CPGE ATS

Programme de colles – Semaine 22 (31 mars au 4 avril 2025)

Chapitres étudiés et questions de cours :

M6 : Ondes mécaniques transversales : ondes progressives ET ondes stationnaires

EM3 : Ondes électromagnétiques (début) : ondes progressives uniquement, pas de vecteur de Poynting

Réponses attendues en bleu ou manuscrit.

1ère question de cours : questions 1 à 7

2ème question de cours : questions 8 à 13

1) Donner le modèle mathématique d'une onde plane progressive se propageant à la célérité c dans le sens des x croissants.

$y(x,t) = F(x - ct)$ avec F fonction quelconque

Pour $t = 0$, $y(x,0) = F(x)$

La fonction F correspond à la représentation spatiale à $t = 0$.

Autre expression :

$y(x,t) = f(t - \frac{x}{c})$ avec f fonction quelconque

Pour $x = 0$, $y(0,t) = f(t)$

La fonction f correspond à la représentation temporelle en $x = 0$.

2) Donner le modèle mathématique d'une onde plane progressive se propageant à la célérité c dans le sens des x décroissants.

$y(x,t) = G(x + ct)$ avec G fonction quelconque

Pour $t = 0$, $y(x,0) = G(x)$

La fonction G correspond à la représentation spatiale à $t = 0$.

Autre expression :

$y(x,t) = g(t + \frac{x}{c})$ avec g fonction quelconque

Pour $x = 0$, $y(0,t) = g(t)$

La fonction g correspond à la représentation temporelle en $x = 0$.

3) Donner le modèle mathématique d'une Onde Progressive Harmonique OPH y de pulsation ω se propageant à la célérité c dans la direction x. Définir les différents termes.

$$y(x,t) = Y_m \cos(\omega t \pm kx + \varphi)$$

Y_m > 0 est l'amplitude de l'onde

ω > 0 est la pulsation de l'onde (rad.s^{-1})

k > 0 est la norme du vecteur d'onde (rad.m^{-1})

φ est la phase à l'origine (rad)

4) Donner les caractéristiques de la « double périodicité » de l'OPH $y(x,t) = Y_m \cos[\omega t \pm kx + \varphi]$.

L'OPH $Y_m \cos[\omega t \pm kx + \varphi]$ est une fonction « doublement sinusoïdale » :

- A x fixé, elle une fonction sinusoïdale de t (représentation temporelle = chronogramme), de **pulsation temporelle ω.**
- A t fixé, elle est une fonction sinusoïdale de x (représentation spatiale = photo), de **pulsation spatiale k.**

L'OPH possède donc une **double périodicité**, spatiale et temporelle.

	Pulsation	Fréquence	Période
Temporel	ω	f	T
Spatial	$k = \frac{\omega}{c}$	$\sigma = \frac{f}{c}$	$\lambda = \frac{c}{f} = cT$

5) Donner le modèle mathématique d'une Onde Stationnaire Harmonique (OSH).

Forme mathématique générale d'une **Onde Stationnaire Harmonique (OSH)** :

$$\boldsymbol{y(x,t) = Y_m \cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)}$$

Pour une Onde Stationnaire Harmonique (OSH), les termes dépendant du temps $\cos(\omega t + \varphi)$ et de l'espace $\cos(kx + \psi)$ sont **découplés**, contrairement à l'OPH.

Le terme $Y_m|\cos(kx + \psi)|$ représente l'amplitude de vibration locale en x.

6) Donner les 4 équations de Maxwell dans le vide en l'absence de charges ($\rho = 0$) et de courants ($\vec{j} = \vec{0}$) :

Maxwell Gauss : $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ **(1)**

Maxwell Faraday : $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ **(2)**

Maxwell Thomson : $div\vec{B} = 0$ **(3)**

Maxwell Ampère : $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ **(4)**

7) Cas d'une Onde Plane Progressive Harmonique OPPH (= une seule fréquence) ou Monochromatique OPPM (= une seule couleur), avec propagation selon l'axe x, dans le sens des x croissants :
Ecrire mathématiquement $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$.
Définir les différents termes introduits.

