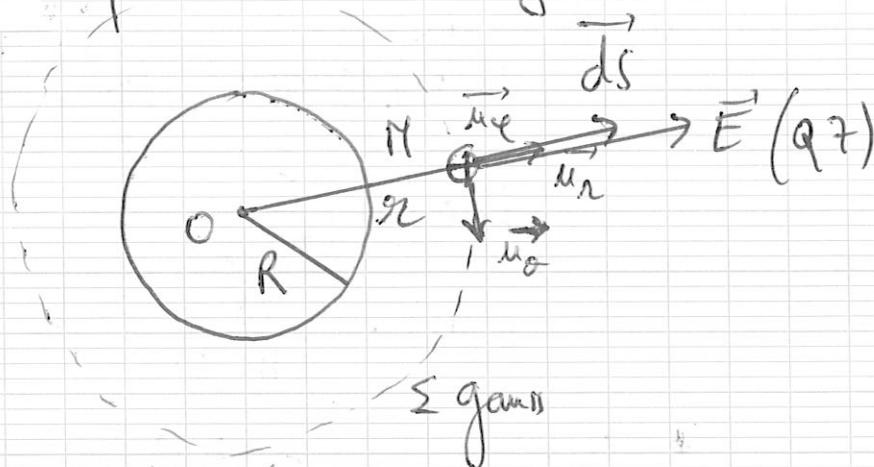


Electrostatique et Théorème de Gauss

19



(2) 6. $Q = \rho V = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$

7. Plans de symétrie:

1 $\pi_1 = (M, \vec{r}_e, \vec{r}_o)$ $\Rightarrow \vec{E} \in \pi_1$
 1 $\pi_2 = (M, \vec{r}_e, \vec{r}_e)$ $\Rightarrow \vec{E} \in \pi_2$
 $\Rightarrow \vec{E}$ suivant $\vec{r}_e$

(4)

1 Invariances en rotation suivant θ et φ
 1 $\Rightarrow \vec{E} = E(r) \cdot \vec{r}_e$

18. Surface de Gauss Σ : Sphère de rayon r .
 Théorème de Gauss:

1 $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

(8)

$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Sigma} E \cdot dS$ car $\vec{E} \parallel d\vec{S}$
 $= \oint_{\Sigma} E(r) \cdot dS = E(r) \cdot \oint_{\Sigma} dS = E(r) \cdot S_{\Sigma}$
 $= E(r) \cdot 4\pi r^2$

2

Disposition de cas:

1 * $r > R \Rightarrow Q_{int} = Q$
 1 * $r < R \Rightarrow Q_{int} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = Q \left(\frac{r}{R} \right)^3$

On en déduit :

* $r > R$

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

* $r < R$

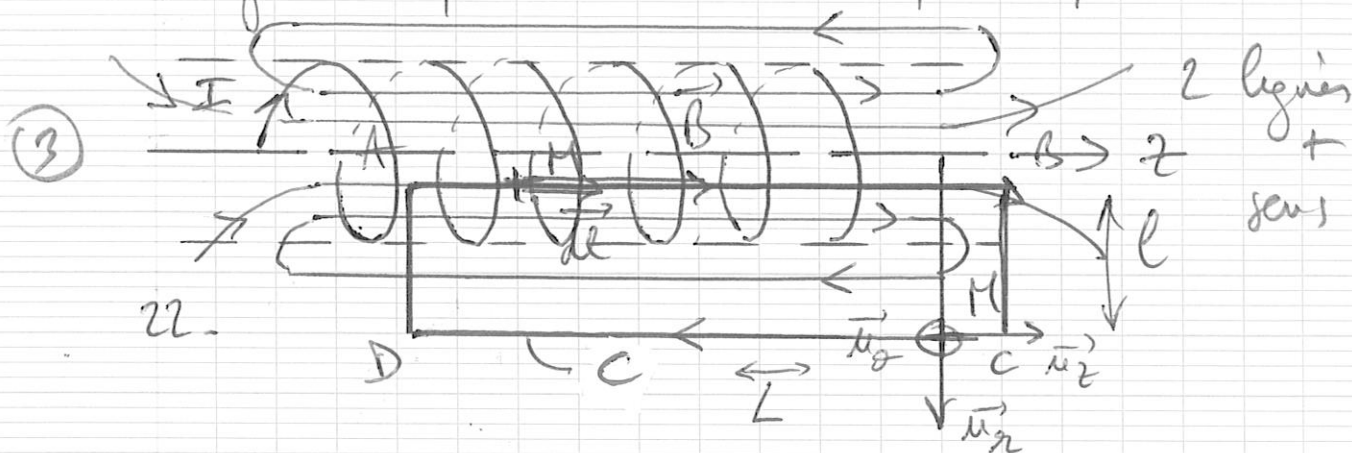
$$E(r) = \frac{Q \left(\frac{r}{R}\right)^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{u}_r$$

