

Sciences Physiques
Devoir surveillé
Durée : 3 heures
CALCULATRICES INTERDITES
Problème 1 *TSI CCP 2014*

Première partie : 30 % du barème

Deuxième partie : 25 % du barème

Troisième partie : 25 % du barème

Constantes universelles :

- célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
- perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ S.I.}$
- permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ S.I.}$
- masse de l'électron : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- charge de l'électron : $q_e = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- accélération de la pesanteur : $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$

Relation concernant les opérateurs mathématiques vectoriels :

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{Z}) = \overline{\text{grad}}(\text{div} \vec{Z}) - \Delta \vec{Z} \text{ où } \vec{Z} \text{ est un vecteur et } \Delta \vec{Z} \text{ son laplacien.}$$

Notation complexe pour une fonction scalaire dépendant sinusoidalement du temps :

 Pour une fonction réelle $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, on notera la fonction complexe $\underline{x}(t)$ correspondante :

$$\underline{x}(t) = X_m \exp[j(\omega t + \varphi)] = X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$$

 où $x(t) = \text{Re}(\underline{x})$ et $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$ (\underline{X}_m représente l'amplitude complexe de \underline{x}) et $j^2 = -1$.

 On a donc $X_m = |\underline{X}_m|$ et $\varphi = \arg(\underline{X}_m)$.

Dans ce problème, nous nous proposons d'étudier, dans un premier temps, la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide puis, dans un deuxième temps, la réflexion d'une onde plane progressive monochromatique sur un conducteur parfait tel qu'un miroir.

Première partie : propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

On veillera, dans toute cette partie, à utiliser les opérateurs vectoriels de manière rigoureuse et claire.

On considère un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) où \vec{E} désigne le champ électrique et \vec{B} le champ magnétique.

L'espace est rapporté au repère cartésien orthonormé direct $(Oxyz)$ associé à la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

1/ Ecrire les quatre équations de Maxwell en présence de charges et de courants. Que deviennent ces équations dans le vide ?

2/ Montrer que les équations de propagation des champs \vec{E} et \vec{B} , dans une région sans charge ni courant, ont pour expressions respectives :

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

3/ Onde plane progressive monochromatique

On considère une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω .

Les expressions des champs \vec{E} et \vec{B} associés à cette onde sont données, en coordonnées cartésiennes, par les relations :

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \quad \text{et} \quad \vec{B}(x, t) = \vec{B}_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

où \vec{E}_0 et \vec{B}_0 sont des vecteurs constants, tels que $\vec{E}_0 = E_{0y} \vec{e}_y + E_{0z} \vec{e}_z$ et $\vec{B}_0 = B_{0y} \vec{e}_y + B_{0z} \vec{e}_z$.

Quelle est la direction de propagation de l'onde ?

Justifier le fait que cette onde est une onde plane, progressive et monochromatique.

Que représente la grandeur c dans l'expression des champs \vec{E} et \vec{B} ?

Quel est le vecteur d'onde \vec{k} associé à cette onde ? On précisera clairement la direction, le sens et la norme de \vec{k} .

4/ Vérifier que cette onde satisfait aux équations de propagation précédentes à condition que c soit liée à ε_0 et μ_0 par une relation que l'on justifiera.

5/ Structure de l'onde plane progressive monochromatique

L'onde plane progressive monochromatique décrite précédemment se propage dans le vide.

En utilisant les équations de Maxwell et les données mathématiques fournies en début d'énoncé, établir les expressions des composantes B_y et B_z du vecteur \vec{B} en fonction de E_{0y} , E_{0z} , c , ω , t et x .

En déduire :

- que le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{B} sont perpendiculaires entre eux ;

- que les normes du champ électrique et du champ magnétique sont telles que : $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$.

6/ Vecteur de Poynting

6.1/ Rappeler l'expression du vecteur de Poynting \vec{R} associé à une onde électromagnétique (\vec{E} , \vec{B}).

Quelle est la signification physique de ce vecteur ?

Préciser les unités de ce vecteur.

6.2/ Déterminer l'expression du vecteur de Poynting \vec{R} relatif à l'onde plane progressive monochromatique décrite précédemment. On exprimera \vec{R} en fonction de c , ε_0 , E_0 (norme du vecteur \vec{E}_0), ω , t , x et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

Déterminer l'expression de la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\langle \vec{R} \rangle$ en fonction de c , ε_0 , E_0 et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

Deuxième partie : réflexion d'une onde plane progressive monochromatique sur un conducteur parfait en incidence normale

L'espace est rapporté au repère cartésien orthonormé direct $(Oxyz)$ associé à la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement, de pulsation ω , de vecteur d'onde \vec{k} , se propage dans le vide suivant l'axe Ox dans le sens des x croissants. Le champ électrique qui lui est associé s'écrit : $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e}_y$, avec E_0 constant et k la norme du vecteur d'onde \vec{k} .

