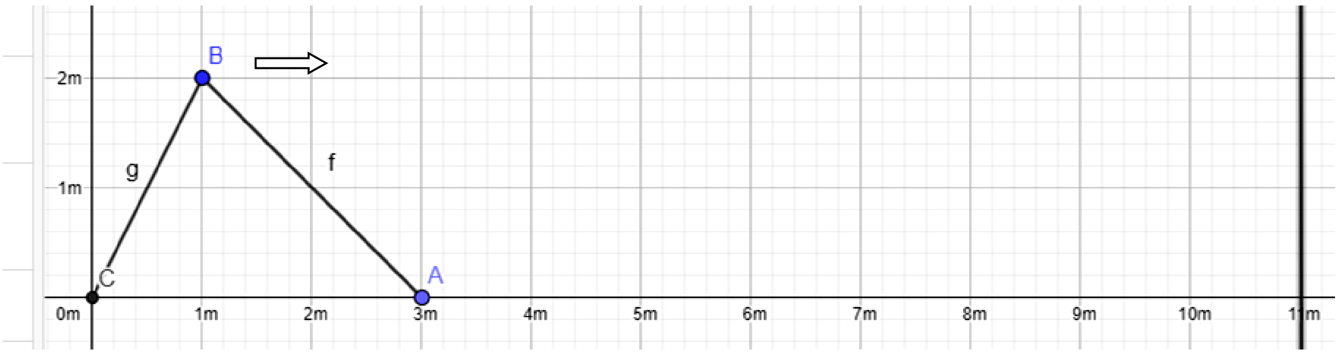
ONDES MECANIQUES TRANSVERSALES

Travaux Dirigés

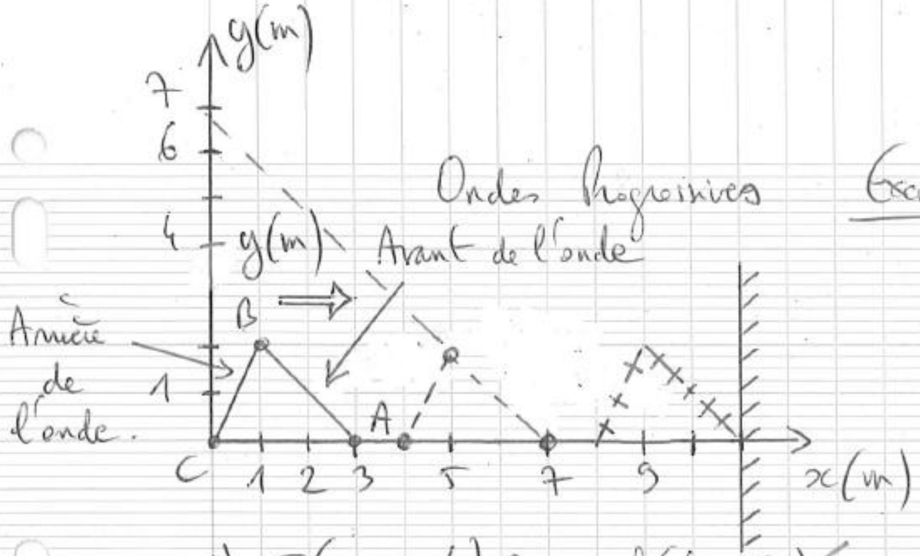
Exercice 1

On donne l'onde plane progressive suivante, dont la vitesse de propagation est c = 4 m.s^{-1}, dans le sens des x croissants. On donne sa représentation spatiale (photo) à t = 0.



1) L'onde s'écrit-elle sous la forme $F(x-ct)$? $G(x+ct)$? $f\left(t-\frac{x}{c}\right)$? $g\left(t+\frac{x}{c}\right)$? Justifier.
2) Ecrire les fonctions $F_1(x)$ et $F_2(x)$ représentant respectivement l'avant de l'onde et l'arrière de l'onde à t = 0. En déduire les fonctions $F_1(x,t)$ et $F_2(x,t)$ à $t \neq 0$.
3) Représenter l'onde à t = 1 s et t = 2 s. Confirmer l'écriture mathématique $F_1(x,1)$.
4) Un capteur se trouve à la position x_D = 7 m. Représenter la forme d'onde (chronogramme) $y_D(t)$.
5) L'onde se réfléchissant sur un mur situé à x_m = 11m, représenter l'onde à t = 3 s, puis t = 4 s.
6) Ecrire les fonctions $G_1(x,4)$ et $G_2(x,4)$ représentant respectivement l'avant de l'onde et l'arrière de l'onde réfléchie à t = 4s.

Ondes Progressives — Exercice 1



1) $F(x - ct)$ ou $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ car propagation dans le sens des x croissants.

2) $F_1(x) = ax + b$ fonction affine, passant par les points $A(3,0)$ et $B(1,2)$

$$\begin{cases} 3a + b = 0 & (1) \\ a + b = 2 & (2) \end{cases}$$

$(1)-(2)$: $2a = -2 \Rightarrow a = -1$.

(2) : $b = 2 - a = 2 - (-1) = 3$.

