EM3 ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS LE VIDE

Travaux Dirigé

Exercice 1 : Caractérisation d'ondes

Soit l'onde $\vec{\underline{E}}_1 = E_0 \exp(i(ky + \omega t))\vec{u}_z$.

a) Quelle est sa direction de propagation ?
b) Quelle est sa direction de polarisation ?

Soit l'onde $\vec{\underline{E}}_2 = E_0 \exp(i(\omega t - kz))(\vec{u}_x + 2\vec{u}_y)$.

c) Quelle est sa direction de propagation ?
d) Que dire de sa polarisation ?

Soit l'onde $\vec{\underline{E}}_3 = E_0 \exp(i(\omega t - kz))(\vec{u}_x + 2i\vec{u}_y)$.

e) Que dire de sa polarisation ?

Exercice 1

$\vec{\underline{E}}_1 = E_0 \exp(i(ky + \omega t))\vec{u}_z$

a) Propagation suivant y −

b) Polarisation suivant $\vec{u}_z$ (rectiligne)

$\vec{\underline{E}}_2 = E_0 \exp(i(\omega t - kz))(\vec{u}_x + 2\vec{u}_y)$

c) Propagation suivant z +

d) Polarisation rectiligne car $E_{2y} = 2E_{2x}$ donc en phase.

$\vec{\underline{E}}_3 = E_0 \exp(i(\omega t - kz))(\vec{u}_x + 2i\vec{u}_y)$

e) Polarisation elliptique car $E_{3x} \neq E_{3y}$ et $\varphi_{0x} - \varphi_{0z} = \pm\frac{\pi}{2}$

Exercice 2 : Détermination de la polarisation

Quelle est la polarisation des ondes électromagnétiques suivantes (E_0, E_0^1 et E_0^2 sont des constantes réelles et les trois composantes sont écrites dans la base ($\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$)) :

$$\underline{\mathbf{E}}_1 = \exp i(\omega t - kx)\begin{vmatrix} 0 \\ E_0^1 \\ E_0^2 \end{vmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{E}}_2 = E_0 \exp i(\omega t - kx)\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{vmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{E}}_3 = E_0 \exp i(kx - \omega t)\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{E}}_4 = E_0 \exp i(kx - \omega t)\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{vmatrix}.$$

$\vec{E_1}$: propagation suivant x^+
polarisation rectiligne car $\vec{E}_{1y}$ et $\vec{E}_{1z}$ en phase ou opposition de phase

$\vec{E_2}$: propagation suivant x^+
polarisation circulaire car

$$\begin{cases} E_{20y} = E_{20z} \\ \varphi_{0y} - \varphi_{0z} = \pm \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

(circulaire droite)

$\vec{E_3}$: idem mais polarisation circulaire gauche.

$\vec{E_4}$: polarisation rectiligne.
propagation x^+

Exercice 3 : Caractérisation d'une onde

Pour les champs électriques ci-dessous, identifier la direction de propagation et la direction de polarisation de l'onde. Exprimer le champ magnétique associé.

1 - $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_y$

2 - $\underline{\vec{E}} = E_0\, e^{i(\omega t - kz)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_y\right)$

1. $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_y}$

Propagation suivant x^+

Polarisation rectiligne suivant y.

1. $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u_x}$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{1}{\omega}\left(\begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_0\cos(\omega t - kx) \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Méthode 1

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{c}E_0\cos(\omega t - kx) \end{pmatrix}$$

ou

$$\vec{rot}\,\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_0\cos(\omega t - kx) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Méthode 2

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ kE_0\sin(\omega t - kx) \end{pmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

D'où :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +\frac{k}{\omega}E_0\cos(\omega t - kx) \end{pmatrix}$$

OK avec $k = \frac{\omega}{c}$

2. $\vec{E} = E_0 \exp i(\omega t - kz)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_y}\right)$

Propagation suivant z^+

Polarisation rectiligne suivant axe $y = x$

2. $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u_z}$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\omega}{c} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}E_0 e^{i(\omega t - kz)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}E_0 e^{i(\omega t - kz)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} \frac{\omega}{c\sqrt{2}}E_0 e^{i(\omega t - kz)} \\ -\frac{\omega}{c\sqrt{2}}E_0 e^{i(\omega t - kz)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Méthode 1

$$= \begin{pmatrix} \frac{E_0}{c\sqrt{2}} e^{i(\omega t - kz)} \\ -\frac{E_0}{c\sqrt{2}} e^{i(\omega t - kz)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_y} \right)$$

Ex3

(ou) $$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i(\omega t - kz)} \\ \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i(\omega t - kz)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\frac{ikE_0}{\sqrt{2}} e^{i(\omega t - kz)} \\ +\frac{ikE_0}{\sqrt{2}} e^{i(\omega t - kz)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Méthode 2

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i(\omega t - kz)} \\ \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i(\omega t - kz)} \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\begin{pmatrix} +\frac{ikE_0}{\sqrt{2}} e^{i(\omega t - kz)} \\ +\frac{ikE_0}{\sqrt{2}} e^{i(\omega t - kz)} \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Par intégration :

$$\begin{pmatrix} +\frac{kE_0}{\sqrt{2}\omega} e^{i(\omega t - kz)} \\ -\frac{kE_0}{\sqrt{2}\omega} e^{i(\omega t - kz)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

avec $k = \frac{\omega}{c} \Leftrightarrow \frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$

$$\begin{pmatrix} +\frac{E_0}{\sqrt{2}c} e^{i(\omega t - kz)} \\ -\frac{E_0}{\sqrt{2}c} e^{i(\omega t - kz)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

c'est à dire :

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e_x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e_y} \right)$$

Exercice 4 : OPPM

Pour les OPPM ci-dessous :

- Indiquer la direction et le sens de propagation,
- Indiquer quels sont les plans d'onde,
- Donner le vecteur d'onde $\vec{k}$,
- Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$. Suivant quel axe est-il orienté ?
- Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}$. Suivant quel axe est-il orienté ?