$$= \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r$$

Magnétostatique et Théorème d'Ampère

14



Plan de symétrie $\Pi : (M, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

$\Rightarrow \vec{B} \perp \Pi$

$\Rightarrow \vec{B}$ suivant $\vec{u}_z$.

(4)

Invariances par translation - suivant z

en rotation suivant θ -

$\Rightarrow \vec{B} = B(z) \cdot \vec{u}_z$

24. Contour d'Ampère C: Rectangle dans le plan Π , longueur L , largeur l . (ABCD)

Théorème d'Ampère:

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{el} = \mu_0 I_e$

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{el} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{el} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{el} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{el} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{el}$

$= B \cdot L + 0 + 0 + 0$

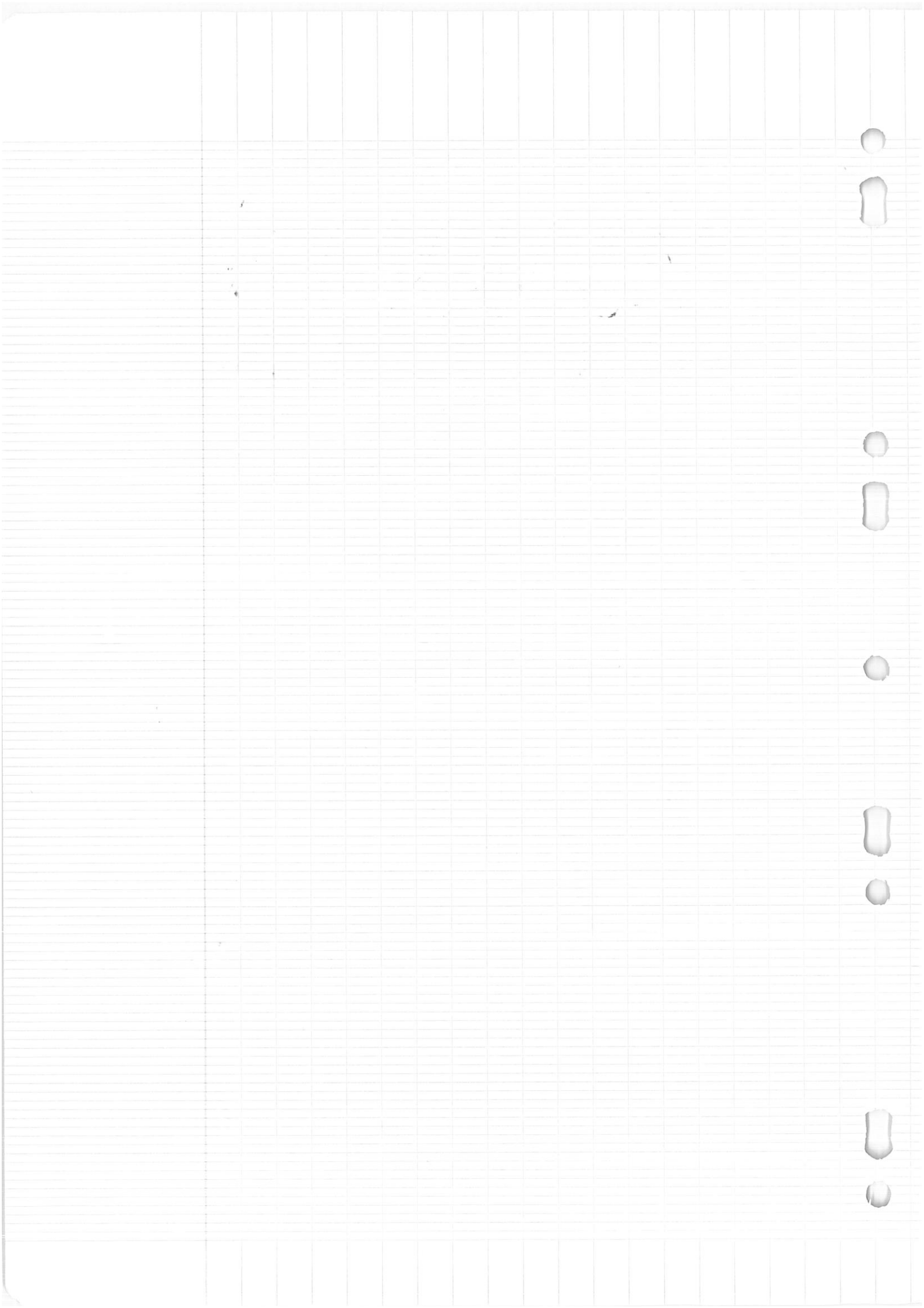
$= BL$

$\mu_0 I_e = NI$
Donc:

$B \cdot L = \mu_0 NI$

$B = \mu_0 \frac{N}{L} I = \mu_0 n I$

$\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{u}_z$



