10^8\ m.s^{-1}$)

I)2) Solution à une dimension en Ondes Planes Progressives (OPP)

Simulation : Onde EM



Equation de d'Alembert :

$\vec{\Delta}(\vec{B}) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$ ou $\vec{\Delta}(\vec{B}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$

En coordonnées cartésiennes :

Onde plane transverse => les plans d'onde sont perpendiculaires à la direction de propagation.

Exemple ci-dessus :

On obtient :

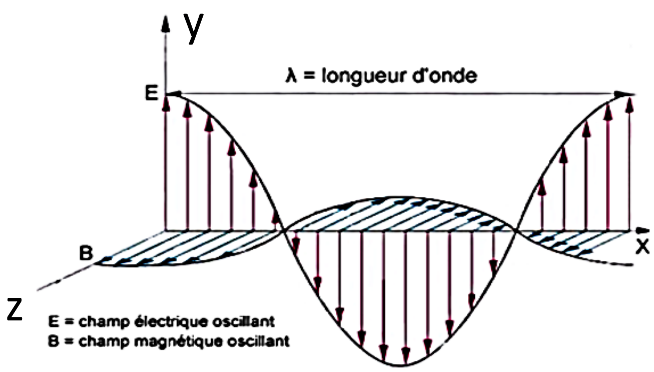
De même :

Solutions de l'équation :

$\boldsymbol{B(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)}$

- La fonction $f(x-ct)$ correspond à un signal (dont la forme est fixée par la fonction f) se propageant à la célérité / vitesse c se propageant dans le sens des x croissants : onde « progressive » ;
- La fonction $g(x+ct)$ correspond à un signal (dont la forme est fixée par la fonction g) se propageant à la célérité / vitesse c se propageant dans le sens des x décroissants : onde « régressive ».

I)3) Onde Plane Progressive Harmonique (OPPH) ou Monochromatique (OPPM)



Cas d'une onde plane progressive harmonique (= une seule fréquence) ou monochromatique (=une seule couleur) :

- Propagation selon l'axe x, dans le sens des x croissants,
- Champ électrique $\vec{E}(M,t=0)$ suivant l'axe y, champ magnétique $\vec{B}(M,t=0)$ suivant l'axe z

Onde Plane Progressive Harmonique (OPPH) :

$\boldsymbol{\omega}$: pulsation temporelle (rad.s^{-1})

$\boldsymbol{T} = \frac{2\pi}{\omega}$: période temporelle (s)

$\boldsymbol{\varphi_0, \varphi_0'}$: phases à l'origine des temps et des espaces (rad)

$\boldsymbol{k} = \|\vec{k}\|$: $\vec{k}$ vecteur d'onde (m^{-1})

$\boldsymbol{\lambda} = \frac{2\pi}{k}$: période spatiale ou longueur d'onde (m)

$\boxed{\boldsymbol{k = \frac{\omega}{c}}}$ (démontré ci-dessous)

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{cT}$ => $\boxed{\boldsymbol{\lambda = cT}}$

$\boxed{\vec{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{c}}\vec{\boldsymbol{n}}}$ avec $\vec{n}$ vecteur unitaire qui indique le sens de propagation : *relation de dispersion linéaire, ou pas de dispersion.*

On peut aussi écrire, dans le cas d'une onde sphérique :

$\vec{E}(M,t) = \vec{E}(r,t) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_0\right)$ avec $E_0 = cte$

$\vec{B}(M,t) = \vec{B}(r,t) = \vec{B}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_0'\right)$ avec $B_0 = cte'$

L'onde présente une **double périodicité** (spatiale et temporelle) :

- Périodicité temporelle : observation à $x = cte$: oscillogramme
- Périodicité spatiale : observation à $t = cte$: photo à $t = cte$

<u>Notation complexe : exemple</u>

Exemple avec une OPPM avec polarisation rectiligne de $\vec{B}$ suivant $\vec{u}_z$:

$\vec{B}(M,t) = \vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0') = B_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0')\vec{u}_z$

$B(x,t) = B_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0')$

Grandeur complexe temporelle associée :

$\underline{B}$ vérifie l'équation de d'Alembert :

Notation complexe : cas général

Dérivées temporelles :

Dérivées spatiales :

Cas de l'OPPM dans le vide

Equations de Maxwell :

Dans le cas d'une OPPM, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde.