Onde Plane Progressive Harmonique (OPPH) :

$\vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{t}) = \vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \vec{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{0}}\cos(\boldsymbol{\omega t} - \boldsymbol{kx} + \boldsymbol{\varphi_0})$ avec $E_0 = cte$

$\vec{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{t}) = \vec{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \vec{\boldsymbol{B}}_{\mathbf{0}}\cos(\boldsymbol{\omega t} - \boldsymbol{kx} + \boldsymbol{\varphi_0}')$ avec $B_0 = cte'$

$\boldsymbol{\omega}$: pulsation temporelle (rad.s^{-1})

$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{\omega}}$: période temporelle (s)

$\boldsymbol{\varphi_0}, \boldsymbol{\varphi_0}'$: phases à l'origine des temps et des espaces (rad)

$\boldsymbol{k} = \|\vec{\boldsymbol{k}}\|$: $\vec{\boldsymbol{k}}$ vecteur d'onde (m^{-1})

$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{k}}$: période spatiale ou longueur d'onde (m)

8) Une Onde Progressive Harmonique se propage suivant les *x* croissants. Elle est définie par la fonction :

$y(x,t) = Y_m \cos[\omega t - kx + \varphi]$

Deux capteurs placés à 2 positions x_1 et $x_2 > x_1$ enregistrent 2 signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.

- Exprimer les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.
- Identifier leur phase à l'origine, en déduire le déphasage $\Delta\varphi_{2/1}$ et l'exprimer en fonction de λ.
- Etablir une condition sur x_1, x_2 et λ pour que les signaux soient en phase. Même question pour l'opposition de phase.

$s_1(t) = Y_m \cos[\omega t - kx_1 + \varphi]$ Phase a l'origine : $\varphi_1 = -kx_1 + \varphi$

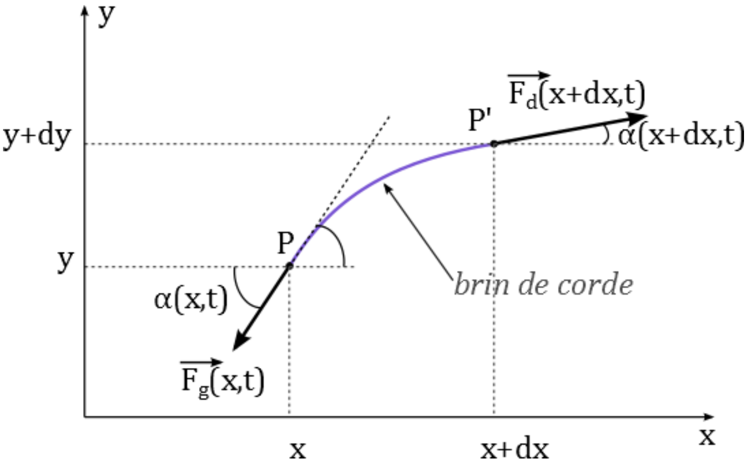
$s_2(t) = Y_m \cos[\omega t - kx_2 + \varphi]$ Phase a l'origine : $\varphi_2 = -kx_2 + \varphi$

$$\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1 = -kx_2 + \varphi + kx_1 - \varphi = -k(x_2 - x_1) = -\frac{\omega}{c}(x_2 - x_1) = -\frac{2\pi}{cT}(x_2 - x_1)$$
$$= -\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)$$

Signaux en phase : $\Delta\varphi_{2/1} = 2n\pi$ ou $-\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = 2n\pi$, on obtient : $\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{n\lambda}$

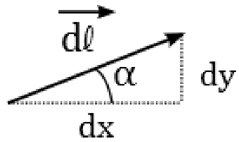
Signaux en opposition de phase : $\Delta\varphi_{2/1} = 2(n+1)\pi$, on obtient : $\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2} = \frac{\boldsymbol{2n+1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\lambda}$

9) Etablir l'équation de propagation d'une onde transversale sur une corde inextensible, sans raideur, homogène et tendue horizontalement.



Système étudié **:** Brin de corde compris entre les points P et P', soit entre les abscisses x et $x + dx,$ de longueur élémentaire $d\ell$ et de masse dm.