Isolation ruiche

142

$$1. \phi = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}$$

ϕ en W

j_{th} en W.m⁻²

dS en m²

(4)

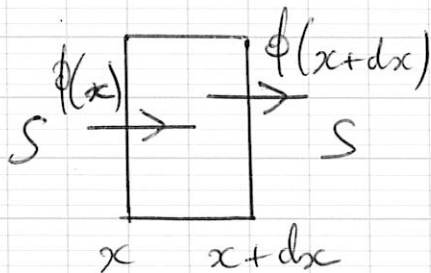
$$1. \phi = j_{th} \cdot S \quad \text{ici}$$

$$2. \vec{j}_{th} = -\lambda_b \cdot \text{grad } T$$

(2)

$$\vec{j}_{th} = -\lambda_b \frac{dT}{dx} \vec{e}_x \quad \text{ici}$$

3.



(4)

Variation d'enthalpie de la tronche de section S , entre les abscisses x et $x+dx$:

$$d^2Q = (\phi(x) - \phi(x+dx)) dt$$

$$\text{Or: } d^2Q = 0 \quad (\text{regime stationnaire})$$

D'où:

$$\phi(x) = \phi(x+dx)$$

$$4. \phi(x+dx) - \phi(x) = 0$$

$$S (j_{th}(x+dx) - j_{th}(x)) = 0$$

$$S \cdot \frac{dj_{th}}{dx} dx = 0$$

2

$$S \cdot \frac{d}{dx} \left(-\lambda_b \frac{dT}{dx} \right) dx = 0$$

D'où:

2

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad \text{En intégrant 2 fois par rapport à } x:$$

$$\underline{T(x) = ax + b}$$

2

$$\text{CL1: } T(0) = T_i = b$$

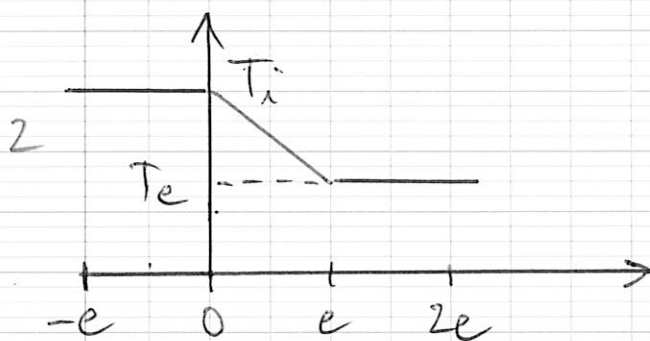
$$\text{CL2: } T(L) = a e + b = T_e \Rightarrow a = \frac{T_e - T_i}{e}$$