<u>Remarque 1</u> : $\vec{k}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ forment un trièdre direct

<u>Remarque 2</u> : $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en phase

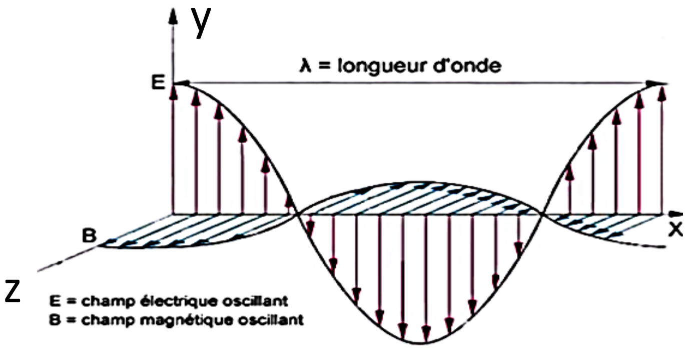
<u>Remarque 3</u> : Moyens pour déterminer $\vec{B}$ si on connait $\vec{E}$:

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ou :	$\boldsymbol{\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}}$ **dans le cas d'une OPPM**

I)4) Onde Plane Progressive Monochromatique (OPPM) polarisée rectilignement



Etude de la polarisation de l'onde = Etude de l'évolution de la direction de son champ électrique $\vec{E}$ et de son champ magnétique $\vec{B}$ au cours de la propagation.

Convention : observateur assis sur le vecteur d'onde $\vec{k}$ et regardant l'onde venir vers lui.

Cas général : exemple : propagation suivant l'axe x.

$\vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{t}) = \vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \vec{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{0}} \cos(\boldsymbol{\omega t} - \boldsymbol{kx} + \boldsymbol{\varphi_0})$

C'est-à-dire :

$E_x(x,t) = 0$ (pas de composante suivant la direction de propagation car onde plane transverse)

$$\boldsymbol{E_y(x,t) = E_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi_{0y})}$$

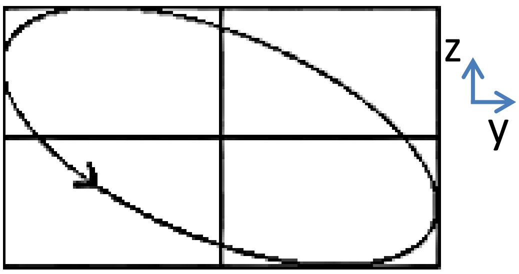
$$\boldsymbol{E_z(x,t) = E_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi_{0z})}$$

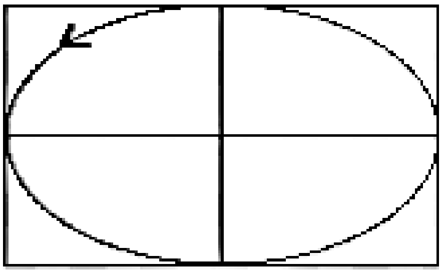
Que se passe-t-il sur un plan d'onde ($x = cte$) ?

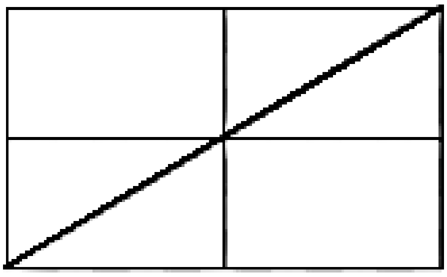
Exemple : $x = 0$

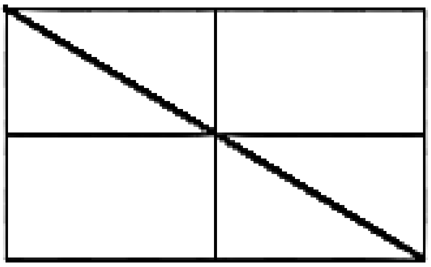
En fonction des valeurs relatives de E_{0y} et E_{0z} d'une part, et des valeurs relatives de φ_{0y} et φ_{0z}, la polarisation peut être rectiligne, circulaire ou elliptique.