D'où : $\underline{F_1(x) = 3 - x}$

$\underline{F_2(x) = 2x}$ car passant par le point $(0,0)$ et de coefficient directeur 2.

Étant donné $c = 4\ m.s^{-1}$, on peut écrire :

$$F_1(x,t) = 3 - (x - 4t) = \underline{3 - x + 4t}$$

$$F_2(x,t) = 2(x - 4t) = \underline{2x - 8t}.$$

3) $t = 1\,s \rightarrow$ Voir schéma - - - -

$t = 2\,s \rightarrow$ Voir schéma + + +

$F_1(x,1) = 3 - x + 4 = 7 - x$

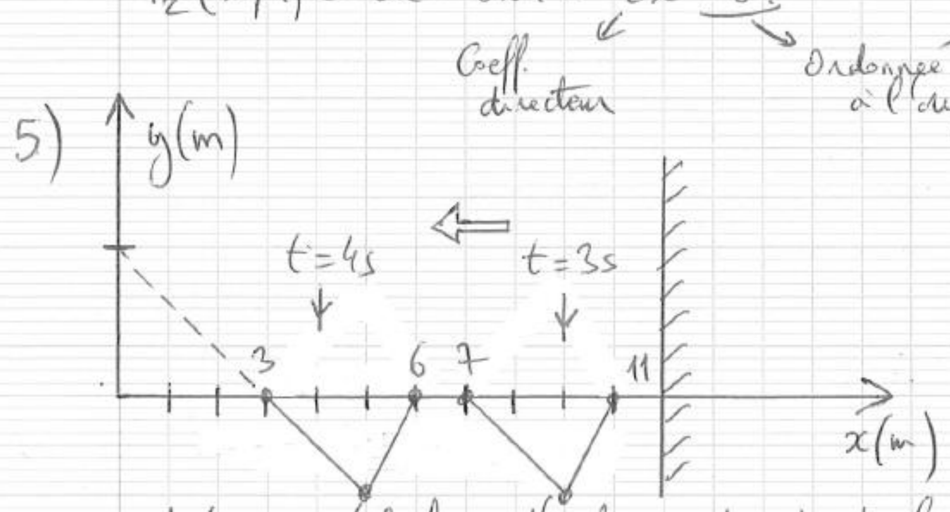
7 → Ordonnée à l'origine → voir schéma.

$-x$ → Coeff. directeur.

$F_2(x,1) = 2x - 8\times 1 = 2x - 8.$

Coeff. directeur — Ordonnée à l'origine.

5)

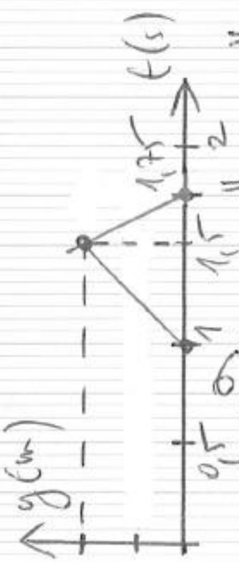


A $t = 2s$, le front d'onde avait atteint le mur

⇒ A $t = 3s$, le front d'onde a "avancé" (dans le sens des x décroissants) de 4 m et se trouve à $x = 7m$.

⇒ A $t = 4s$, le front d'onde se trouve à $x = 3m$.

Forme d'onde vers le bas :



Voir simulation

6) $G_1(x,4) = 3 - x$. (Ordonnée à l'origine 3, coeff directeur 1).

$G_2(x,4) = -12 + 2x$ (Ordonnée à l'origine -12, coeff directeur 2).

4) le front d'onde (A) atteint le capteur en

$$\Delta t_A = \frac{7-3}{4} = 1\,s$$

Le sommet de l'onde (B) atteint le capteur en

$$\Delta t_B = \frac{7-1}{4} = 1,5\,s$$

L'arrière de l'onde (C) atteint le capteur en

$$\Delta t_C = \frac{7-0}{4} = 1,75\,s.$$

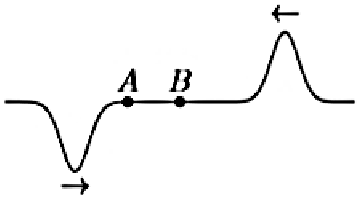
2

Exercice 2 : Deux ondes sur une corde

Simulateur : https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_fr.html

Considérons la corde représentée ci-contre sur laquelle deux ondes progressives se propagent en sens contraire.

1. Tracer l'allure de la corde à quelques instants, en particulier quand les centres des deux ondes se superposent.
2. Commenter l'aspect de la corde lorsque les deux ondes se superposent exactement. Quelle est la différence avec une corde au repos ?
3. Représenter graphiquement (chronogramme) l'altitude de A et B au cours du temps.



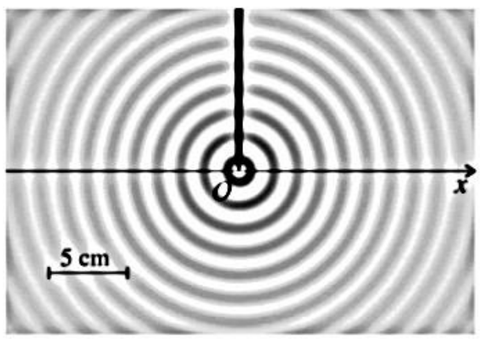
1. Superposition des 2 déformations
⇒ Neutralisation progressive.