- Déterminer l'expression de la puissance moyenne rayonnée à travers une surface S perpendiculaire à la direction de propagation.

a) $\vec{E} = E_0.\cos(\omega t - ky)\,.\overrightarrow{u_z}$

b) $\vec{E} = E_0.\cos(\omega t + kz)\,.\overrightarrow{u_x}$

c) $\vec{E} = E_0.\cos(\omega t - \alpha(x+y))\,.\overrightarrow{u_x} - E_0.\cos(\omega t - \alpha(x+y))\,.\overrightarrow{u_y}$

Exercice 4

a) Propagation suivant y^+

Plans d'onde xMz ($\perp$ à y)

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u_y}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}$$

Méthode 1

$$= \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix}0\\ \frac{\omega}{c}\\ 0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\ 0\\ E_0\cos(\omega t - ky)\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix}\frac{E_0\omega}{c}\cos(\omega t - ky)\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - ky)\,\vec{u_x}$$

$$\vec{R} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ E_0\cos(\omega t - ky)\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}\frac{E_0}{c}\cos(\omega t - ky)\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix}0\\ \frac{E_0^2}{c}\cos^2(\omega t - ky)\\ 0\end{pmatrix} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - ky)\,\vec{u_y}$$

$$P_{ray} = < \iint_S \vec{R} \cdot d\vec{S} >$$
$$= < S \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - ky) >$$
$$= \frac{E_0^2 S}{2\mu_0 c} = \frac{E_0^2 S \varepsilon_0 c}{2}$$
$$\left(\text{car } \frac{1}{\mu_0 c} = \varepsilon_0 c\right)$$

Exercice 4

a) $\vec{E} = E_0 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \cos(\omega t - ky) \end{vmatrix}$

Méthode 2

$$\vec{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \cos(\omega t - ky) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} kE_0 \sin(\omega t - ky) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\begin{vmatrix} kE_0 \sin(\omega t - ky) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} \end{vmatrix}$$

Par intégration :

$$\begin{vmatrix} \frac{kE_0}{\omega} \cos(\omega t - ky) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix}$$

Avec : $k = \frac{\omega}{c}$ ou $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$

On obtient :

$$\begin{vmatrix} \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - ky) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix}$$

ou $\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - ky) \cdot \vec{u_x}$.

b) Propagation suivant z —
Plans d'onde xOy

b) $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t + kz)\,\vec{u_x}$

Méthode 2 $\vec{E} = \begin{vmatrix} E_0 \cos(\omega t + kz) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_0 \cos(\omega t + kz) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -kE_0 \sin(\omega t + kz) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & E_0 \cos(\omega t + kz) \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{matrix}$$

$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ -kE_0 \sin(\omega t + kz) \\ 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} \end{vmatrix}$$

Par intégration :

$$\begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{kE_0}{\omega} \cos(\omega t + kz) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix}$$

avec $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kz) \\ 0 \end{vmatrix}$$

ou

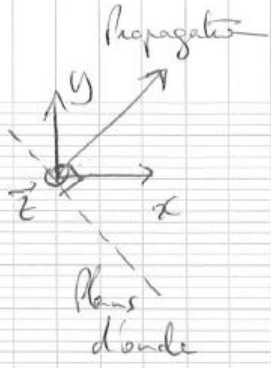
$$\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kz)\,\vec{u_y}$$

Ex4

Polarisation $\vec{u_x} - \vec{u_y}$

c) Propagation suivant $(\vec{u_x} + \vec{u_y})^+$

Plans d'onde : $x + y = cte$.



$\vec{k} = \alpha(\vec{u_x} + \vec{u_y})$ / $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}$

$$= \frac{\omega}{c}\left(\frac{\vec{u_x} + \vec{u_y}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

⚠ $\|\vec{E}\| = \sqrt{2}E_0$

$$= \frac{1}{\cancel{\omega}} \times \frac{\cancel{\omega}}{c\sqrt{2}} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - \alpha(x+y)) \\ -E_0 \cos(\omega t - \alpha(x+y)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{c\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2E_0 \cos(\omega t - \alpha(x+y)) \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{c} E_0 \cos(\omega t - \alpha(x+y))\,\vec{u_z}$$

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - \alpha(x+y)) \\ -E_0 \cos(\omega t - \alpha(x+y)) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{c} E_0 \cos(\omega t - \alpha(x+y)) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} \frac{E_0^2 \sqrt{2}}{c} \cos^2(\quad) \\ \frac{E_0^2 \sqrt{2}}{c} \cos^2(\quad) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{E_0^2 \sqrt{2}}{\mu_0 c} \cos^2(\quad)\vec{u_x} + \frac{E_0^2 \sqrt{2}}{\mu_0 c} \cos^2(\quad)\vec{u_y}$$

$$P_{moy} = \left\langle \iint_S \vec{R}' \cdot \vec{dS}' \right\rangle$$

$$= S \begin{pmatrix} \frac{E_0^2\sqrt{2}}{\mu_0 c} \\ \frac{E_0^2\sqrt{2}}{\mu_0 c} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \left\langle \cos^2(\omega t - \alpha(x+y)) \right\rangle$$

$$= \frac{E_0^2 S}{\mu_0 c} = \frac{E S}{2\mu_0 c}$$

Exercice 5 : OPPM

Une OPPM se propage dans le vide suivant l'axe Ox. Le champ est parallèle à Oy :
$\vec{E} = E_o.\vec{u}_y.\cos(k.x - \omega.t)$.

a) Déterminer sa divergence et son rotationnel. En déduire les composantes du champ magnétique $\vec{B}$ qui l'accompagne.

b) Déterminer div($\vec{B}$) et $\overrightarrow{rot}(\vec{B})$.

c) Déduire des équations de Maxwell la relation liant k à ω.

d) Déterminer les caractéristiques du vecteur de Poynting associé à cette OPPM.

e) On considère une surface S orthogonale à la direction de propagation de l'onde centrée sur l'axe Ox ; Quelle puissance traverse cette surface ?

A.N : On prend pour longueur d'onde λ=0,5µm, c=3.10^{8}m/s, S=1cm^2 et Eo=10^{4}V/m.