phys. maths

maths phys

On obtient:

$$\textcircled{8} \quad \underline{T(x) = \frac{T_e - T_i}{e} x + T_i}$$



5-

$$\phi(x) = j_{th} \cdot S = -\lambda_b \frac{dT}{dx} S$$

$$= -\lambda_b \frac{\Delta T}{\Delta x} S$$

$$= -\lambda_b \frac{T_e - T_i}{e} S$$

$$= \lambda_b \frac{T_i - T_e}{e} S$$

2

④

$$R_{th} = \frac{e}{\lambda_b \cdot S}$$

$$= \left(\frac{\lambda_b S}{e} \right) (T_i - T_e) =$$

↳ $\frac{1}{R_{th}}$

2 A.N.: $R_{th} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{1,00 \cdot 400 \cdot 500 \cdot 10^{-6}}$
 $R_{th} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{4 \times 5 \cdot 10^{-2}} = \underline{0,10 \text{ K.W}^{-1}}$

② 6. $R_{th} = \frac{e}{\lambda_b \cdot S} + \frac{e_{PSE}}{\lambda_{PSE} \cdot S} \rightarrow R_{PSE} \text{ (résistances en série)}$

7. Pour diviser les pertes par 2, il faut doubler la résistance thermique, ou il faut $R_{bois} = R_{PSE}$

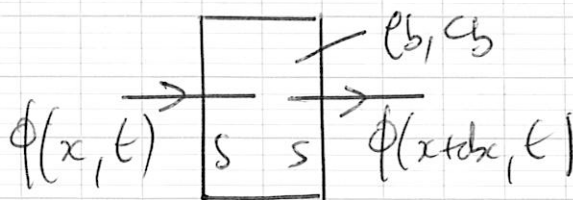
④

2 $\frac{e}{\lambda_b \cdot S} = \frac{e_{PSE}}{\lambda_{PSE} \cdot S}$
 $e_{PSE} = e \frac{\lambda_{PSE}}{\lambda_b}$

1 A.N.: $e_{PSE} = 20 \times \frac{0,036}{1} = \underline{0,72 \text{ mm}}$

1 Une très faible épaisseur est nécessaire.

8. Bilan enthalpique entre les abscisses x et $x+dx$, et entre les instants t et $t+dt$.



④

$$\begin{aligned} d^2Q &= (\phi(x, t) - \phi(x+dx, t)) dt \\ &= +S (j_{th}(x, t) - j_{th}(x+dx, t)) dt \\ &= -S \cdot \frac{dj_{th}}{dx} dx dt \\ &= S \cdot \lambda_b \cdot \frac{d^2T}{dx^2} \cdot dx \cdot dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d^2H &= dm \cdot c_b \cdot dT \\
 &= \rho_b \cdot S \cdot dx \cdot c_b \cdot (T(x, t+dt) - T(x, t)) \\
 &= \rho_b \cdot S \cdot dx \cdot c_b \cdot \frac{dT}{dt} \cdot dt
 \end{aligned}$$

$$d^2Q = d^2H$$

$$\cancel{\rho_b} \cdot \lambda_b \cdot \frac{d^2T}{dx^2} \cdot \cancel{S} \cdot dx \cdot dt = \rho_b \cdot \cancel{S} \cdot dx \cdot c_b \cdot \frac{dT}{dt} \cdot \cancel{dt}$$

⑥

$$\lambda_b \cdot \frac{d^2T}{dx^2} = \rho_b \cdot c_b \cdot \frac{dT}{dt}$$

$$\left(\frac{\lambda_b}{\rho_b \cdot c_b} \right) \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{dT}{dt}$$