2. Neutralisation ⇒ Corde horizontale.
Différence : corde en mouvement c'est à dire horizontale uniquement à un instant donné.

3. Le point A va d'abord descendre puis remonter.
Le point B ne bouge pas.

Exercice 3 : Cuve à ondes

La figure ci-contre représente la surface d'une cuve à ondes éclairée en éclairage stroboscopique bien accordé. L'onde est générée par un vibreur de fréquence f = 20 Hz. Lorsque la surface de l'eau est convexe (bosse), l'image est claire ; lorsque la surface de l'eau est concave (creux), l'image est foncée. Ainsi, le niveau de gris indique la hauteur d'eau dans la cuve.



1. Mesurer la longueur d'onde sur la figure.
2. En déduire la célérité de l'onde.
3. En supposant l'onde harmonique d'amplitude H, donner une expression mathématique pour la hauteur d'eau $h(x,t)$. Distinguez les cas $x < 0$ et $x > 0$.
4. Expliquer pourquoi l'amplitude H n'est en fait pas constante.

1. $\lambda = 1{,}5$ cm

2. $\lambda = cT = \dfrac{c}{f}$

d'où : $c = \lambda . f$
$= 1{,}5 . 10^{-2} \times 20$
$= 0{,}3 \ m.s^{-1}$

3. $h(x,t) = H_0 + H_m \cos(2\pi f t - kx + \varphi_0)$
pour $x > 0$
$h(x,t) = H_0 + H_m \cos(2\pi f t + kx + \varphi_0)$
pour $x < 0$

4. Dissipation de l'énergie sous 2 formes :
* Onde "sphérique" ou circulaire
⇒ étalement.
* Frottements

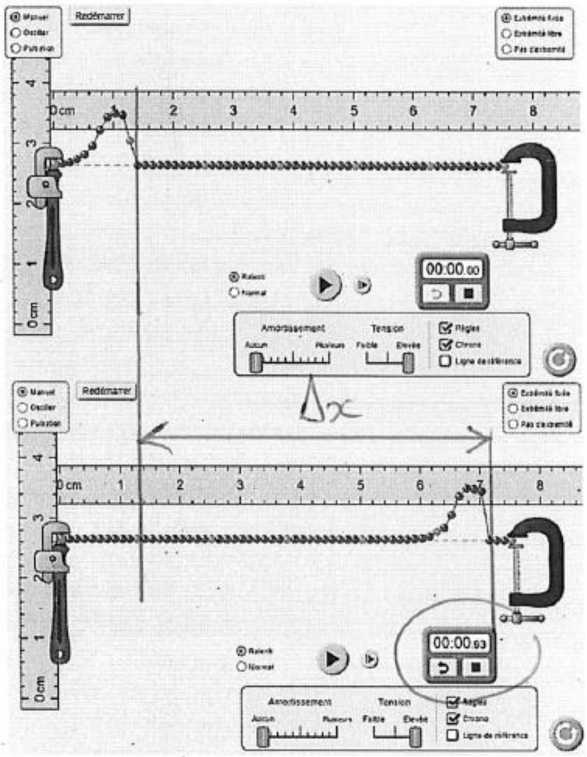
Exercice 4

On utilise le simulateur :

https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_fr.html

1. **Onde progressive : propagation d'une perturbation.**

➢ Calculer la célérité de l'onde.



$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\Delta x = 7{,}2 - 1{,}4 = 5{,}8 \text{ m}$$

$$\Delta t = 0{,}93 \text{ s}$$

d'où :

$$c = \frac{5{,}8}{0{,}93} = \underline{6{,}2 \text{ m.s}^{-1}}$$

2. **Onde progressive harmonique**

➢ Pour le cas 1 :

- Mesurer la longueur d'onde,
- La retrouver par le calcul.

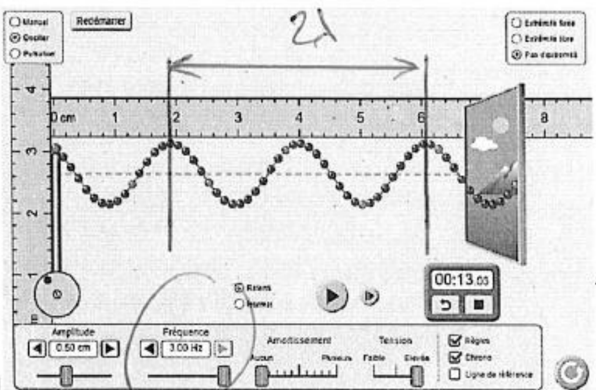
$$2\lambda = 6{,}1 - 1{,}9 = 4{,}2 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \lambda = \underline{2{,}1 \text{ m}}$$