On a : $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\ell \cos\alpha \approx \mathrm{d}\ell$ (avec $\alpha \ll 1$), et $\mathrm{d}m = \mu\, \mathrm{d}\ell$ soit $\mathrm{d}m \approx \mu\, \mathrm{d}x$



Bilan des forces exercées sur le système :

- Tension du reste de la corde côté gauche : $\overrightarrow{F_g}(x,t) = -\vec{F}(x,t)$, en x
- Tension du reste de la corde côté droit, $\overrightarrow{F_d}(x + \mathrm{d}x, t) = +\vec{F}(x + \mathrm{d}x, t)$ en $x + \mathrm{d}x$
- Le poids de la corde est négligé.

Relation fondamentale de la dynamique (seconde loi de Newton) dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

$$\mathrm{d}m\, \vec{a} = \overrightarrow{F_g} + \overrightarrow{F_d}$$

soit, avec $\mathrm{d}m = \mu\, dx$ avec μ masse linéique de la corde (kg.m^{-1})

$$\mu\, dx\, \vec{a} = -\vec{F}(x,t) + \vec{F}(x + \mathrm{d}x, t)$$

En coordonnées cartésiennes, l'accélération $\vec{a}$ s'écrit dans le cas général :

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\overrightarrow{u_z}$$

Projection sur Ox de vecteur unitaire $\boldsymbol{\overrightarrow{u_x}}$
Le mouvement étant par hypothèse considéré transversal (mouvement vertical seulement, pas de mouvement selon $\boldsymbol{\overrightarrow{u_x}}$) :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$$

Projection de la relation issue du principe fondamental de la dynamique :

$$0 = -F(x,t)\cos\big(\alpha(x,t)\big) + F(x + \mathrm{d}x, t)\cos\big(\alpha(x + dx, t)\big)$$

soit dans l'approximation des petits angles, en limitant les calculs à l'ordre 1 (soit $cos(\alpha) \approx 1$) :

$$0 = -F(x,t) + F(x + dx, t)$$

$$F(x,t) = F(x + dx, t)$$

La tension du fil est uniforme (indépendante de la position x le long de la corde).

$F(x,t) = F_0$, indépendante de x et t

Projection sur $0y$ de vecteur unitaire $\overrightarrow{\mathbf{u_y}}$

$$\mu\, dx\, \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -F(x,t)\sin\big(\alpha(x,t)\big) + F(x+dx,t)\sin\big(\alpha(x+dx,t)\big)$$

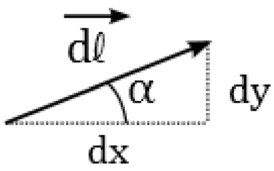
Soit avec $F(x,t) = F(x+dx,t) = F_0$

$$\mu\, dx\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -F_0\sin\big(\alpha(x,t)\big) + F_0\sin\big(\alpha(x+dx,t)\big)$$

Dans l'approximation des petits angles, en limitant les calculs à l'ordre 1 (soit $sin(\alpha) \approx \alpha$) :

$$\mu\, dx\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -F_0\,\alpha(x,t) + F_0\,\alpha(x+dx,t) = F_0\,[\alpha(x+dx,t) - \alpha(x,t)]$$

Or $\quad \alpha(x+dx,t) - \alpha(x,t) = \frac{\partial\alpha}{\partial x}dx$



D'où $\quad \mu\, dx\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_0\frac{\partial\alpha}{\partial x}dx$, soit $\quad \mu\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_0\frac{\partial\alpha}{\partial x}$

En remarquant que $\alpha \approx \tan\alpha \approx \frac{\partial y}{\partial x}$ est la pente de la corde, on a

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Et on obtient une équation qui régit l'évolution de la déformation de la corde $y(x,t)$:

$$\mu\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Equation d'onde de d'Alembert :

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F_0}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

Célérité de l'onde : $\boldsymbol{c} = \sqrt{\frac{F_0}{\mu}}$. en $\boldsymbol{m.s^{-1}}$.

10) Soit une onde stationnaire modélisée par la fonction suivante :

$$\boldsymbol{y(x,t) = A\cos(\omega t)\cos(kx)}$$

a) Définir l'amplitude locale de vibration *A(x).*
b) En déduire la position des ventres de vibration en fonction de la longueur d'onde λ et d'un nombre entier n. Quelle distance sépare 2 ventres ?
c) Même question pour les nœuds de vibration. Quelle distance sépare 2 nœuds ?

d) Quelle distance sépare un ventre et un nœud ?