Exercice 5

a) $\operatorname{div}\vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(kx-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$

$= 0$

$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(kx-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -kE_0 \sin(kx-\omega t) \end{pmatrix}$

$= -kE_0 \sin(kx-\omega t) . \vec{u_z}$

$-kE_0 \sin(kx-\omega t)\vec{u_z} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\frac{k}{\omega} E_0 \cos(kx-\omega t) = B_z$

$\vec{B} = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(kx-\omega t)\vec{u_z}$

b) $\operatorname{div}\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$

$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k}{\omega} E_0 \cos(kx-\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{\omega} E_0 \cos(\,)\right) \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ +\frac{k^2}{\omega} E_0 \sin(kx-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ +\mu_0 \varepsilon_0\, \omega E_0 \sin(kx-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par identification :

$$\frac{k^2}{\omega} = \mu_0 \varepsilon_0 \omega$$

$$\frac{k^2}{\omega^2} = \mu_0 \varepsilon_0$$

$$\left(\frac{k}{\omega}\right)^2 = \mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \qquad \frac{k}{\omega} = \pm\frac{1}{c}$$

On retrouve : $k = \pm\dfrac{\omega}{c}$

$\dfrac{1}{c\mu_0} = \varepsilon_0 c$

d) $\vec{R} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

$k = \dfrac{\omega}{c}$

$\omega = kc$

$$= \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(kx-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k}{\omega} E_0 \cos(kx-\omega t) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{k E_0^2}{\mu_0 \omega} \cos^2(kx-\omega t)\, \vec{u}_x$$

$\dfrac{k E_0^2 S}{2\mu_0 kc} =$

d) $P = \langle RS \rangle = \dfrac{k E_0^2}{2\mu_0 \omega} S$

Exercice 6 : OPPM et Maxwell

On donne les champs électrique et magnétique dans l'espace, en l'absence de charges et de courants (E_0, B_0, ω et k sont des constantes) :

$$\vec{E} = E_0.\cos(\omega t - ky)\,.\overrightarrow{u_z}$$
$$\vec{B} = B_0.\cos(\omega t - ky)\,.\overrightarrow{u_x}$$

1) Vérifier que ces 2 champs vérifient les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson.
2) En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, déterminer la relation entre E_0 et B_0.
3) En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, déterminer une autre relation entre E_0 et B_0. En déduire une relation entre k, ω, μ_0 et ε_0.
4) Réécrire les 2 champs en notation complexe. Reprendre les 2 questions précédentes.

Exercice 6

1) $\mathrm{div}\,\vec{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0$

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

2) $$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \cos(\omega t - ky) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} kE_0 \sin(\omega t - ky) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = kE_0 \sin(\omega t - ky)\,\vec{u_x}$$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = +\omega B_0 \sin(\omega t - ky)\,\vec{u_x}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow kE_0 = \omega B_0 \qquad B_0 = \frac{k}{\omega} E_0$$

3) $$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_0 \cos(\omega t - ky) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -kB_0 \sin(\omega t - ky) \end{pmatrix} = -kB_0 \sin(\omega t - ky)\,\vec{u_z}$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega E_0 \sin(\omega t - ky)\,\vec{u_z}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow kB_0 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega E_0$$

$$B_0 = \frac{\omega}{k} \mu_0 \varepsilon_0 E_0$$

D'où $\frac{k}{\omega} = \frac{\omega}{k}\mu_0 \varepsilon_0$

$$\frac{k^2}{\omega^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \quad \left(= \frac{1}{c^2}\right)$$

4) $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - ky)\,\vec{u_z}$

$\Rightarrow \underline{\vec{E}} = E_0 \exp\left(j(\omega t - ky)\right)\vec{u_z}$

$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t - ky)\,\vec{u_x}$

$\Rightarrow \underline{\vec{B}} = B_0 \exp\left(j(\omega t - ky)\right)\vec{u_x}$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \exp(j(\omega t - ky)) \end{pmatrix}$$

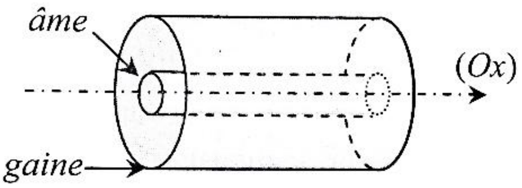
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ kE_0 \exp(j(\omega t - ky)) \end{pmatrix} = -jkE_0 \exp(j(\omega t - ky))\,\vec{u_x}$$

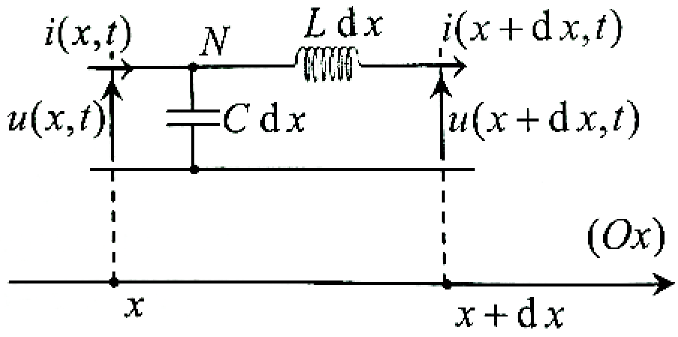
$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega B_0 \exp(j(\omega t - ky))$$

d'où : $kE_0 = \omega B_0$

Exercice 7 : Câble coaxial

On montre que l'inductance L et la capacité C d'un mètre de câble coaxial vérifient la relation $L.C=\varepsilon_o.\mu_o=1/c^2$ où c est la célérité de la lumière dans le vide.
Une longueur dx de câble coaxial peut être modélisée par le schéma électrique suivant :





Remarque : L et C sont dans le cadre de la modélisation les grandeurs linéiques : C (F/m) et L (H/m).

A l'instant t, au point d'abscisse x : $i(x,t)$ est le courant circulant dans l'âme et $u(x,t)$ est la tension entre l'âme et la gaine, le potentiel de la gaine étant pris comme référence.

a) A partir d'une loi des mailles, écrire une relation reliant $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial i}{\partial t}$.
b) A partir d'une loi des nœuds, écrire une relation reliant $\frac{\partial i}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$.
c) En déduire que les grandeurs $u(x,t)$ et $i(x,t)$ satisfont à une même équation aux dérivées partielles que l'on explicitera. De quel type d'équation s'agit-t-il ? Proposez une interprétation physique en termes de propagation de signal électrique.

Exercice 7

1. $u(x) - u(x+dx) = L dx \frac{di}{dt}$ (loi des mailles)

$$-\frac{\partial u}{\partial x} \cancel{dx} = L \cancel{dx} \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1)$$

2. $i(x) - i(x+dx) = +C dx \frac{du}{dt}$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} \cancel{dx} = + C \cancel{dx} \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2)$$

3. On dérive (1) par rapport à x.
——— (2) par rapport à t.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -L \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{L} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

d'où : $$-\frac{1}{L} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Eq. de d'Alembert.