Calcul :

$$\lambda = c \cdot T = \frac{c}{f}$$

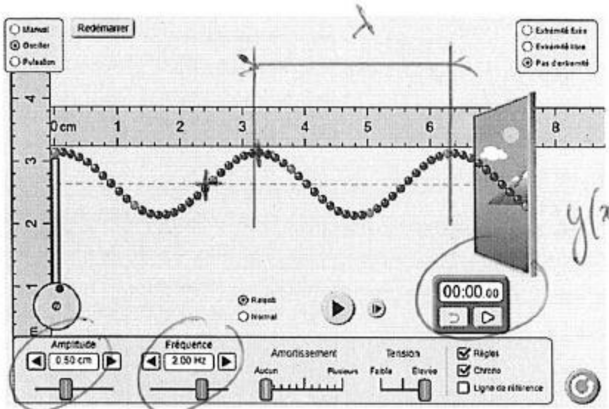
$$\lambda = \frac{6{,}2}{3} = \underline{2{,}1 \text{ m}}$$



Cas 1

- Pour le cas 2 :
  - Mesurer la longueur d'onde,
  - A partir de la photo à t = 0 et des calculs précédents, proposer une écriture mathématique de l'onde,
  - Appliquer cette écriture pour vérifier la cohérence de certains points (passage par zéro, maximum, ...).

Cas 2



On mesure $\lambda = 6{,}4 - 3{,}2 = \underline{3{,}2 \text{ m}}$

$y(x,t) = 0{,}50 \cos(\omega t - kx)$

$\omega = 2\pi f = 4\pi \text{ rad.s}^{-1}$

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2{,}0 \text{ rad.m}^{-1}$

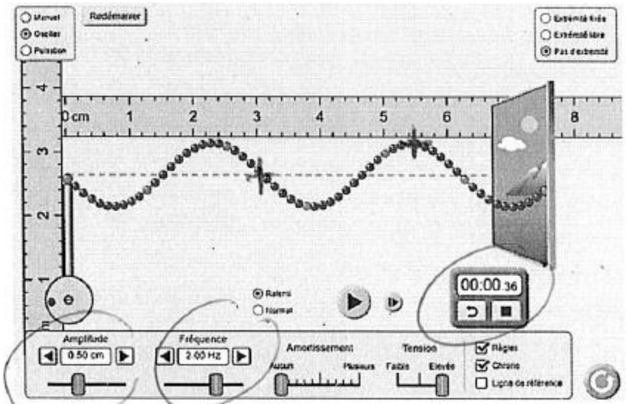
Exemples : * $t = 0$ $x = 2{,}4$

$\Rightarrow y = 0{,}50 \cos\overset{-\frac{3\pi}{2}}{(-2{,}0 \times 2{,}4)} \simeq 0$

* $t = 0$ $x = 3{,}2$

$\Rightarrow y = 0{,}50 \cos\overset{-2\pi}{(-2{,}0 \times 3{,}2)} \simeq 0{,}50$

  - Appliquer cette écriture à la photo à t = 0,36 s pour vérifier la cohérence de certains points (passage par zéro, maximum, ...).



Exemples : * $t = 0{,}36 \text{ s}$ $x = 3$

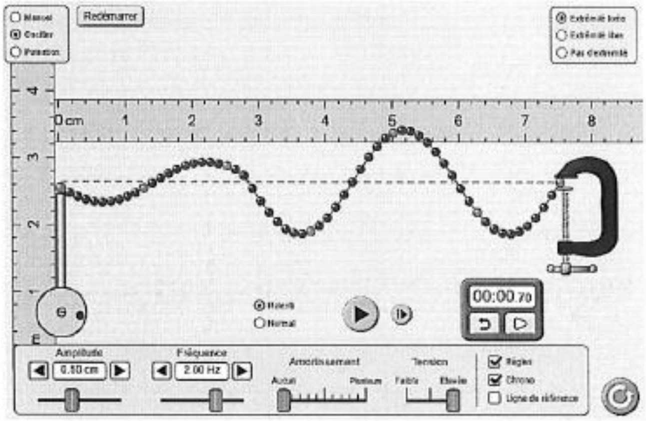
$\Rightarrow y = 0{,}50 \cos(4\pi \times 0{,}36 - 2{,}0 \times 3) \simeq 0$

* $t = 0{,}36 \text{ s}$ $x = 5{,}5$

$\Rightarrow y = 0{,}50 \cos(4\pi \times 0{,}36 - 2{,}0 \times 5{,}5) \simeq 0{,}50$

3. Interférences et ondes stationnaires

A partir d'une onde sinusoïdale harmonique incidente, il apparait maintenant une onde sinusoïdale harmonique réfléchie, à cause de l'extrémité fixée de la corde.



- Quel phénomène a lieu entre l'onde incidente et l'onde réfléchie ?
- En considérant les 2 extrémités de la corde comme des nœuds, appliquer les conditions aux limites, et retrouver les fréquences des différents modes propres.