→ D

$$2 \quad D = \frac{1}{800 \cdot 2 \cdot 10^3} \approx \frac{1 \cdot 10^{-5}}{16} \approx \underline{6 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad \underline{\theta}(x, t) &= \theta_0 \exp\left(-\frac{\gamma x}{\delta}\right) \exp\left(j\left(\omega t - \frac{\gamma x}{\delta}\right)\right) \\
 &= \theta_0 \exp\left(-\frac{\gamma x}{\delta}\right) \exp(j\omega t) \exp\left(-j\frac{\gamma x}{\delta}\right) \\
 &= \theta_0 \exp\left(-(1+j)\frac{\gamma x}{\delta}\right) \exp(j\omega t)
 \end{aligned}$$

②

$$10. \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = j\omega \theta$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \left(-\frac{(1+j)\gamma}{\delta}\right)^2 \theta = \frac{2\gamma^2}{\delta^2} \theta$$

④

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = j\omega \theta = D \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = D \cdot \frac{2\gamma^2}{\delta^2} \theta$$

$$d'au: \quad \omega = \frac{2D}{\delta^2} \quad \text{ou} \quad \omega - \frac{2D}{\delta^2} = 0$$

$$② \quad 11. \quad \delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} \rightarrow \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

/34

II Étude du capteur de niveau d'eau

II.1 Étude du condensateur plan

23 - La distribution de charge est invariante en x et y donc $\vec{E}(\cancel{x}, \cancel{y}, z)$

Les plans $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ et $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont plans de symétrie pour la distribution de charge donc $\vec{E} = E_z \vec{e}_z$.

24 - La distribution de charge est symétrique par rapport au plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ donc $\vec{E}(z) = -\vec{E}(-z)$.

25 - Raisonnement pour un point $M(x, y, z)$ tel que $z > 0$

Je choisis comme surface fermée le cylindre S_3 de rayon r avec deux

disques bouchons S_1 en $z > 0$ et S_2 en $-z$; $M(x, y, z) \in S_1$.

$\Phi_3 = 0$ car le champ électrique selon $\vec{u}_z$ ne traverse pas S_3 .

$\Phi_1 = E_z(z) \pi r^2$ car la normale vers l'extérieur est selon $\vec{e}_z$.

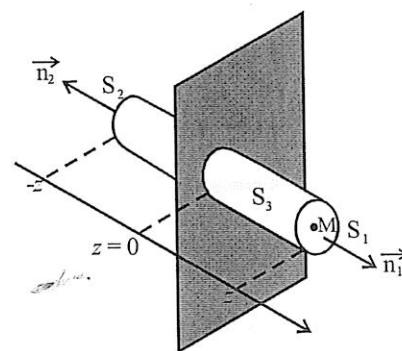
$\Phi_2 = -E_z(-z) \pi r^2$ car la normale vers l'extérieur est selon $-\vec{e}_z$.

Sachant que $E_z(-z) = -E_z(z)$, $\Phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 2\pi r^2 E_z(z) + 0$

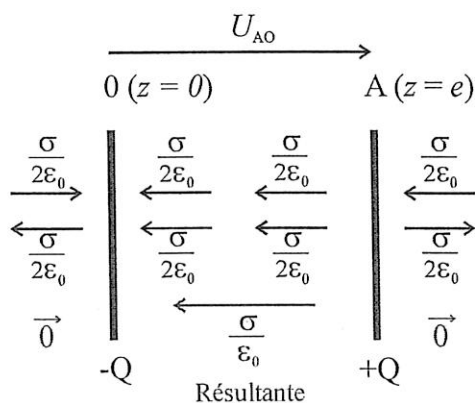
Le théorème de Gauss est $\oiint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$

Le théorème de Gauss s'écrit $2\pi r^2 E_z(z) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ or $Q_{\text{int}} = \sigma \pi r^2 \Rightarrow \boxed{E_z(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$ pour $z > 0$

$\vec{E}(z) = -\vec{E}(-z)$ donc $\boxed{E_z(z) = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}}$ pour $z < 0$.