7/ Quelle est la direction de polarisation du champ électrique ?

En $x = 0$, l'onde arrive sur la surface plane d'un miroir métallique parfaitement conducteur tel que le montre la figure ci-dessous. Dans un tel conducteur, on admet que les champs \vec{E} et \vec{B} sont nuls. L'onde incidente donne alors naissance à une onde réfléchie se propageant suivant l'axe Ox dans le sens des x décroissants. Son champ électrique \vec{E}_r s'écrit donc :

$$\vec{E}_r = E_{0r} \cos(\omega t + kx).$$

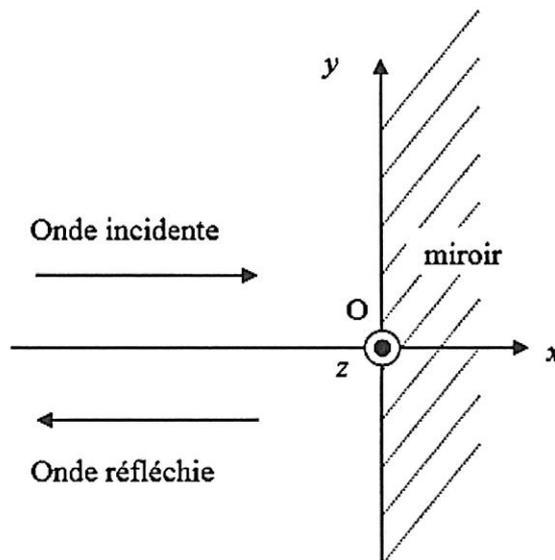


Figure : miroir plan parfaitement conducteur

8/ Relations de continuité

Les résultats de cette question sont donnés en fin de question.

Ecrire les relations de continuité (ou relations de passage) que doivent vérifier les champs \vec{E} et \vec{B} à l'interface avec le conducteur parfait sur le plan d'équation $x = 0$ en précisant bien la signification de tous les termes intervenant dans les équations.

On donne les résultats :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12},$$

avec \vec{n}_{12} un vecteur unitaire qui va du milieu 1 vers le milieu 2, \vec{E}_1 le champ électrique total dans le milieu 1 au niveau de l'interface, \vec{E}_2 le champ électrique total dans le milieu 2 au niveau de l'interface, et de même pour \vec{B}_1 et \vec{B}_2 , σ la densité surfacique de charge à l'interface, et \vec{j}_s la densité surfacique de courants à l'interface.

9/ Détermination du champ électromagnétique résultant

9.1/ Montrer, en utilisant les relations de continuité, que le champ électrique réfléchi \vec{E}_r est polarisé rectilignement suivant l'axe Oy .

Etablir l'expression de \vec{E}_{0r} en fonction de E_0 et du vecteur unitaire \vec{e}_y .

9.2/ Le champ magnétique incident \vec{B}_i est donné par l'expression : $\vec{B}_i = \vec{B}_{0i} \cos(\omega t - kx)$. En arrivant sur le conducteur parfait, il donne naissance à un champ magnétique réfléchi \vec{B}_r tel que :

$$\vec{B}_r = \vec{B}_{0r} \cos(\omega t + kx).$$

En utilisant les équations de Maxwell, déterminer les expressions des amplitudes \vec{B}_{0i} et \vec{B}_{0r} des champs magnétiques incident et réfléchi en fonction de E_0 , c et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

9.3/ Montrer que les expressions du champ électrique \vec{E} et du champ magnétique \vec{B} , résultant de la superposition des champs incidents et réfléchis dans le demi-espace $x < 0$, sont les suivantes :

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z.$$

Comment nomme-t-on ce type d'onde ?

10/ Charges et courants surfaciques

En utilisant les relations de continuité, montrer que la charge surfacique σ à la surface du conducteur est nécessairement nulle.

En utilisant les relations de continuité, montrer qu'il existe nécessairement une densité surfacique de courant surfacique \vec{j}_s non nulle à la surface du conducteur.