Simulation : Onde EM









Pertinence du modèle de polarisation rectiligne

- Une OPPM polarisée elliptiquement peut être vue comme la superposition de 2 OPPM polarisées rectilignement

Exemple : Propagation selon z

OPPM polarisée elliptiquement = OPPM polarisée rectilignement + OPPM polarisée rectilignement

- Inversement, une OPPM polarisée rectilignement peut être vue comme la superposition de 2 OPPM polarisées circulairement

Exemple : Propagation selon z

Sous forme complexe :

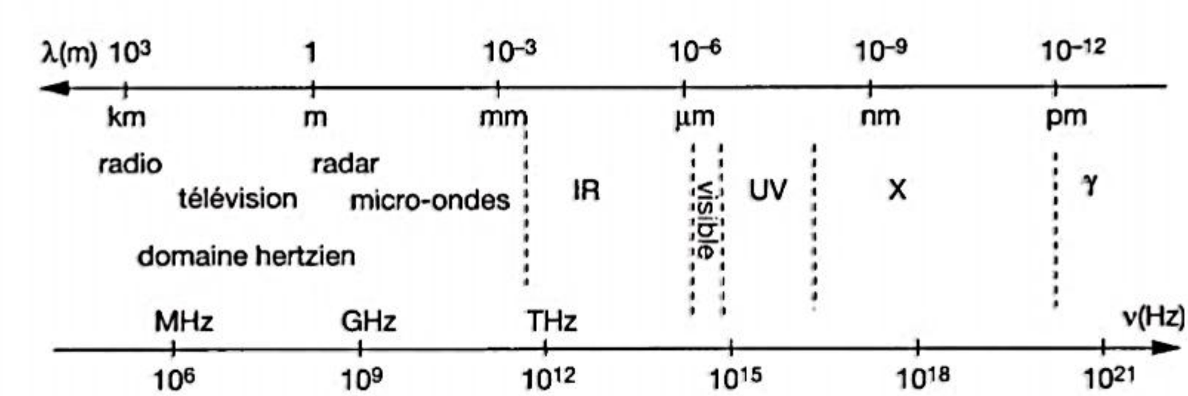
I)5) Spectres des ondes électromagnétiques et applications

Télévision TNT : 400 à 800 MHz

Applications Infrarouge IR : chauffage, …

Applications Rayons X : Imagerie médicale

Applications Rayons γ (très énergétiques, dangereux) : Réactions nucléaires



II) ENERGIE DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

II)1) Puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge

Force de Lorentz exercée par le champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$ sur les porteurs de charge :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Puissance cédée par le champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$ à une charge ponctuelle libre de charge q_l :

Puissance élémentaire cédée par le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ à un élément de volume $d\tau$:

Avec :

ρ_l : densité volumique de charges libres

$\vec{j} = \rho_l . \vec{v}$

D'où :

$\boldsymbol{\frac{dP}{d\tau} = \vec{E}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{E}}$ **densité volumique de puissance cédée par le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ aux porteurs de charge (W.m^{-3})**

II)2) Bilan d'énergie électromagnétique

Volume V délimité par une surface S fermée :

Soient :

- dE_m : variation d'énergie électromagnétique entre les instants t et $t + dt$
- δE_{sortie} : quantité d'énergie traversant les parois entre les instants t et $t + dt$
- $\delta E_{cédée}$: quantité d'énergie cédée aux porteurs de charge entre les instants t et $t + dt$

Bilan d'énergie entre les instants t et $t + dt$: $\boldsymbol{dE_m + \delta E_{sortie} + \delta E_{cédée} = 0}$

$dE_m = \iiint_V \frac{\partial e_m}{\partial t} . dt . d\tau$

$\delta E_{sortie} = \oiint_S \vec{R}.\overrightarrow{dS}.dt$: Flux du **vecteur de Poynting $\vec{R}$**

$\delta E_{cédée} = \iiint_V \vec{j}.\vec{E}.d\tau.dt$

Théorème de Green-Ostrogradski (hors programme) :