Même raisonnement pour i

On dérive (1) par rapport à t
(2) par rapport à x

Exercice 8

On suppose que règne dans l'espace le champ électromagnétique

$$\begin{cases} \vec{E}(M,t) = f(z)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\vec{e}_x \\ \vec{B}(M,t) = g(z)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\vec{e}_y \end{cases}$$

où τ est une constante de temps et f, g deux fonctions que l'on cherche à déterminer. On suppose que l'espace est vide de charges et de courants.

1 - Vérifier que la forme de ces deux champs est compatible avec les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson.

2 - Montrer que l'équation de Maxwell-Faraday impose une relation entre $g(z)$ et $f'(z)$.

3 - Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère impose une relation entre $f(z)$ et $g'(z)$.

4 - En déduire une équation différentielle vérifiée par f. La résoudre en supposant que $\vec{E}(z=0,t=0) = E_0\,\vec{e}_x$ et que le champ électrique est nul en $z \to +\infty$ à tout instant.

5 - En déduire l'expression complète du champ électromagnétique.

Exercice 8 $\vec{E}(M,t) = f(z)e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{e_x}$
$\vec{B}(M,t) = g(z)e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{e_y}$

1. Maxwell-Gauss $\operatorname{div}\vec{E} = 0$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

2. $$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} f(z)e^{-\frac{t}{\tau}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ f'(z)e^{-\frac{t}{\tau}} \\ 0 \end{pmatrix} = f'(z)e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{e_y}$$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = +\frac{1}{\tau}g(z)e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{e_y}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$f'(z)e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{e_y} = \frac{1}{\tau}g(z)e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{e_y}$$

$$\tau f'(z) = g(z).$$

3. $$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ g(z)e^{-\frac{t}{\tau}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g'(z)e^{-\frac{t}{\tau}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -g'(z)e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{e_x}$$

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0\varepsilon_0 \times -\frac{1}{\tau} \times f(z)e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{e_x}$$

d'où : $\tau g'(z) = \mu_0 \varepsilon_0 f(z)$

4. D'après 2 :

$$\tau f''(z) = g'(z) = \frac{\mu_0\varepsilon_0}{\tau} f(z)$$

$$f''(z) = \frac{\mu_0\varepsilon_0}{\tau^2} f(z)$$

$$f''(z) - \frac{\mu_0\varepsilon_0}{\tau^2} f(z) = 0$$

Polynôme caractéristique :

$$r^2 - \frac{\mu_0\varepsilon_0}{\tau^2} = 0$$

$$\Delta = 4\frac{\mu_0\varepsilon_0}{\tau^2} > 0$$

$$r = \pm \frac{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{\tau}$$

Solution : $f(z) = A\exp\left(-\frac{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{\tau} z\right) + B\exp\left(+\frac{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{\tau} z\right)$.

$E(z)$

CL à $t=0$

C.L : $\lim_{z\to+\infty} f(z) = 0 \Rightarrow B = 0$

$$f(0) = A = E_0 \Rightarrow f(z) = E_0\exp\left(-\frac{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{\tau}z\right)$$

d'où : $\vec{E}(z,t) = E_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{\tau}z\right)\vec{e_x}$

5. $f'(z) = -E_0\frac{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{\tau}\exp\left(-\frac{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{\tau}z\right)$.

$$\Rightarrow g(z) = \tau . f'(z) = -E_0\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\exp\left(-\frac{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{\tau}z\right)$$

$$\Rightarrow \vec{B}(z,t) = -E_0\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{\tau}z\right) \times \vec{e_y}$$

Exercice 9 : Interférences

Deux OPPM de même amplitude, polarisées rectilignement suivant *(Oy),* se propagent dans le vide suivant l'axe (Ox), la première vers les x croissant, la seconde vers les x décroissant.

a) Exprimer les vecteurs champs électrique et magnétique associés à ces deux ondes en prenant pour ces deux ondes une phase nulle en $x = 0$, $t = 0$.
b) Déterminer l'expression de l'onde résultante et interpréter le résultat.
c) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting. Conclure.

$$B = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

a) $\vec{E_1} = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u_y}$

$\vec{B_1} = B_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u_z}$] Onde 1

$\vec{E_2} = E_0 \cos(\omega t + kx)\vec{u_y}$

$\vec{B_2} = -B_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u_z}$] Onde 2.

b) $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$

$= 2E_0 \cos(\omega t)\cos(kx)\vec{u_y}$

$\vec{B} = -2B_0 \sin(\omega t)\sin(kx)\vec{u_z}$

$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Onde stationnaire : grandeur sinusoïdale en fonction du temps, dont l'amplitude est modulée par la position x.

c) $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2E_0\cos(\omega t)\cos(kx) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2B_0 \sin(\omega t)\sin(kx) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix} -4E_0B_0\cos(\omega t)\cos(kx)\sin(\omega t)\sin(kx) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec : $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$

d'où : $\cos(\omega t)\sin(\omega t) = \frac{1}{2}\left[\sin(2\omega t)\right]$

$\cos(kx)\sin(kx) = \frac{1}{2}\left[\sin(2kx)\right]$

$$d'o\text{ù}: \vec{R} = -\frac{E_0 . B_0}{\mu_0}\sin(2\omega t)\sin(2kx)\overrightarrow{u_x}$$

Vecteur de Poynting stationnaire, avec périodes temporelle et spatiale moitiés des périodes temporelle et spatiale de $\vec{E}$ et $\vec{B}$

Exercice 10 : Interférences

Une OPPM se propage dans la direction $O\vec{u}$ du plan xOy faisant avec l'axe (Ox) l'angle $(Ox, O\vec{u}) = \alpha$. Cette onde est polarisée rectilignement suivant (Oz).
Les origines du temps et de l'espace sont telles que les variations du champ électrique en O peuvent se traduire par la relation $E_z = E_o .\cos(\omega.t)$.

a) Ecrire les composantes, sur les axes Ox ,Oy ,Oz, du vecteur d'onde $\vec{k}_1$ (de norme k),du champ électrique $\vec{E}_1(M,t)$ et du champ $\vec{B}_1(M,t)$ en un point M quelconque à l'instant t.

Une deuxième onde se propage dans la direction $O\vec{u}$ du plan xOy, symétrique de la précédente par rapport à (Ox). Elle a même polarisation, même amplitude et même phase en O à tout instant que l'onde précédente.

b) Préciser de même les composantes de $\vec{k}_2, \vec{E}_2(M,t), \vec{B}_2(M,t)$.