Déterminer l'expression de \vec{j}_s en fonction de E_0 , ϵ_0 , ω , t , c et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

11/ Pression de radiation

Les charges en mouvement à la surface du conducteur sont soumises à une force de Laplace donnée par l'expression $d\vec{F}_L = \vec{j}_S dS \wedge \vec{B}_i$, en considérant le champ incident dans le vide et au voisinage immédiat du métal.

Remarque : on a pris uniquement le champ magnétique incident \vec{B}_i dans le calcul de la force de Laplace et pas le champ magnétique réfléchi \vec{B}_r . En effet, la densité surfacique de courant \vec{j}_S n'est pas soumise à \vec{B}_r puisque c'est ce courant qui crée le champ \vec{B}_r .

11.1/ Déterminer l'expression de la force de Laplace \vec{F}_L qui s'applique sur une surface S du conducteur. On exprimera \vec{F}_L en fonction de E_0 , ϵ_0 , ω , t , S et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

11.2/ Déterminer l'expression de la pression P ainsi appliquée sur le conducteur. Exprimer P en fonction de E_0 , ϵ_0 , ω et t .

Déterminer l'expression de la valeur moyenne temporelle $\langle P \rangle$ de la pression P .

Remarque : la pression, ainsi mise en évidence, est appelée pression de radiation.

12/ Transport d'énergie

Déterminer l'expression du vecteur de Poynting \vec{R} de l'onde résultante ainsi que sa valeur moyenne temporelle $\langle \vec{R} \rangle$.

Quels commentaires peut-on faire par rapport à la valeur trouvée ?

Troisième partie : pince ampèremétrique à induction

On se propose d'étudier dans ce problème le fonctionnement d'une pince ampèremétrique à induction.

Une pince ampèremétrique est un instrument de mesure de l'intensité du courant électrique dans un conducteur.

La pince est disposée autour du conducteur parcouru par le courant dont on souhaite mesurer l'intensité. La pince ainsi positionnée permet d'accéder à l'intensité étudiée.

Une pince ampèremétrique à induction est constituée d'un tore de section carrée de côté a d'axe Oz et de rayon moyen $\frac{5a}{2}$ (figures 3 et 4 (page 14)) sur lequel sont bobinées régulièrement un grand nombre N de spires carrées de côté a disposées en série. Ce circuit de résistance totale R est fermé sur un ampèremètre de résistance interne négligeable.

L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

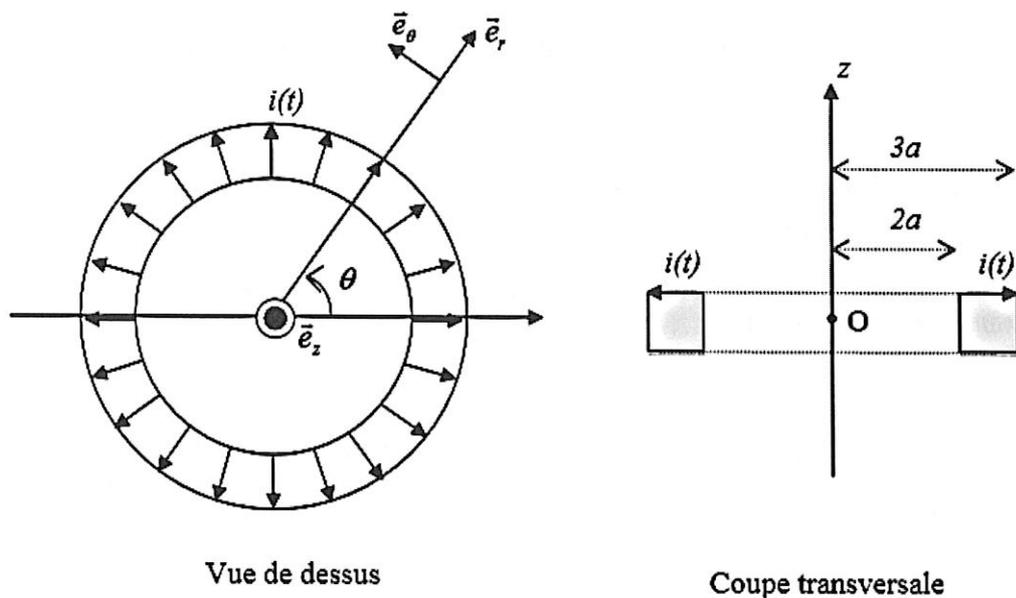


Figure 3 : bobine torique

La pince est disposée autour d'un conducteur parcouru par le courant dont on souhaite mesurer l'intensité.