$\oiint_S \vec{R}.\overrightarrow{dS} = \iiint_V div\vec{R}.d\tau$ d'où :

$$\iiint_V \frac{\partial e_m}{\partial t}.dt.d\tau + \iiint_V div\vec{R}.d\tau.dt + \iiint_V \vec{j}.\vec{E}.d\tau.dt = 0$$

II)3) Densité volumique d'énergie électromagnétique

Densité volumique d'énergie électrique :

$e_e = w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ (voir condensateur)

Densité volumique d'énergie magnétique :

$e_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$

Densité volumique d'énergie électromagnétique dans une portion donnée de l'espace :

II)4) Vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting $\vec{R}$ représente la densité surfacique de puissance rayonnée :

La **puissance rayonnée** par le champ électromagnétique à travers une surface correspond au **flux du vecteur de Poynting** à travers cette surface :

Puissance moyenne rayonnée :

Pour une **OPP** (voir TD) :

$$\langle \boldsymbol{P_{ray}} \rangle = \frac{\boldsymbol{\varepsilon_0 c S}}{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{E_0}^2 = \frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{2\mu_0 c}} \boldsymbol{E_0}^2$$

III) REFLEXION D'UNE ONDE SUR UN PLAN CONDUCTEUR

III)1) Définition du conducteur parfait

Dans un métal conducteur :

- Loi d'ohm locale :

- Puissance électromagnétique volumique dissipée sous forme de chaleur :

Conducteur parfait (modèle idéal) : résistivité nulle, conductivité infinie : $\boldsymbol{\sigma} \rightarrow \infty$

Conséquence 1 :

Conséquence 2 :

Conséquence 3 :

- ⇨ Champ magnétique $\vec{B}$ indépendant du temps
- ⇨ Seul un champ magnétique $\vec{B}$ stationnaire peut exister dans un conducteur parfait
- ⇨ $\overrightarrow{B_{variable}} = \vec{0}$ dans le cadre d'une onde
- ⇨ On écrira $\vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ **dans un conducteur parfait dans le cas du régime variable**

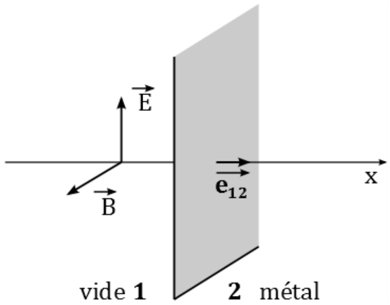
Conséquence 4 :

Conséquence 5 :

Aucune perte par effet joule dans un conducteur parfait.

III)2) Réflexion d'une OPPM sur un conducteur parfait

On étudie la réflexion **sous incidence normale** d'une **Onde Plane Progressive Monochromatique (OPPM) polarisée rectilignement** sur un **conducteur parfait**.



OPPM incidente, propagation suivant l'axe x, dans le sens des x croissants : $\overrightarrow{k_\iota} = \vec{k}$

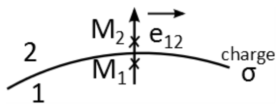
Pour $x > 0$, on place un métal conducteur parfait.

⇨ L'OPPM incidente va donner naissance à une OPPM réfléchie, dans le sens des x décroissants : $\overrightarrow{k_\iota} = -\vec{k}$:

Relations de continuité (fournies) à la traversée d'une surface chargée :

Champ électrique : $\overrightarrow{\boldsymbol{E_2}} - \overrightarrow{\boldsymbol{E_1}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} \overrightarrow{\boldsymbol{e_{1\to 2}}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} \overrightarrow{\boldsymbol{e_{12}}}$

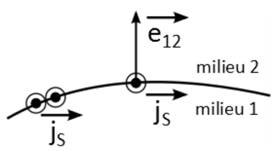
Lors de la **traversée d'une surface chargée :**



- La composante **tangentielle** du champ électrique est **continue**
- La composante **normale** du champ électrique est **discontinue**.