26 - Avec le théorème de superposition, on démontre que $\vec{E}$ est non nul pour $0 < z < e$ et vaut $\frac{-\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$



27 - $U_{AO} = \int_A^0 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e$ avec $U_{AO} = \frac{Q}{C}$ et $\sigma = \frac{Q}{S}$ donc $\boxed{C = \frac{S}{e} \epsilon_0}$

(a) $\vec{E} = -\text{grad}' V = -\frac{dV}{dz} \vec{e}_z$

$-\frac{\sigma}{\epsilon_0} = -\frac{dV}{dz} \Rightarrow V = +\frac{\sigma}{\epsilon_0} z + \text{cte}$

$U = V(e) - V(0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e = \frac{Q}{C} = \frac{\sigma S}{C} \Rightarrow C = \frac{S}{e} \epsilon_0$

II.2 Application au capteur de niveau d'eau

- 28 - On peut voir ce condensateur comme l'association en parallèle (même tension) de deux condensateurs de surfaces $S_1 = L(h-x)$ et $S_2 = Lx$ et de même épaisseur e : $C = C_1 + C_2$

$$C_1 = \frac{S_1 \epsilon_0}{e} \text{ et } C_2 = \frac{S_2 \epsilon_0 \epsilon_r}{e} \Rightarrow C = \frac{L(H-x)\epsilon_0}{e} + \frac{Lx\epsilon_0 \epsilon_r}{e} \Rightarrow$$

$$C = \frac{L(H-x)\epsilon_0}{e} + \frac{Lx\epsilon_0 \epsilon_r}{e} = \frac{L\epsilon_0}{e} (H + (\epsilon_r - 1)x)$$

Par identification avec $C = ax + b$, $a = \frac{L\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{e}$ et $b = \frac{LH\epsilon_0}{e}$

29 - $RC \frac{du}{dt} + u = RC \frac{de}{dt}$ s'écrit en notations complexe $jRC\omega \underline{U}_0 + \underline{U}_0 = jRC\omega A \Rightarrow \underline{U}_0 = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} A$

30 - $U_0 = |\underline{U}_0|$ donc $U_0 = \frac{RC\omega}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} A$

31 - En BF, $\omega \ll \frac{1}{RC}$ on a $U_0 \underset{\text{BF}}{\sim} RC\omega A$

32 - En BF, $U_0 \underset{\text{BF}}{\sim} R\omega A \frac{L\epsilon_0}{e} (H + (\epsilon_r - 1)x)$.

En réglant le montage (soit la fréquence, soit la résistance) pour être en BF, alors

la tension mesurée aux bornes de la résistance est fonction affine de la hauteur d'eau.

$$U_0 \underset{\text{BF}}{\sim} U_{\text{vide}} + (U_{\text{plein}} - U_{\text{vide}}) \frac{x}{H} \quad U_{\text{vide}} = R\omega A \frac{LH\epsilon_0}{e} \quad U_{\text{plein}} = R\omega A \frac{LH\epsilon_0 \epsilon_r}{e} = \epsilon_r U_{\text{vide}}$$

II.3 Traitement des données

33 - `n = len(h)`
`somme = 0`
`for i in range(n):`
 `somme = somme + h[i]` # instruction 1
`moyenne = somme / len(h)` # instruction 2
`print(moyenne)` # affiche la moyenne

34 - `n = len(h)`
`somme = 0`
`for i in range(n):`
 `somme = somme + (h[i] - moyenne) ** 2`
`variance = somme / n`
`print(variance)` # affiche la variance

35 - $u(h) = \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{n}}$

ATS 2019

113

(2) 1) $n^* = N_A \times \frac{\rho}{M} \rightarrow \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
 $\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $\text{m}^{-3} \quad \quad \text{mol}^{-1} \quad \quad \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$

(2) 2) $n^* = \frac{6 \cdot 10^{23}}{6 \cdot 10^{-4}} \times \frac{10^4}{1} = 10^{23} \times 10^4 \times 10^4 = 10^{29} \text{ m}^{-3}$