Le conducteur enserré par la pince ampèremétrique est considéré comme un fil infini. Il est parcouru par un courant d'intensité $I(t) = I_m \cos(\omega t)$ de pulsation ω (figures 3 et 4) et est confondu avec l'axe Oz .

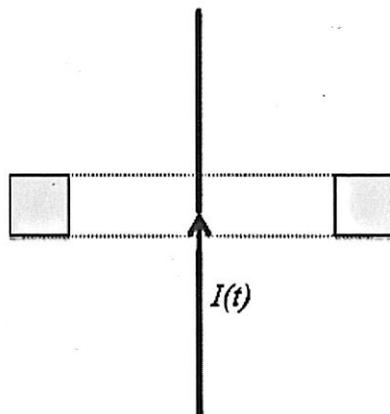


Figure 4 : bobine torique et conducteur étudié

1/ Justifier l'existence d'un courant $i(t)$ dans le bobinage torique de la pince ampèremétrique.

Soit $i(t) = i_m \cos(\omega t + \varphi)$ la valeur de l'intensité du courant dans la pince ampèremétrique en régime sinusoïdal forcé.

Soit \vec{B} le champ magnétique total qui résulte du champ créé par le courant $I(t)$ dans le fil et par le courant $i(t)$ dans la pince.

2/ En utilisant les propriétés de symétrie de la distribution de courant, montrer que le champ magnétique est nécessairement orthoradial. Montrer, grâce à l'étude des invariances, que celui-ci se met sous la forme :

$$\vec{B} = B_\theta(r, z, t) \vec{e}_\theta.$$

3/ En appliquant le théorème d'Ampère à un contour (C) soigneusement choisi et que l'on précisera, déterminer l'expression du champ magnétique \vec{B} créé par les intensités $I(t)$ et $i(t)$ en un point M repéré en coordonnées cylindriques par (r, θ, z) et situé à l'intérieur du tore ($r \in [2a; 3a]$ et $z \in [-a/2; a/2]$).

4/ Etablir l'expression du flux Φ du champ magnétique \vec{B} à travers une spire du tore en fonction de μ_0 , $I(t)$, $i(t)$, N et a .

En déduire le flux total Φ_{tot} à travers les N spires du tore en fonction de μ_0 , $I(t)$, $i(t)$, N et a .

42) Définir le rendement η du haut-parleur puis montrer qu'il est donné par $\eta = \frac{R_{mot}}{R+R_{mot}}$.

On donne les expressions suivantes : $R_{mot} = K \frac{\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}$ et $L_{mot} = K \frac{\left(\frac{1}{Q\omega_0}\right)\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}$

On fournit au document 4 en annexe, la représentation du module de l'impédance du haut-parleur HM170GO en fonction de la fréquence (en échelle semi-logarithmique).

43) Déterminer, par lecture sur le document 4, la valeur de R . Justifier votre démarche pour cette lecture.

L'augmentation de l'impédance aux « hautes fréquences » est associée à sa partie inductive. L'impédance $jL\omega$ est cependant négligeable dans un domaine de « fréquences basses » inférieures à 1000 Hz. A ces « basses fréquences », on observe à la fréquence $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ un maximum du module de \underline{Z} .

44) Déterminer, par lecture sur le document 4, la fréquence f_0 et la valeur maximale de R_{mot} .

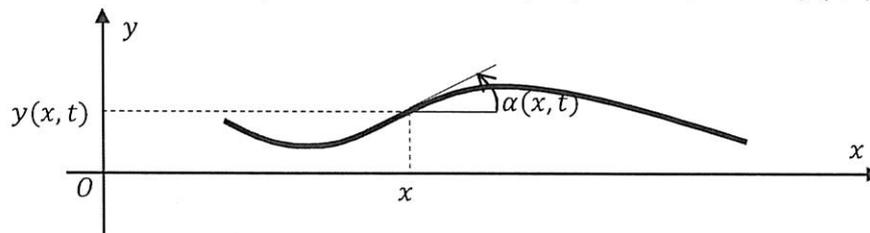
45) En déduire alors la valeur du rendement du haut-parleur HM170GO à la fréquence f_0 .