$\rightarrow$ Interférences

$\rightarrow$ $y(x,t) = Y\cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)$

Conditions aux limites :

$$\begin{cases} y(0,t) = 0 \quad \forall t \\ y(L,t) = 0 \quad \forall t \end{cases}$$

$$y(0,t) = Y\cos(\omega t + \varphi)\cos(\psi) = 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \cos\psi = 0$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$y(L,t) = Y\cos(\omega t + \varphi)\cos\left(kL + \frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0 \quad \forall t$$

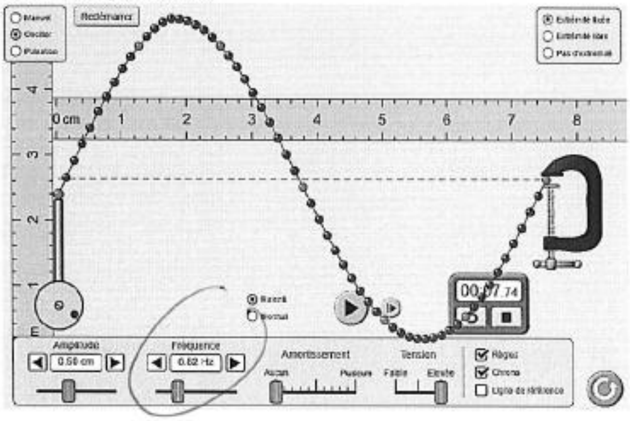
$$\Rightarrow \cos\left(kL + \frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0$$

$$\Rightarrow kL + \cancel{\frac{\pi}{2}} + n\pi = \cancel{\frac{\pi}{2}} + n'\pi$$

$$\Rightarrow kL = (n' - n)\pi = N\pi$$

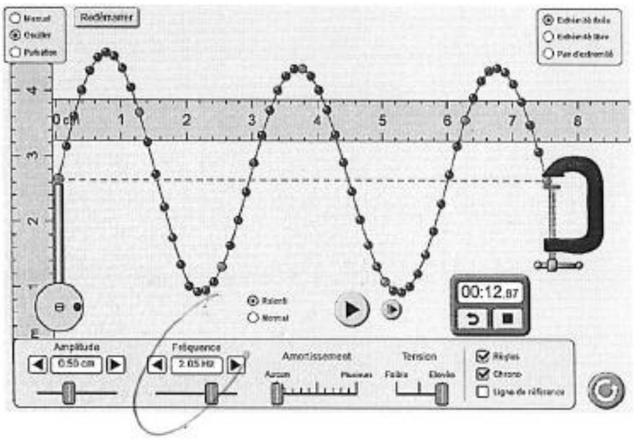
$$k_N = \frac{N\pi}{L} \qquad \frac{\omega_N}{c} = \frac{N\pi}{L} \qquad \omega_N = \frac{N\pi c}{L} \qquad f_N = \frac{\omega_N}{2\pi} = \frac{Nc}{2L}.$$

➢ Les 2 enregistrements suivants sont-ils en accord avec vos calculs ? Déterminer les valeurs de n correspondantes.



$N = 2$

$$f_N = \frac{2 \times 6{,}2}{2 \times 7{,}5} = 0{,}82 \text{ Hz}$$



$N = 5$

$$f_N = \frac{5 \times 6{,}2}{2 \times 7{,}5} = 2{,}06 \text{ Hz}$$

Exercice 5 : Ondes sonores et interférences

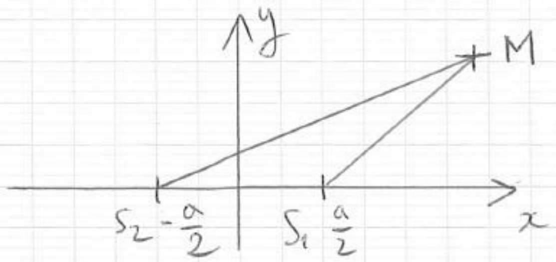
On dispose de 2 sources sonores distantes entre elles d'une distance a, les positions de ces deux sources étant repérées dans un système d'axes (Ox, Oy) par leurs coordonnées S_1 (a/2, 0) et S_2 (-a/2, 0).

Ces deux sources sont alimentées par le même générateur, délivrant un signal sinusoïdal de fréquence f.

On notera $s_i(S_i, t)$ le signal émis par chaque source au niveau de la source, et on supposera qu'il y a absence d'atténuation. On prendra pour la célérité c du son dans l'air c = 340 m.s^{-1}.

1) Faire un schéma. Exprimer le signal dû à chaque source en tout point M du plan (Ox, Oy) en fonction de $d_1 = S_1M$ et $d_2 = S_2M$.
2) Quelle est l'expression du signal résultant en M ? Déterminer son amplitude.
3) En déduire les conditions sur $d_2 - d_1$ et la longueur d'onde λ pour que les interférences en M soient constructives puis pour qu'elles soient destructives.
4) On effectue à l'aide d'un microphone des enregistrements du son en différents points de l'espace, ce qui permet de remarquer qu'en tout point M de l'axe Ox tels que $x > a/2$ le son est très faible.
   a) Quelle-est alors la relation entre a et λ ?
   b) Pourquoi le son n'est-il pas nul ?
   c) Que peut-on en déduire pour les points de l'axe Ox tels que $x < -a/2$?
5) On s'intéresse à présent aux points situés sur l'axe Ox entre les deux sources sonores S_1 et S_2. Déterminer la position des points de ce segment S_1S_2 correspondant à des maximas du signal.
6) On suppose dorénavant que la distance entre les deux sources vaut a = 0,2 m. Soit un point M de coordonnées (1 m ; 0,5 m). Pour quelles fréquences du domaine audible par l'homme l'amplitude du son y est-elle maximale ? Dans quelle gamme de fréquences se situent-elles ?