13) $\frac{d}{dt}(E_m) = \frac{d}{dt}(E_c + E_p)$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 - e E x + E p_0 \right)$$

1

$$= m v \dot{v} - e E \dot{x} = m v \dot{v} - e E v$$

(4) $\frac{d}{dt}(E_m) = P_f = - \frac{m}{\epsilon} v^2$

d'où :

$$m v \dot{v} - e E v = - \frac{m}{\epsilon} v^2$$

$$m \dot{v} - e E = - \frac{m}{\epsilon} v$$

1

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\epsilon} v = \frac{e E}{m} = K E$$

1

$$K = \frac{e}{m}$$

4) $K = \frac{e}{m} \rightarrow \text{C}$
 $\text{C} \cdot \text{kg}^{-1} \quad \quad \text{kg}$

(ou) $[K] = \frac{[dv]}{[dt]} \rightarrow \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
 $\quad \quad \quad [E] \rightarrow \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$

$$\text{m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

Non demandé

②

τ en s

Constante de temps quantifiant le régime transitoire

5) $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = KE$

Sol: $v(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} + \tau KE$

CI: $v(0) = 0 \Rightarrow \lambda = -\tau KE$

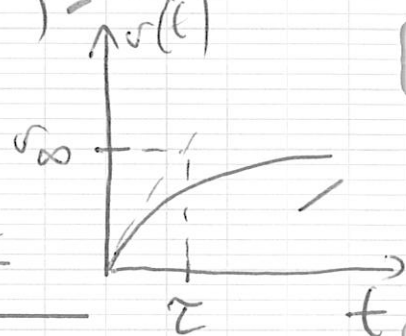
d'où:

⑥

$v(t) = \tau KE (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

$v_{\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$

$= \tau KE = \frac{eE\tau}{m}$



2

2

6) $v_{\infty} = \frac{10^{-19} \times 10^{-1} \times 10^{-14}}{10^{-30}}$

②

$= \frac{10^{-34}}{10^{-30}} = 10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$

②

7) $\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \text{C.m}^{-3}$

1

Or $\vec{j} = n e \vec{v}$

A.m⁻²

$\vec{j} = n e \vec{v}$

Régime établi: $\vec{v} = \vec{v}_{\infty} = \frac{eE\tau}{m}$

④

$\vec{j} = n e \frac{eE\tau}{m}$

$= \frac{n e^2 \tau}{m} \vec{E}$

4

$$1 \quad \gamma = \frac{n^* e^2 \tau}{m}$$

$$1 \quad \text{A.N.} : \frac{10^{29} \times 10^{-38} \times 10^{-14}}{10^{-30}} = \frac{10^{-23}}{10^{-30}} = 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \text{ cohérent.}$$

$$8) \quad \vec{E} = -\text{grad } V = E \vec{u}_x$$

Suivant x :

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x = -\frac{dV}{dx} \vec{u}_x$$

d'où :

$$\frac{dV}{dx} = -E$$

(2)

$$V(x) = -Ex + V(0)$$

$$V(0) - V(x) = Ex$$

$$V(0) - V(l) = El = U$$

$$E = \frac{U}{l} \quad \text{ou} \quad U = El$$

$$(1) 9) \quad I = j \cdot S$$

$$10) \quad j = \sigma E = \frac{\sigma U}{l}$$

$$I = jS = \frac{\sigma S U}{l}$$

(2)

$$\text{d'où : } U = \frac{l}{\sigma S} I$$

$$R = \frac{l}{\sigma S}$$

(2) 11) Résistance / Impédance variable entre 3 (out)
et 2 (GND).

12) Continuité du courant;
 $i(t) = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$

$$= \iint_S \vec{J}(r, t) \cdot \vec{u}_r \cdot d\vec{S}$$

$d\vec{S}$ suivant $\vec{u}_r$ sur $\frac{1}{2}$ sphère de rayon r .