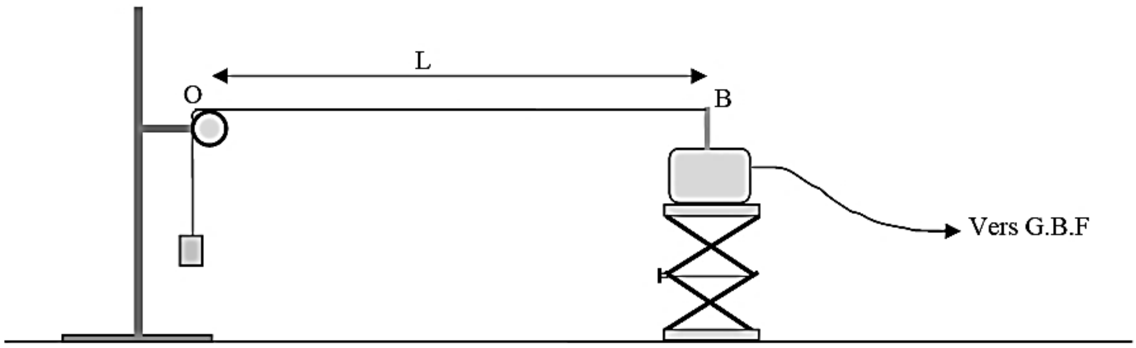
a) $A(x) = A|\cos(kx)|$

b) Ventre : $|\cos(kx)| = 1\ ou \cos(kx) = \pm 1\ ou\ kx = n\pi, on\ obtient\ x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi c}{\omega} = \frac{n\pi cT}{2\pi} = \frac{n\lambda}{2}$; deux ventres séparés par $\frac{\lambda}{2}$.

c) Noeud : $|\cos(kx)| = 0\ ou\ \cos(kx) = 0\ ou\ kx = \frac{\pi}{2} + n\pi, on\ obtient\ x = \frac{\pi}{2k} + \frac{n\pi}{k} = \frac{(2n+1)\lambda}{2}$; deux noeuds séparés par $\frac{\lambda}{2}$.

d) Un ventre et une noeud séparés par $\frac{\lambda}{4}$.

11) Modes propres retrouver les modes propres de la corde de Melde.



Hypothèse : la corde est soumise à une onde stationnaire d'écriture mathématique :

$$\boldsymbol{y(x,t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)}$$

On utilise les conditions aux limites (CL) :

- CL 1 : L'amplitude de vibration est nulle au niveau de la poulie en O : le point d'abscisse $x = 0$ est un nœud :

$$y(0,t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos(\psi) = 0\ \forall\ t$$

$$\cos(\psi) = 0$$

$$\psi = \boldsymbol{\frac{\pi}{2} + n\pi}$$

- CL 2 : L'amplitude de vibration est négligeable au niveau du vibreur en B : le point d'abscisse $x = L$ est un nœud :

$$y(L,t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos(kL + \psi) = 0\ \forall\ t$$

$$\cos(kL + \psi) = 0$$

$$\cos\left(Lx + \frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0$$

$kL + \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\pi}{2} + n'\pi$

$kL = (n' - n)\pi = N\pi$

$$\boldsymbol{k = k_N = \frac{N\pi}{L}}$$

En utilisant $k = \frac{\omega}{c}$ ou $\omega = k.c,$ on obtient :

$$\boldsymbol{\omega_N = \frac{N.\pi.c}{L}}$$

Pour la corde le Melde, les **modes propres N** sont quantifiés par un entier N positif :

Ils s'écrivent mathématiquement :

$\boldsymbol{y_N(x,t) = A\cos(\omega_N t + \varphi_N)\cos(k_N x + \psi_N)}$ ou :

$\boldsymbol{y_N(x,t) = A\cos\left(\frac{N.\pi.c}{L}t + \varphi_N\right)\cos\left(\frac{N.\pi}{L}x + \frac{\pi}{2}\right)}$

12) Etablir l'équation de d'Alembert ou de propagation de $\vec{E}$ dans le vide.