Exercice 5 : Ondes sonores et interférences



1) En M : $s_1(t) = S_m \cos(\omega t - kd_1)$
$s_2(t) = S_m \cos(\omega t - kd_2)$

2) $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$
$= S_m \left[\cos(\omega t - kd_1) + \cos(\omega t - kd_2)\right]$

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$s(t) = 2S_m \cos\left(\omega t - k\frac{d_1+d_2}{2}\right)\cos\left(k\frac{d_2-d_1}{2}\right)$

$= \underbrace{2S_m \cos\left(k\frac{d_2-d_1}{2}\right)}_{\text{Amplitude}} \cos\left(\omega t - k\frac{d_1+d_2}{2}\right)$

3) Interférences constructives : Amplitude max.

$\cos k\frac{d_2-d_1}{2} = \pm 1$

$k\frac{d_2-d_1}{2} = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

$\frac{2\pi}{\lambda} = k$

$\boxed{d_2 - d_1 = \frac{2n\pi}{k} = n\lambda \quad n \in \mathbb{Z}}$

$\frac{2\pi}{k} = \lambda$

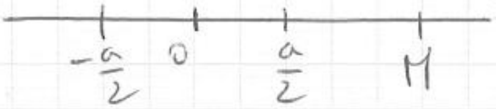
Interférences destructives : Amplitude nulle

$\cos k\frac{d_2-d_1}{2} = 0$

$$k\frac{d_2-d_1}{2} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$$

$$\boxed{d_2-d_1 = \left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda \quad n\in\mathbb{Z}}$$

4/a) Si $M \in Ox$ et $x > \frac{a}{2}$, alors :



D'où : $d_1 = x - \frac{a}{2}$ $\quad d_2 = x + \frac{a}{2}$

$d_2 - d_1 = a$

Son très faible

$\Leftrightarrow$ Interférences destructives en tout point

$\Leftrightarrow d_2 - d_1 = \left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda$

$\Leftrightarrow a = \left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda$

b) Son non nul car chaque onde subit une atténuation

$\Rightarrow$ les amplitudes S_{1m} et S_{2m} ne sont pas les mêmes en M

$\Rightarrow$ Interférences non totalement destructives.

c) Pour $x < -\frac{a}{2}$

$d_2 - d_1 = -a = -\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda$ même phénomène.

5)

D'où : $d_1 = \frac{a}{2} - x$ $\qquad d_2 = \frac{a}{2} + x$

$d_2 - d_1 = 2x$

Interférences constructives (maxima) :

$$d_2 - d_1 = n\lambda$$
$$2x = n\lambda$$
$$x = \frac{n\lambda}{2} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

6) $S_1\left(\frac{a}{2}; 0\right)$ $\qquad S_2\left(-\frac{a}{2}; 0\right)$ $\qquad M(1m ; 0{,}5m)$

AN $S_1(0{,}1 ; 0)$ $\qquad$ AN $S_2(-0{,}1 ; 0)$

D'où :

$$d_2 - d_1$$
$$= \sqrt{(x_M - x_{S_2})^2 + (y_M - y_{S_2})^2} - \sqrt{(x_M - x_{S_1})^2 + (y_M - y_{S_1})^2}$$
$$= \sqrt{(1-0{,}1)^2 + 0{,}5^2} - \sqrt{(1+0{,}1)^2 + 0{,}5^2}$$
$$= -0{,}179 \text{ m}$$

Amplitude maximale

$\Leftrightarrow$ Interférences constructives

$$d_2 - d_1 = n\lambda \qquad n \in \mathbb{Z}$$
$$-0{,}179 = n\frac{c}{f}$$
$$f = \frac{nc}{-0{,}179} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$c = 340 \text{ m.s}^{-1}$

$f = \frac{nc}{0,179}$

n	f
-1	$f = \frac{1 \times 340}{0,179} = 1,9$ kHz
-2	$3,8$ kHz
-3	$5,7$ kHz
$\vdots$	
-10	19 kHz

Audible [20 Hz ; 20 kHz]

Exercice 6 : Nœuds et des ventres

Considérons une onde stationnaire d'expression $s(x,t) = A\sin(kx)\cos(\omega t + \varphi)$. Etablir les expressions des positions des nœuds et des ventres associés.