On superpose les ondes précédentes et on note $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ les champs de cette nouvelle onde.

c) En déduire que la propagation est maintenue suivant l'axe (Ox). Que se passe-t-il suivant l'axe (Oy) ?

a) $\vec{k}_1 = \frac{\omega}{c}\left(\cos\alpha\, \vec{u}_x + \sin\alpha\, \vec{u}_y\right)$

$\vec{E}_1(M,t) = E_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}\right)\vec{u}_z$

avec $\vec{r} = x.\vec{u}_x + y.\vec{u}_y$

$\vec{E}_1(M,t) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(\cos\alpha\, x + \sin\alpha\, y)\right)\vec{u}_z$

$\vec{B}_1(M,t) = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

$$\begin{array}{ccc} \cos\alpha & 0 & \\ \sin\alpha & 0 & \\ 0 & \cos(\quad) & \\ \cos\alpha & 0 & \\ \sin\alpha & 0 & \end{array}$$

$$= \frac{E_0}{c}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(\cos\alpha\, x + \sin\alpha\, y)\right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{E_0}{c}\begin{pmatrix} \sin\alpha . \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(\cos\alpha\, x + \sin\alpha\, y)\right) \\ -\cos\alpha . \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(\cos\alpha\, x + \sin\alpha\, y)\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $\vec{k}_2 = \frac{\omega}{c}\left(\cos\alpha\, \vec{u}_x - \sin\alpha\, \vec{u}_y\right)$

$\vec{E}_2(M,t) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(\cos\alpha\, x - \sin\alpha\, y)\right)\vec{u}_z$

$$\vec{B}_2(M,t) = \frac{E_0}{c}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(\cos\alpha\, x - \sin\alpha\, y)\right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{E_0}{c}\begin{pmatrix} -\sin\alpha . \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(\cos\alpha\, x - \sin\alpha\, y)\right) \\ -\cos\alpha . \cos(\quad) \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $\vec{E}(M,t) = E_0 . \Sigma \cos . \vec{u}_z$

$$\vec{E}(M,t) = 2E_0 \underbrace{\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\cos\alpha\, x\right)}_{\text{Propagation selon } x} \underbrace{\cos\left(\frac{\omega}{c}\sin\alpha\, y\right)}_{\text{stationnaire suivant } y} \vec{u}_z$$

Exercice 11 : Onde stationnaire

On considère le champ électrique créé par la réflexion d'une OPPH sur un plan conducteur parfait situé en $x = 0$: pour $x \leq 0$,

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y \,.$$

1 - Représenter le champ électrique à différents instants.

2 - Définir les nœuds de vibration, et déterminer leurs positions.

3 - Même question pour les ventres.

Exercice 12 : Réflexion d'une OPPM

Une OPPM polarisée rectilignement selon u_x arrive en incidence normale selon u_y^+ sur un conducteur parfait situé dans un plan $y = 0$.

a) Ecrire mathématiquement l'onde incidente (champs électrique et magnétique).
b) A l'aide des relations de continuité, déterminer mathématiquement l'onde réfléchie.
c) En déduire l'expression mathématique de l'onde composée de la superposition des 2 ondes, incidente et réfléchie. De quel type d'onde s'agit-il ?
d) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting. Conclure quant à la propagation de l'énergie.

a) $\vec{E_i} = E_{0i}\cos(\omega t - ky)\,\vec{u_x}$ $\qquad \vec{k_i} = \frac{\omega}{c}\vec{u_y}$

$\underline{E_i} = E_{0i}\exp j(\omega t - ky)\,\vec{u_x}$

$$\vec{B_i} = \frac{\vec{k_i}\wedge\vec{E_i}}{\omega} = \frac{1}{c}\vec{u_y}\wedge E_0\cos(\omega t - ky)\vec{u_x}$$

$$= -\frac{E_{0i}}{c}\cos(\omega t - ky)\vec{u_z}$$

$$\underline{\vec{B_i}} = -\frac{E_{0i}}{c}\exp j(\omega t - ky)\vec{u_z}$$

b) $\vec{E_r} = E_{0r}\cos(\omega t + ky + \varphi_r)\,\vec{u_x}$ $\qquad \vec{k_r} = -\frac{\omega}{c}\vec{u_y}$

$\vec{E_t} = \vec{E_i} + \vec{E_r} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_y}$ à la surface du conducteur

Or $\vec{E_i} + \vec{E_r}$ suivant $\vec{u_x}$

D'où : $\vec{E_t}(0) = \vec{0}\quad \forall t$

$$E_{0i}\cos(\omega t) + E_{0r}\cos(\omega t + \varphi_r) = 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow E_{0r} = -E_{0i} \qquad \varphi_r = 0$$

d'où : $\vec{E_r} = -E_{0i}\cos(\omega t + ky)\vec{u_x}$

$\vec{B_r} = \frac{\vec{k_r}\wedge\vec{E_r}}{\omega}$ $\qquad$ avec $\vec{k_r} = -\frac{\omega}{c}\vec{u_y}$

$$= -\frac{1}{c}\vec{u_y}\wedge\left(-E_{0i}\cos(\omega t + ky)\right)\vec{u_x}$$

$$\vec{B_r} = -\frac{E_{0i}}{c}\cos(\omega t + ky)\vec{u_z}$$

c)

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\vec{E_t} = \vec{E_i} + \vec{E_r}$$

$$\vec{E_t} = -2E_0 \sin(\omega t)\sin(-ky).\vec{u_x}$$

$$= 2E_0 \sin(\omega t)\sin(ky)\vec{u_x}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\vec{B_t} = -2\frac{E_0}{c}\cos(\omega t)\cos(ky)\vec{u_z}$$

d)

$$\vec{R} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\frac{4E_0^2}{c}\sin(\omega t)\cos(\omega t)\sin(ky)\cos(ky)\vec{u_y}$$

$$= \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\sin(2\omega t)\sin(2ky)\vec{u_y}$$