④

$$i(t) = j \cdot 2\pi r^2 = \gamma E \cdot 2\pi r^2$$

d'où : $E = \frac{i(t)}{2\pi \gamma r^2}$

De plus : $\vec{J}(r, t)$ radiale
 d'où : $\vec{E}$ radial

$$\vec{E} = \frac{i(t)}{2\pi \gamma r^2} \vec{u}_r$$

113) $\vec{E} = -\text{grad } V$

$$\frac{i(t)}{2\pi \gamma r^2} \vec{u}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{i(t)}{2\pi \gamma r^2}$$

④ 1

$$V(r) = \frac{i(t)}{2\pi \gamma r} + \text{cte}$$

$$\int V(d - \frac{f}{2}) = \frac{i(t)}{2\pi (d - \frac{f}{2}) \gamma} + \text{cte} \quad (1)$$

$$\int V(d + \frac{f}{2}) = \frac{i(t)}{2\pi (d + \frac{f}{2}) \gamma} + \text{cte} \quad (2)$$

$$U_p = V(d + \frac{f}{2}) - V(d - \frac{f}{2})$$

$$= \frac{i(t)}{2\pi \gamma} \left[\frac{1}{(d - \frac{f}{2})} - \frac{1}{(d + \frac{f}{2})} \right]$$

$$U_p = \frac{i(t)}{2\pi\delta} \left[\frac{d + \frac{p}{2} - d + \frac{p}{2}}{(d - \frac{p}{2})(d + \frac{p}{2})} \right]$$

$$1) \quad U_p = \frac{i(t)}{2\pi\delta} \frac{p}{(d^2 - \frac{p^2}{4})} \quad R = \frac{p}{2\pi\delta(d^2 - \frac{p^2}{4})}$$

$$14) \quad \text{for } t = \text{hit}_t \\ L(s+1) = R \times i(t)$$

②

$$15) \quad U_{p \max} = 1270 \text{ V (graphiquement)}$$

$$Z_{\text{humain}} \simeq 1500 \Omega \text{ (tableau)}$$

$$\Rightarrow I_{\max} = \frac{U_{p \max}}{Z_{\text{humain}}} \simeq 1 \text{ A}$$

④

pas de conclusion avec ces données la...
En revanche

$U_p \geq 500 \text{ V}$ pendant $0,045 \text{ s}$. (graphiquement)
Tableau:

$$U_c = 500 \text{ V} \Rightarrow \Delta t < 0,04 \text{ s}$$

Concl: DANGER.

$$16) D_v = \frac{V}{t} = \frac{180 \cdot 10^{-3}}{30 \times 60} = \frac{180 \cdot 10^{-3}}{1800} = 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$17) D_v = v_B \cdot S_B \quad \text{car } \left| \begin{array}{l} \text{eau incompressible} \\ \text{régime permanent supposé} \end{array} \right.$$

$$\text{d'où : } v_B = \frac{D_v}{\pi a^2}$$

$$\text{AN : } v_B = \frac{10^{-4}}{\pi \times (20 \cdot 10^{-5})^2} = \frac{10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-4}} = 0,08 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

18) Bernoulli le long d'une ligne de courant :
entre A et B.

$$\underbrace{P_A}_{P_0} + \rho g z_A + \underbrace{\frac{1}{2} \rho v_A^2}_{\text{néglige}} = P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

$$P_0 + \rho g (z_A - z_B) = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

$$\text{d'où : } P_B = \rho g (z_A - z_B) - \frac{1}{2} \rho v_B^2 + P_0$$

$$P_B = \rho g H - \frac{1}{2} \rho v_B^2 + P_0$$

$$19) \frac{1}{2} \rho v_B^2 = \rho g H - P_B + P_0$$

$$\frac{1}{2} v_B^2 = g H - \frac{P_B}{\rho} + \frac{P_0}{\rho}$$

$$v_B^2 = 2gH - 2 \frac{P_B}{\rho} + 2 \frac{P_0}{\rho}$$

$$v_B^2 \leq 2gH$$