Positions x_N des nœuds telles que $\forall t, y(0,t) = 0$ avec $\boldsymbol{y(x,t) = A\,sin(\omega t + \varphi)\,sin(kx)}$, soit $\boldsymbol{\sin(kx_N) = 0}$

d'où kx_N $= 0[\pi]$

Les différents nœuds ont alors comme positions $kx_{N,p} = p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$ soit $\frac{2\pi}{\lambda}\ x_{N,p} = p\pi$ ou encore $x_{N,p} = \frac{p\lambda}{2}$

Distance entre deux nœuds successifs : $x_{N,p+1} - x_{N,p} = \frac{\lambda}{2}$. Tout fuseau a une taille de $\frac{\lambda}{2}$.

Positions x_v des ventres telles que l'amplitude $\mathcal{A}(x) = |\boldsymbol{A\,sin(kx)}|$ soit maximale soit $\boldsymbol{sin(kx_v) = \pm 1}$,

d'où kx_v $= \frac{\pi}{2}[\pi]$

Les différents nœuds ont alors comme positions $kx_{v,p} = \frac{\pi}{2} + p\pi = \frac{\pi}{2}(1 + 2p)$ avec $p \in \mathbb{Z}$ soit $\frac{2\pi}{\lambda}\ x_{v,p} = \frac{\pi}{2}(1 + 2p)$ ou encore $x_{v,p} = \frac{\lambda}{4} + \frac{p\lambda}{2}$

Distance entre deux ventres successifs : $x_{v,p+1} - x_{v,p} = \frac{\lambda}{2}$.

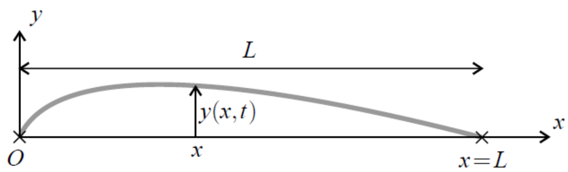
Distance entre un nœud et une ventre successifs : $\frac{\lambda}{4}$

Exercice 7 : Modes propres

On considère une corde de longueur L fixée aux 2 extrémités (en $x = 0$ et en $x = L$) oscillant selon :

$$\boldsymbol{y(x,t) = A\cos(kx + \psi)\cos(\omega t + \varphi)}$$

Etablir les caractéristiques des modes propres en rappelant le lien entre les différentes grandeurs caractéristiques.



Corde vibrante fixée à ses deux extrémités.

Deux conditions aux limites : $\boldsymbol{\forall t, y(0,t) = 0}$ **et** $\boldsymbol{\forall t, y(L,t) = 0}$

Avec $\boldsymbol{y(x,t) = A\,cos(\omega t + \varphi)\,cos(kx + \psi)}$, les conditions aux limites donnent : $cos(\psi) = 0$ (1) et $cos(kL + \psi) = 0$ (2)

(1) $\Rightarrow \psi = \pm\frac{\pi}{2}$ et (2) $\Rightarrow cos\left(kL \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$ $\Rightarrow sin(kL) = 0$ $\Rightarrow k_n L = n\pi$, avec n entier

Modes propres : avec $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{L} = \boldsymbol{n}\frac{\lambda_n}{2}$; $\boldsymbol{k_n} = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \boldsymbol{n}\frac{\pi}{L}$; $\boldsymbol{\lambda_n} = \boldsymbol{cT_n} = \frac{c}{f_n} = \frac{2L}{n}$; $\boldsymbol{f_n} = \boldsymbol{n}\,\frac{c}{2L}$; $\boldsymbol{\omega_n} = \boldsymbol{2\pi f_n} = \boldsymbol{n}\frac{\pi c}{L}$;

Exercice 8 : Caractéristiques d'une onde stationnaire

On souhaite étudier la propagation d'ondes de la forme : $y(x,t) = Y_0(x)\sin(\omega t)$ où ω est la pulsation de l'onde et $Y_0(x)$ est une fonction que l'on souhaite étudier.

1) Comment qualifie-t-on la solution $y(x,t)$ décrivant une onde pour laquelle les dépendances spatiale x et temporelle t interviennent séparément ?

2) Montrer que $Y_0(x)$ doit vérifier l'équation $\frac{d^2Y_0(x)}{dx^2} + k^2Y_0(x) = 0$ où $k = \frac{\omega}{v} > 0$.

$y(x,t) = Y_0(x)\sin(\omega t)$ doit être solution de l'équation de d'Alembert : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Y_0(x)\sin(\omega t)) = \frac{d^2Y_0}{dx^2}\sin(\omega t)$ et $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(Y_0(x)\sin(\omega t)) = -\omega^2 Y_0(x)\sin(\omega t)$ d'où

$$\frac{d^2Y_0}{dx^2}\sin(\omega t) - \frac{1}{v^2} \times (-\omega^2)Y_0(x)\sin(\omega t) = 0$$

soit

$$\left(\frac{d^2Y_0}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2}Y_0(x)\right)\sin(\omega t) = 0$$

ceci devant être vrai à chaque instant, on en déduit que $\boldsymbol{Y_0(x)}$ **est solution de l'équation**

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{d^2Y_0(x)}{dx^2} + k^2Y_0(x) = 0 \text{ avec } k = \frac{\omega}{v}}}$$

Les solutions de l'équation précédente sont de la forme : $Y_0(x) = A\cos(kx + \varphi)$ avec A et φ deux constantes.