$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{E}\right) - \vec{\Delta}\left(\vec{E}\right)$ (5) (fourni)

$\vec{\Delta}\left(\vec{E}\right) = \vec{\nabla}^2\left(\vec{E}\right)$ Laplacien vectoriel de $\vec{E}$ (voir Analyse Vectorielle) :

Laplacien vectoriel $\Delta\vec{A}$	s'applique à un vecteur retourne un **vecteur**	$\begin{vmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{vmatrix}$	Rq : on trouve parfois la notation $\vec{\Delta}\vec{A}$, qui insiste sur le fait que le laplacien vectoriel retourne un vecteur.

Maxwell Faraday : $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (2)

Maxwell Ampère : $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (4)

(2) => $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right) = \overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

On a aussi :

En l'absence de charges :

(5) => $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{E}\right) - \vec{\Delta}\left(\vec{E}\right) = \overrightarrow{grad}(0) - \vec{\Delta}\left(\vec{E}\right) = -\vec{\Delta}\left(\vec{E}\right)$

D'où :

$$-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\vec{\Delta}(\vec{E})$$

$$\boldsymbol{\vec{\Delta}(\vec{E}) - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \quad \textbf{ou} \quad \boldsymbol{\vec{\Delta}(\vec{E}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

avec $\boldsymbol{\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1}$ avec c célérité (vitesse) de la lumière dans le vide ($c = 3{,}0.10^8\ m.s^{-1}$)

13) Etablir l'équation de d'Alembert ou de propagation de $\vec{B}$ dans le vide.

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot\vec{B}}\right) = \overrightarrow{grad}(div\vec{B}) - \vec{\Delta}(\vec{B}) = -\vec{\Delta}(\vec{B}) \qquad \text{(fourni)}$$

$\vec{\Delta}(\vec{B}) = \vec{\nabla}^2(\vec{B})$ Laplacien vectoriel de $\vec{B}$ (voir Analyse Vectorielle) :

Laplacien vectoriel $\Delta\vec{A}$	s'applique à **un vecteur** retourne un **vecteur**	$\begin{vmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{vmatrix}$	Rq : on trouve parfois la notation $\vec{\Delta}\vec{A}$, qui insiste sur le fait que le laplacien vectoriel retourne un vecteur.

Maxwell Faraday : $\overrightarrow{rot\vec{E}} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (2)

Maxwell Ampère : $\overrightarrow{rot\vec{B}} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (4)

(4) => $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot\vec{B}}\right) = \overrightarrow{rot}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot\vec{E}}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$

On a aussi :

D'où :

$$-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\vec{\Delta}(\vec{B})$$

$$\boldsymbol{\vec{\Delta}(\vec{B}) - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}} \quad \textbf{ou} \quad \boldsymbol{\vec{\Delta}(\vec{B}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

avec $\boldsymbol{\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1}$ avec c célérité (vitesse) de la lumière dans le vide ($c = 3{,}0.10^8\ m.s^{-1}$)

Puis : de 1 à 2 exercices proposés par le colleur.

Programme ATS

14. Ondes	
Onde mécanique transversale	Établir l'équation de propagation dans le cas des ondes transversales d'une corde. Reconnaitre le caractère progressif ou stationnaire d'une onde. Utiliser les conditions aux limites et identifier les modes propres d'une onde stationnaire.

10. Propagation des ondes électromagnétiques	
Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide	Énoncer les équations de Maxwell dans le vide. Interpréter qualitativement le lien entre l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday. Établir l'équation de propagation des champs dans le vide.
Onde plane, onde plane progressive, onde plane progressive harmonique	Définir une onde plane, une onde plane progressive et une onde plane progressive harmonique. Expliquer la pertinence et les limites de ces modèles.
Onde plane progressive monochromatique polarisée Applications aux cavités à une dimension. Mode d'onde stationnaire	Décrire la structure d'une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement. Expliquer la pertinence de ce modèle. Mettre en œuvre un dispositif permettant d'étudier une onde électromagnétique, dans le domaine des ondes centimétriques.