$\vec{R}$ alternatif = pas de propagation d'énergie

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\sin(2a)$$

Exercice 12 (avec les complexes)

a|b) $\underline{\vec{E}_i} = E_{0i} \exp j(\omega t - ky)\,\vec{u}_x$

$\underline{\vec{B}_i} = -\frac{E_{0i}}{c} \exp j(\omega t - ky)\,\vec{u}_z$

$\underline{\vec{E}_r} = -E_{0i} \exp j(\omega t + ky)\,\vec{u}_x$

$\underline{\vec{B}_r} = -\frac{E_{0i}}{c} \exp j(\omega t + ky)\,\vec{u}_z$

c) $\underline{\vec{E}_t} = \underline{\vec{E}_i} + \underline{\vec{E}_r}$

$\frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = \sin\theta$

$= E_{0i} \exp(j\omega t)\left[\exp(-jky) - \exp(jky)\right]\vec{u}_x$

$= -E_{0i} \exp j(\omega t)\left[2j \sin(ky)\right]\vec{u}_x$

$= -2E_{0i} j \exp j(\omega t) \sin ky\,\vec{u}_x$

$\vec{E}_t = Re(\underline{\vec{E}_t}) = 2E_{0i} \sin(\omega t) \sin(ky)\,\vec{u}_x$

$\underline{\vec{B}_t} = -\frac{E_{0i}}{c} \exp(j\omega t)\left[\exp(-jky) + \exp(jky)\right]\vec{u}_z$

$= -\frac{E_{0i}}{c} \exp(j\omega t)\, 2\cos(ky)\,\vec{u}_z$

$\vec{B}_t = Re(\underline{\vec{B}_t}) = -\frac{2E_{0i}}{c} \cos(\omega t) \cos(ky)\,\vec{u}_z$.

d) $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

Exercice 13 : Réflexion d’une OPPM

Une OPPM polarisée circulairement arrive en incidence normale selon u_z^+ sur un conducteur parfait situé dans un plan z = 0.

a) Ecrire mathématiquement l’onde incidente (champs électrique et magnétique).
b) A l’aide des relations de continuité, déterminer mathématiquement l’onde réfléchie.
c) En déduire l’expression mathématique de l’onde composée de la superposition des 2 ondes, incidente et réfléchie. De quel type d’onde s’agit-il ?

Exercice 13 (hors-programme) $\vec{k_i} = \frac{\omega}{c}\vec{u_z}$

a) $\underline{\vec{E_i}} = E_0 \exp j(\omega t - kz)\vec{u_x} + E_0 j \exp j(\omega t - kz)\vec{u_y}$ Circulaire droite

$\underline{\vec{B_i}} = \frac{\vec{k_i} \wedge \underline{\vec{E_i}}}{\omega}$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{c} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_0 \exp j(\omega t - kz) \\ jE_0 \exp j(\omega t - kz) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -j\frac{E_0}{c} \exp j(\omega t - kz) \\ \frac{E_0}{c} \exp j(\omega t - kz) \\ 0 \end{vmatrix}$$

b) $\underline{\vec{E_t}} = \underline{\vec{E_i}} + \underline{\vec{E_r}} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_z}$ à la surface du conducteur.

Or : $\vec{E_i} + \vec{E_r}$ suivant $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$

D'où : $\vec{E_t}(0) = \vec{0} \quad \forall t$.

$\varphi_{r_x} = 0$
$\varphi_{r_y} = 0$

$$\underline{\vec{E_r}} = \underline{E_{0_{r_x}}} \exp j(\omega t + kz + \varphi_{r_x})\vec{u_x} + \underline{E_{0_{r_y}}} \exp j(\omega t + kz + \varphi_{r_y})\vec{u_y}$$

Suivant $\vec{u_x}$: $E_0 \exp j\omega t + \underline{E_{0_{r_x}}} \exp j\omega t = 0 \quad \forall t$

$$\underline{E_{0_{rx}}} = -E_0$$

Suivant $\vec{u_y}$: $E_0 j \exp j\omega t + \underline{E_{0_{r_y}}} \exp j\omega t = 0 \quad \forall t$.

$$\underline{E_{0_{r_y}}} = -jE_0$$

Circulaire gauche

$$\underline{\vec{E}_r'} = -E_0 \exp j(\omega t + kz)\vec{u}_x - E_0 j \exp j(\omega t + kz)\vec{u}_y$$

$$\underline{\vec{E}_t'} = E_0\left(\exp j(\omega t - kz) - \exp j(\omega t + kz)\right)\vec{u}_x + E_0 j\left(\exp j(\omega t - kz) - \exp j(\omega t + kz)\right)\vec{u}_y$$

$$= E_0 \exp(j\omega t)\left[\exp(-jkz) - \exp(jkz)\right]\vec{u}_x + E_0 j \exp(j\omega t)\left[\exp(-jkz) - \exp(jkz)\right]\vec{u}_y$$

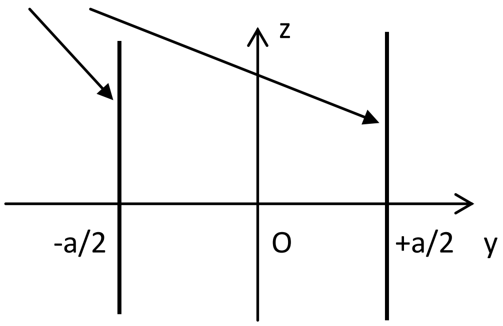
$$= -2E_0 j \exp(j\omega t)\sin kz\ \vec{u}_x + 2E_0 \exp(j\omega t)\sin kz\ \vec{u}_y$$

Onde stationnaire.

$$\vec{E}_t = 2E_0 \sin(\omega t)\sin kz\ \vec{u}_x - 2E_0 \cos(\omega t)\sin kz\ \vec{u}_y$$

Exercice 14 : Guides d'onde

Soient deux plans infiniment conducteurs entre lesquels règne le vide :



Un champ électrique prend pour forme entre ces deux plans:

$$\vec{E} = E_o.\cos(\frac{\pi.y}{a}).\cos(\omega.t - k.x).\vec{u}_z$$

a) Vérifier les conditions aux limites.
b) Rappeler les relations vérifiées par le champ électrique dans le vide en l'absence de charge et de courant.
c) A partir de l'équation de d'Alembert, établir la relation liant k,ω,c et a où c est la célérité de la lumière dans le vide.
d) Déterminer les caractéristiques du champ magnétique : conclure quant à la transversalité de l'onde.
e) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting.