Exercice 9 : Corde de guitare

Les cordes d'une guitare sont en acier de masse volumique ρ = 7,87.10^3 kg.m^{-3}.

La corde la plus aiguë a un diamètre Φ = 3,00.10^{-4} m et une longueur L = 64,0 cm, et elle est tendue avec une tension T = 100 N. Quelle est la note la plus grave qu'une telle corde puisse émettre ?

Note (3$^{\text{ème}}$ octave)	Do3	Do♯3	Ré3	Ré♯3	Mi3	Fa3	Fa♯3	Sol3	Sol♯3	La3	Si♭3	Si3
Fréquence (Hz)	262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	466	494

Note la plus grave donnée par la fréquence du fondamental, tel que $L = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{c}{2f_1}$ avec $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{TL}{m}}$ et $m = \rho V = \frac{\rho L \pi \Phi^2}{4}$

$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{TL}{m}} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4T}{\rho\pi\Phi^2}}$ AN : $f_1 \approx 330\ Hz$: Mi3

Exercice 10 : Modes propres d'une corde fixée aux 2 extrémités

On considère une corde attachée à ses deux extrémités en $x = 0$ et $x = L$. On cherche des modes de vibrations en ondes stationnaires de la forme $y(x,t) = A\sin(kx+\phi)\cos(\omega t)$ où ω et k sont choisis positifs et $\phi \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Déterminer l'expression de k en fonction de ω et c la célérité des ondes sur la corde.
2. En utilisant la condition en $x = 0$, déterminer la valeur de ϕ.
3. En utilisant la condition en $x = L$, montrer que la pulsation ω ne peut prendre que des valeurs quantifiées :

$$\omega_n = n\frac{\pi c}{L}$$

   où n est un entier strictement positif.
4. Pour le mode fondamental correspondant à $n = 1$, représenter l'allure de la corde aux instants $t = 0$, $t = \frac{L}{2c}$ et $t = \frac{L}{c}$.
5. Pour le mode correspondant à $n = 2$, représenter l'allure de la corde aux instants $t = 0$, $t = \frac{L}{4c}$ et $t = \frac{L}{2c}$.

1. ωt en rad. $\Rightarrow$ ω en rad.s^{-1}
kx en rad.
$\Rightarrow$ k en rad.m^{-1}
Homogène à $\dfrac{\omega}{c}$ ($\omega \rightarrow$ rad.s^{-1}, $c \rightarrow$ m.s^{-1})

2. $y(0,t) = 0 \quad \forall t$
$A\sin(\phi)\cos(\omega t) = 0 \quad \forall t$
$A\sin(\phi) = 0$
$\sin\phi = 0$ et $\phi \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$\phi = 0$

3. $y(L,t) = 0 \quad \forall t$
$A\sin(kL)\cos(\omega t) = 0 \quad \forall t$
$\sin(kL) = 0$
$kL = n\pi$ Cercle trigo !
$k_n = \dfrac{n\pi}{L}$
$k = \dfrac{\omega}{c}$
$\omega = kc$
$\omega_n = \dfrac{n\pi c}{L}$

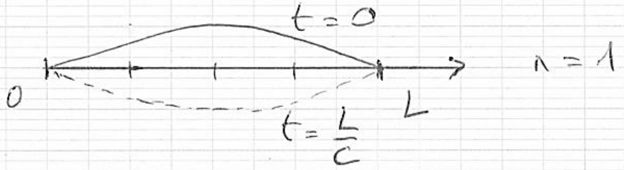
4. $t = 0 \Rightarrow y(x,t) = A\sin k_1 x$.
$t = \dfrac{L}{2c} \Rightarrow y(x,t) = A\sin k_1 x \cos\left(\dfrac{\omega L}{2c}\right)$
avec $\omega = \omega_1 = \dfrac{\pi c}{L}$
$y(x,t) = A\sin k_1 x \cos\left(\dfrac{\pi \cancel{c}}{\cancel{L}} \dfrac{\cancel{L}}{2\cancel{c}}\right)$
$= 0$

$t = \frac{L}{c} \Rightarrow y(x,t) = A \sin k_1 x \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right)$

avec $\omega = \omega_1 = \frac{\pi c}{L}$

$y(x,t) = A \sin k_1 x \cos\left(\frac{\pi \cancel{c}}{\cancel{L}} \frac{\cancel{L}}{\cancel{c}}\right)$

$= - A \sin kx$



5. $t = 0 \Rightarrow y(x,t) = A \sin k_2 x$

$t = \frac{L}{4c} \Rightarrow y(x,t) = A \sin k_2 x \cos\left(\frac{\omega L}{4c}\right)$

avec $\omega = \omega_2 = \frac{2\pi c}{L}$

$y(x,t) = A \sin k_2 x \cos\left(\frac{2\pi \cancel{c}}{\cancel{L}} \frac{\cancel{L}}{4\cancel{c}}\right)$

$= 0$

$t = \frac{L}{2c} \Rightarrow y(x,t) = -A \sin k_2 x$