V- Onde et impédance

a) Impédance d'une corde

ATS 2019

On considère une corde sans raideur (n'opposant aucune résistance à la déformation), de masse linéique μ et tendue à la tension T_0 lorsqu'elle est au repos. On néglige le poids de la corde par rapport à la tension du fil et on s'intéresse aux petits mouvements verticaux de la corde (les calculs seront tous faits de manière approchée, au premier ordre en $\frac{\partial y}{\partial x}$). Un point M , situé à l'abscisse x lorsque la corde est au repos, s'est déplacé de $y(x, t)$ selon Oxy :



Chaque élément de la corde est soumis à des forces de tension tangentes en tout point à la corde. On note $\vec{T}(x, t)$ la tension qu'exerce à un instant t la partie de la corde d'abscisse supérieure à x sur la partie de la corde d'abscisse inférieure à x . On note $\alpha(x, t)$ l'angle que fait la tangente à la corde au point x à l'instant t avec l'horizontale. Avec les hypothèses de travail, on a dans la base (Oxy) :

$$\vec{T}(x, t) = \begin{pmatrix} T_x(x, t) \\ T_y(x, t) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} T_0 \\ T_0 \alpha(x, t) \end{pmatrix}$$

La propagation d'une onde sur cette corde s'accompagne d'un couplage entre $T_y(x, t)$ « cause » du mouvement vertical de la corde et $v(x, t)$ « conséquence » :

$$\begin{cases} v(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \\ T_y(x, t) = T_0 \alpha(x, t) = T_0 \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \end{cases}$$

On considère une onde plane progressive telle que $y_+(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ avec $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$.

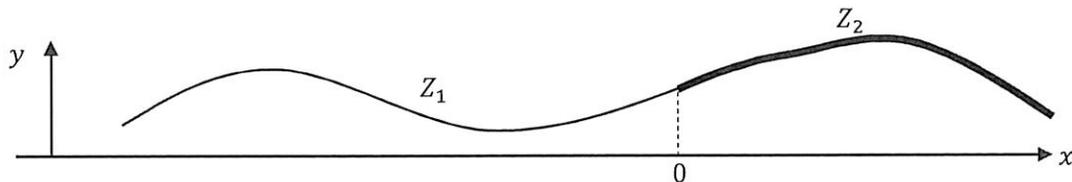
- 46) Donner la définition d'une onde progressive. Que représente la grandeur c ?
 47) Exprimer le champ des vitesses verticales $v_+(x, t)$ associé à $y_+(x, t)$ en fonction de $f'(u)$ où $f' = \frac{df}{du}$ et $u = \left(t - \frac{x}{c}\right)$.
 48) Etablir l'expression de la composante transversale $T_{y_+}(x, t)$ associée à $y_+(x, t)$ en fonction de c , T_0 et f' .

On définit l'impédance Z de la corde par la relation $T_{y_+}(x, t) = -Zv_+(x, t)$ avec $Z > 0$. Z est ici une constante réelle, qui ne dépend que de T_0 et μ .

- 49) Obtenir l'expression de Z en fonction de T_0 et μ .
 50) Montrer que si l'on considère une onde progressive $y_-(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$, on a alors $T_{y_-}(x, t) = Zv_-(x, t)$.

b) Réflexion entre deux cordes

On considère deux cordes semi-infinies : la première, d'impédance Z_1 , s'étend de $x = -\infty$ à $x = 0$, la seconde, d'impédance Z_2 , s'étend de $x = 0$ à $x = +\infty$.



Une onde incidente est envoyée dans la première corde. Cette onde est associée à une déformation fixée par la fonction $y_i(x, t)$. En $x = 0$, cette onde incidente donne naissance à une onde réfléchie dans la première corde et une onde transmise dans la seconde corde. L'amplitude de l'onde réfléchie est donnée par la fonction $y_r(x, t)$ et l'amplitude de l'onde transmise par la fonction $y_t(x, t)$. On note r_y le coefficient de réflexion en amplitude, défini par $y_r(0, t) = r_y y_i(0, t)$ et on note t_y le coefficient de transmission en amplitude, défini par $y_t(0, t) = t_y y_i(0, t)$.

- 51) En admettant la continuité de l'amplitude de la déformation en $x = 0$, établir que : $1 + r_y = t_y$.
 52) En admettant la continuité de la composante verticale T_y de la tension en $x = 0$, établir que : $Z_1(r_y - 1) = -Z_2 t_y$.
 53) En déduire alors que $r_y = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$.

On considère l'onde incidente suivante :



- 54) Dessiner, sur votre copie, l'allure de l'onde réfléchie dans le cas où $Z_2 \ll Z_1$ et dans le cas où $Z_2 \gg Z_1$ (pour ces deux situations on admettra qu'aucune énergie mécanique n'est transmise à la seconde corde).
 55) On parle d'adaptation d'impédance lorsque $Z_1 = Z_2$. Que peut-on affirmer sur l'amplitude de l'onde réfléchie dans ce cas ?