Champ magnétique : $\overrightarrow{\boldsymbol{B_2}} - \overrightarrow{\boldsymbol{B_1}} = \boldsymbol{\mu_0} \overrightarrow{\boldsymbol{J_S}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{e_{1\to 2}}} = \boldsymbol{\mu_0} \overrightarrow{\boldsymbol{J_S}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{e_{12}}}$

Lors de la **traversée d'une nappe de courant surfacique :**



- La **composante tangentielle** du champ magnétique est **discontinue**
- La **composante normale** du champ magnétique est **continue.**

Ici :

Conclusion :

$$\boxed{\underline{\vec{E_i}}(x,t) = E_{0i}\,\mathrm{expj}(\omega t - kx)\vec{u_y} \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec{E_r}}(x,t) = -E_{0i}\,\mathrm{expj}(\omega t + kx)\vec{u_y}}$$

Détermination de $\vec{B}$:

$$\boxed{\underline{\vec{B_i}}(x,t) = \frac{E_{0i}}{c}\,\mathrm{expj}(\omega t - kx)\vec{u_z} \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec{B}_r}(x,t) = \frac{E_{0i}}{c}\,\mathrm{expj}(\omega t + kx)\,\vec{u_z}}$$

III)3) Courants localisés en surface

$\vec{E_1}(0,t) = \vec{E_2}(0,t) = \vec{0}$ à la proximité immédiate du conducteur ($x = 0$)

Mais :

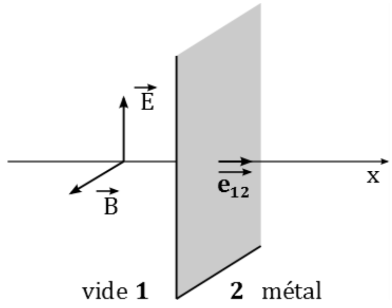
$\underline{\vec{B_1}}(0,t) = \underline{\vec{B}_i}(0,t) + \underline{\vec{B}_r}(0,t) = \frac{2E_{0i}}{c}\mathrm{expj}(\omega t)\,\vec{u_z}$ et $\vec{B_2}(0,t) = \vec{0}$ pour $x = 0$

Or : $\vec{B_2}(0,t) - \vec{B_1}(0,t) = -\frac{2E_{0i}}{c}\mathrm{expj}(\omega t)\,\vec{u_z} = \mu_0\vec{J_S} \wedge \vec{e_{12}} = \mu_0\vec{J_S} \wedge \vec{u_x}$

Conclusion :

$$\boxed{\boldsymbol{j_S = j_{Sy} = \frac{2E_{0i}}{\mu_0 c}\,\mathrm{expj}(\omega t)} \textbf{ Courants sinusoïdaux en surface suivant l'axe } \boldsymbol{y}}$$

III)4) Onde électromagnétique stationnaire



Dans le vide ($x < 0$), l'OPPM incidente et l'OPPM réfléchie se superposent et donnent naissance à une **onde stationnaire** (il y a **interférences**).

Champ électrique résultant :

$$\boxed{\overrightarrow{E_T}(x,t) = 2E_{0i}\sin(\omega t)\sin(kx)\,\overrightarrow{u_y}}$$

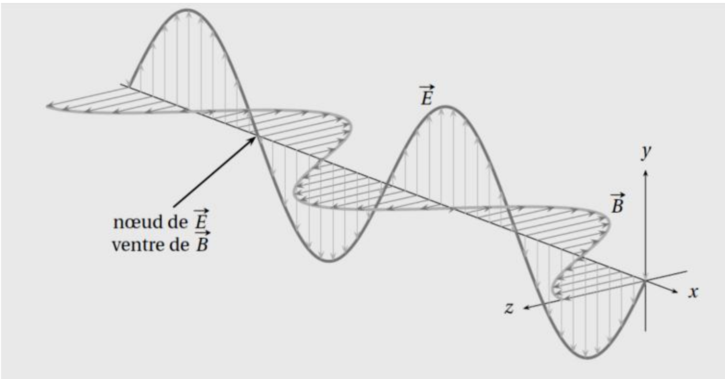
Les termes temporel et spatial sont dissociés : **onde stationnaire**.

2 ventres (ou 2 nœuds) sont séparés par $\frac{\lambda}{2}$.