Guides d'onde

$$\vec{E} = E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx)\vec{u_z}$$

Propagation suivant x^+

a. $\vec{E}\left(\frac{a}{2}\right) = \vec{0}$

$\vec{E}\left(-\frac{a}{2}\right) = \vec{0}$

les composantes tangentielles de $\vec{E}$ sont nulles au niveau des guides.

b. $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\boxed{\text{⚠ On peut appliquer Maxwell mais on ne peut pas appliquer } \vec{B} \neq \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}}$$

d.

$$\vec{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kx) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -E_0 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \\ -E_0 k \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kx) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{vmatrix}$$

d'où :

$$\begin{cases} B_x = + E_0 \frac{\pi}{\omega a} \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kx) \\ B_y = - E_0 \frac{k}{\omega} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \\ B_z = 0 \end{cases}$$

Composante B_x dans le sens de la propagation

$\Rightarrow$ Onde | non plane
| non transverse.

c. $\vec{\Delta}\vec{E} = \left(\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}\right)\vec{u_z}$ ici

$$-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \vec{E} - k^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$= -\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \vec{E}$$

$$-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k^2 = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

Relation de dispersion.

e. $$\vec{R} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} + E_0 \frac{\pi}{\omega a} \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kx) \\ - E_0 \frac{k}{\omega} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{R} = + \frac{k E_0^2}{\mu_0 \omega} \cos^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos^2(\omega t - kx) \vec{u_x}$$

Valeur moyenne non nulle (propagation de l'energie suivant $\vec{u_x}$)

$$+ \frac{\pi E_0^2}{\mu_0 \omega a} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \sin(\omega t - kx)}_{\frac{1}{4}\left(\sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \sin(2\omega t - 2kx)\right)} \vec{u_y}$$

Valeur moyenne nulle (pas de propagation de l'énergie suivant $\vec{u_y}$).

Exercice 15 : Propagation guidée

Une cavité vide, invariante par translation selon $\vec{u}_z$, est taillée dans un conducteur parfait. Sa section est un rectangle $a \times b$ (Fig. 23). On s'intéresse à la propagation d'une onde électromagnétique le long de la direction $\vec{u}_z$:

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = f(x, y)\exp(i(\omega t - kz))\,\vec{u}_y$$

où f est une fonction à déterminer.

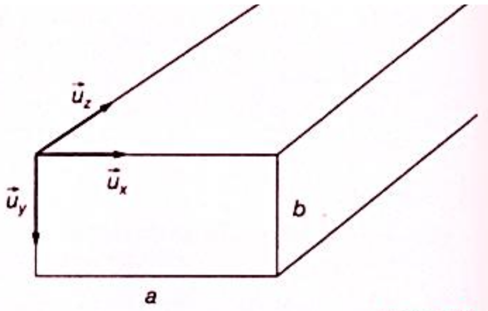


Figure 23

a) Commenter la forme de cette onde et notamment le fait que f ne dépende pas de z.

b) En utilisant une équation de Maxwell, montrer que f ne dépend en fait que d'une seule variable.

c) À l'aide de l'équation de propagation du champ électrique, trouver une équation différentielle en f.

d) La résoudre en utilisant les conditions aux limites.

e) Exprimer le champ électrique $\underline{\vec{E}}$ et commenter le résultat obtenu.

f) Montrer que ce champ électrique ne peut se propager qu'à partir d'une fréquence minimale f_c. Quel type de filtrage effectue le guide ? Calculer f_c pour $a = 1$ cm et préciser le domaine spectral correspondant.

Rappel : vu la présence d'un conducteur parfait, le champ électrique tangentiel doit s'annuler sur les parois de la cavité.

$\vec{E}(M,t) = f(x,y)\exp\left(i(\omega t - kz)\right)\vec{u_y}$

a) $\exp\left(i(\omega t - kz)\right)$ = terme de phase
correspond à onde progressive se propageant
selon les z croissants.

f ne dépend pas de z $\Rightarrow$ pas d'atténuation lors de la propagation.

b) $\operatorname{div} \vec{E} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0$

$\Rightarrow E_y$ ne dépend pas de y.

$\Rightarrow E_y$ ne dépend que de x

$\Rightarrow f(x,y) = f(x)$ ne dépend que de x.

c) $\vec{\Delta}\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

$\vec{\Delta}\vec{E} = \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}\vec{u_y} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\vec{u_y}$

$= \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\exp\left(i(\omega t - kz)\right)\vec{u_y} - k^2 f(x,y)\exp\left(i(\omega t - kz)\right)\vec{u_y}$

$\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 f(x,y)\exp\left(i(\omega t - kz)\right)\vec{u_y}$

d'où : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) f = 0$

d) $r^2 + \underbrace{\left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)}_{A} = 0$ Éq. cara.

* Si $A = 0$, f fonction affine de x

Ne peut pas s'annuler en $x = 0$
ET $x = a$
Impossible.

* Si $A < 0$

$$f(x) = \alpha \exp\left(\sqrt{-A}\,x\right) + \beta \exp\left(-\sqrt{-A}\,x\right)$$

CL1 : $f(0) = \alpha + \beta = 0$

$$\Rightarrow f(x) = \alpha\left(\exp\sqrt{-A}\,x - \exp(\sqrt{A}\,x)\right)$$

$$sh\,x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$= 2\alpha\, sh\left(-\sqrt{-A}\,x\right)$$

CL2 : $f(a) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

Solution non pertinente.

* Si $A > 0$

$$f(x) = \alpha \sin\left(\sqrt{A}\,x\right) + \beta \cos\left(\sqrt{A}\,x\right).$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$f(a) = 0 \Rightarrow \alpha \sin\left(\sqrt{A}\,a\right) = 0$$

$$\sin\left(\sqrt{A}\,a\right) = 0$$

$$\sqrt{A}\,a = n\pi.$$

$$\sqrt{A} = \frac{n\pi}{a}$$

D'où $f(x) = \alpha \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$

e) $\vec{E}(M,t) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \exp\left(i(\omega t - kz)\right)\vec{u_y}$

$E_0 = \alpha$

$\sqrt{A} = \frac{n\pi}{a}$ $\quad A^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$$

$$k = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \frac{n^2\pi^2}{a^2}}$$

Onde | progressive suivant z
| stationnaire suivant x

Propagation en zig-zag.

f) Il faut $k > 0$

$$\frac{\omega}{c} > \frac{\pi}{a}$$

$\omega > \frac{\pi c}{a}$ $\quad f > \frac{c}{2a} = f_c$

Filtrage passe-haut.