De même : **Champ magnétique résultant :**

$$\boxed{\overrightarrow{B_T}(x,t) = 2\frac{E_{0i}}{c}\cos(\omega t)\cos(kx)\,\overrightarrow{u_z}}$$

$\overrightarrow{E_T}$ et $\overrightarrow{B_T}$ sont orthogonaux mais sont en **quadrature spatiale et temporelle** : les plans nodaux de $\overrightarrow{E_T}$ sont les plans ventraux de $\overrightarrow{B_T}$, et inversement.



Vecteur de Poynting :

Le vecteur de Poynting $\vec{R}$ est alternativement suivant $\overrightarrow{u_x}$ et $-\overrightarrow{u_x}$

- ⇨ **Il n'y a pas propagation d'énergie**

<u>III)5) Cavité résonante</u>

Equation de propagation :

$$\vec{\Delta}(\vec{E}) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

On cherche une solution en onde stationnaire :

Conditions aux limites (CL) :

$\vec{E}(0,t) = \vec{E}(a,t) = \vec{0}$ (Annulation de la composante tangentielle de $\vec{E}$).

D'où :

Seules certaines fréquences (propres) et longueurs d'onde existent dans la cavité.

IV) PROPAGATION D'UNE ONDE DANS UN MILIEU DISPERSIF

Dans **un milieu non dispersif** , les ondes se propagent à la même vitesse, quelle que soit leur fréquence.

⇨ La **relation de dispersion** est **linéaire** : $\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{c}}$

⇨ L'onde ne se déforme pas lors de sa propagation.

A l'inverse, dans un **milieu dispersif**, la **vitesse de propagation** d'une onde dépend de sa **fréquence**.

⇨ Une onde constituée de plusieurs fréquences (non monochromatique) se déforme au cours de sa propagation.
⇨ La **relation de dispersion** est **non linéaire**.

http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/ondedisp.html

http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/divers/paquet.html

Photo à l'instant ***t*** :

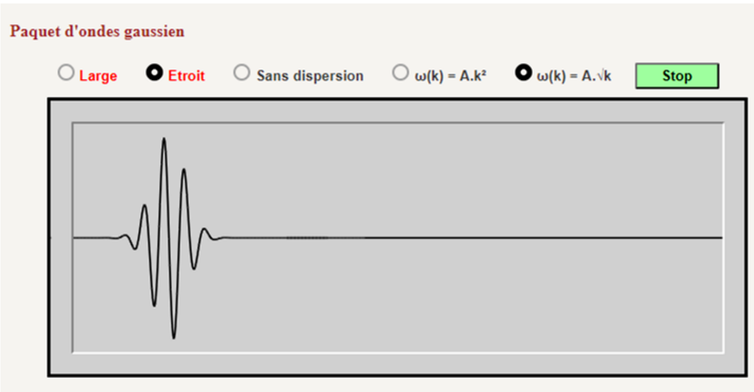
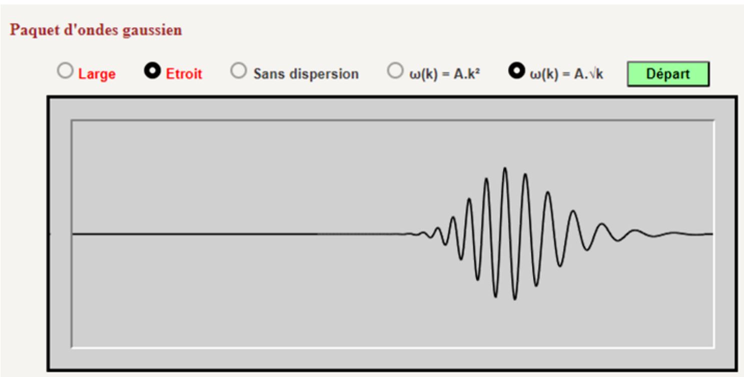


Photo à l'instant ***t + Δt*** :



<u>Exemple :</u> propagation d'une onde électromagnétique dans un **plasma**.

Relation de dispersion : $\boldsymbol{k} = \frac{\sqrt{\omega^2 - {\omega_p}^2}}{c}$ avec : ω_p pulsation plasma