Exercice 16 : Propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur réel

Un métal est un milieu conducteur, dans lequel peut exister un courant volumique dit de conduction, formé d'électrons délocalisés dans tout le conducteur. La loi d'Ohm locale donne l'expression de ce courant volumique

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E},$$

où γ est la conductivité du milieu.

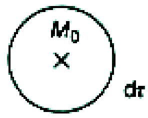


Figure 6

1. Trouver une équation satisfaite par la densité volumique de charge $\rho(M, t)$. On suppose qu'autour d'un point M_0 du métal, la charge volumique est non nulle et égale à ρ_0 à l'instant $t = 0$ (Fig. 6). Donner l'évolution de $\rho(M_0, t)$. En déduire un temps typique de disparition de la charge. L'évaluer pour $\gamma \simeq 5 \cdot 10^7\ \Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$ (cas du cuivre) et $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F} \cdot \mathrm{m}^{-1}$. Que peut-on en conclure ?

2. Un courant peut-il exister dans un milieu localement vide de charge, c'est-à-dire tel que $\rho = 0$?

3. Exprimer le rapport entre les densités volumiques de courant de déplacement et de conduction pour un champ électrique de pulsation ω. À quelle condition sur la pulsation peut-on négliger le premier devant le second ? On supposera désormais que c'est le cas.

4. Écrire les équations de Maxwell dans le conducteur. En déduire l'équation de propagation du champ électrique.

5. Commenter le résultat en le comparant à une équation de propagation bien connue. Que laisse présager la présence d'une dérivée d'ordre impair ?

6. On considère un champ électrique de la forme (transverse car $\rho = 0$)

$$\underline{\mathbf{E}} = E_0 \exp i(\omega t - kz)\, \mathbf{u}_x .$$

En déduire la relation de dispersion dans le métal. Commentaire ?

7. Exprimer alors k, et décrire les deux possibilités pour le champ électrique $\mathbf{E}$. L'onde se propage-t-elle ? Est-elle évanescente ? On pose $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$.

8. À quoi correspond la partie réelle de k ? Qu'en est-il de sa partie imaginaire ?

9. On suppose désormais que le conducteur occupe le demi-espace $z > 0$. On envoie une onde sur le conducteur, et le champ transmis est de l'une des deux formes obtenues à la question précédente. Préciser laquelle. Interpréter physiquement δ, et évaluer sa valeur pour $f = 500$ kHz, 1 Ghz et 10 THz. Expliquer la dénomination usuelle d'« épaisseur de peau » donnée à δ. Que se passe-t-il dans la limite $\gamma \to \infty$?

Propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur réel.

1. Eq. cons. charge :

$$\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\gamma\,\mathrm{div}\,\vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\gamma \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho = 0$$

$$\rho = A e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec } \tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$$

A $t=0$, $\rho = \rho_0 \Rightarrow A = \rho_0$

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec } \tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} = \frac{8{,}85.10^{-12}}{5.10^{7}} \simeq 10^{-19}\ \text{s}$$

$\rho \rightarrow 0$ quasi-instantanément.

2. Oui !

$\rho = 0 \Leftrightarrow$ Neutralité : $n_{\text{charge}+} = n_{\text{charge}-}$ dans un volume donné.

Mais on peut avoir ces charges en mouvement ($\Leftrightarrow$ courant) !

3. $$\frac{\|\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|}{\|\mu_0 \vec{j}\|} = \frac{\varepsilon_0 \|\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|}{\|\vec{j}\|} = \frac{\varepsilon_0 E\omega}{\gamma} = \frac{\varepsilon_0 \cancel{E}\omega}{\gamma \cancel{E}} = \frac{\varepsilon_0\omega}{\gamma} = \omega\tau$$

Si $\omega\tau \ll 1$ cad $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ (B.F. !)

alors $\|\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\| \ll \|\mu_0 \vec{j}\|$

1

4. $\text{div}\,\vec{E} = 0$

$\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\text{div}\,\vec{B} = 0$

$\vec{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$.

5. $\vec{\text{rot}}\left(\vec{\text{rot}}(\vec{E})\right) = \vec{\text{grad}}\left(\text{div}\,\vec{E}\right) - \vec{\Delta}(\vec{E})$

$-\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\text{rot}}\,\vec{B}\right) = 0 - \vec{\Delta}\vec{E}$

$-\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \gamma \vec{E}\right) = -\vec{\Delta}\vec{E}$

$\vec{\Delta}\vec{E} - \mu_0 \gamma \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$

Dérivée seconde / espace   Dérivée / temps

6. $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp\left(i(\omega t - kz)\right) \vec{u}_x$

$k^2 \underline{\vec{E}} + \mu_0 \gamma \omega\, \underline{\vec{E}} = 0$

$k^2 = -i\mu_0 \gamma \omega$

Relation non linéaire $\Rightarrow$ dispersion

7. $k^2 = \mu_0 \gamma \omega\, e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$k = \pm\sqrt{\mu_0 \gamma \omega}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} = \pm\sqrt{\mu_0 \gamma \omega}\,\dfrac{1-i}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{1-i}{\delta}$

$$\vec{E} = E_0 \exp i\left(\omega t - \frac{(1-i)}{\delta} z\right) \vec{u_z} \qquad (1)$$

$$= E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \vec{u_z}$$

Propagation z^+ ⊕ atténuation

ou

$$\vec{E} = E_0 \exp i\left(\omega t + \frac{(1-i)}{\delta} z\right) \vec{u_z} \qquad (2)$$

$$= E_0 \exp\left(\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t + \frac{z}{\delta}\right)\right) \vec{u_z}$$

Propagation z^- ⊕ atténuation.

8. Partie réelle → propagation.
Partie imaginaire → atténuation.

9. Forme (1) car $\|\vec{E}\|$ reste borné lorsque $z \to +\infty$

δ = longueur de pénétration de l'onde.
épaisseur de peau.

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} = \sqrt{\frac{\cancel{2}}{4\pi.10^{-7}.5.10^{7}.\cancel{2}\pi.500.10^{3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4\pi^2 \times 2500 \times 10^3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 \times 2{,}5 \times 10^6}} \ll 10^{-3} \simeq 1\,mm$$

Si $\gamma \to +\infty$, alors $\delta \to 0$
les ondes électromagnétiques ne pénètrent pas dans les conducteurs parfaits.