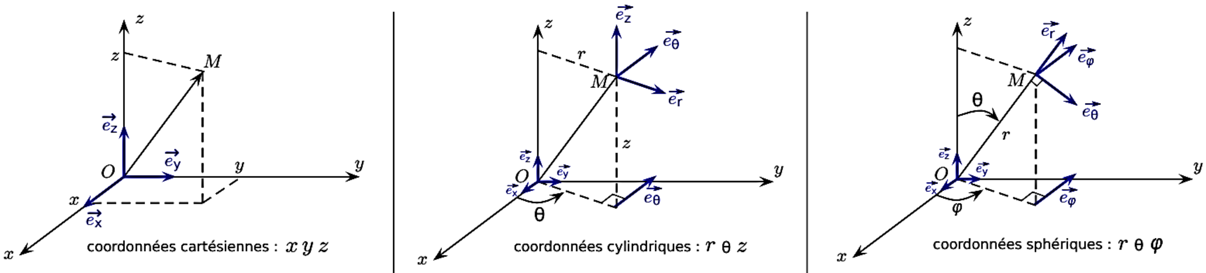
ANALYSE VECTORIELLE (1)

Merci à M. Melzani !

Systèmes de coordonnées : cartésiennes, cylindriques, sphériques

Simulations : [Menu Cinématique]



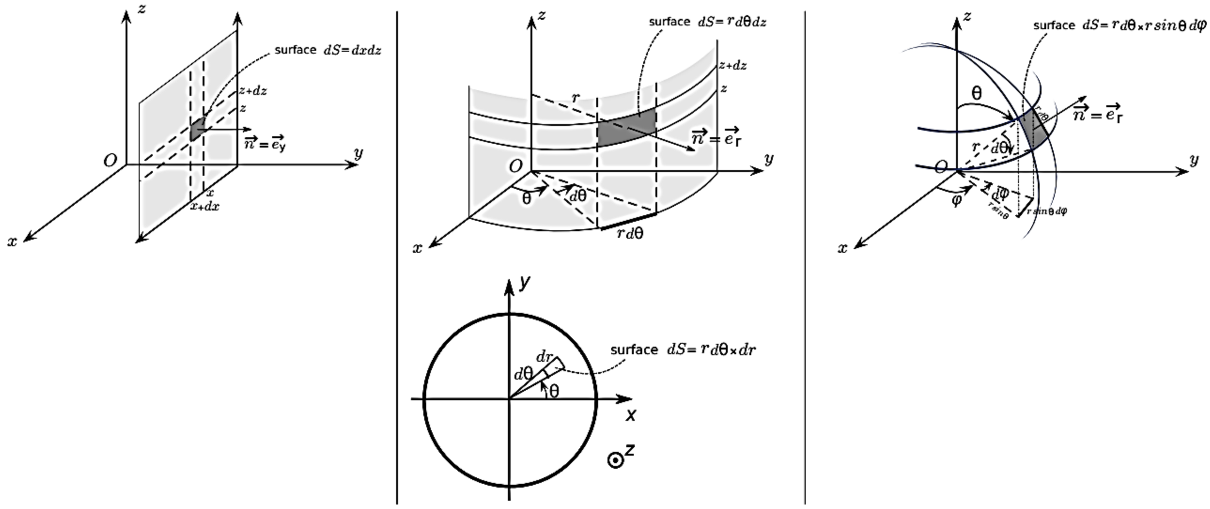
$x, y, z \in]-\infty, +\infty[$

$r \in [0, +\infty[$
$\theta \in [0, 2\pi]$
$z \in]-\infty, +\infty[$

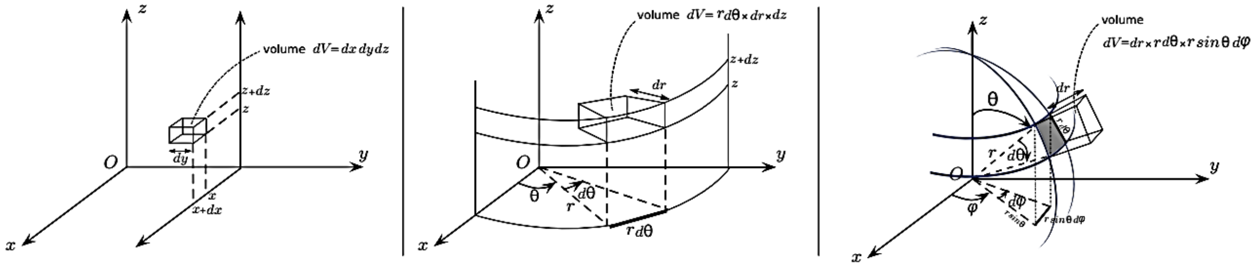
$r \in [0, +\infty[$
$\theta \in [0, \pi]$
$\varphi \in [0, 2\pi]$

Remarque : Les coordonnées polaires correspondent aux coordonnées cylindriques, mais dans un plan seulement (coordonnées r et θ, pas de z). C'est un système à deux dimensions.

Surfaces élémentaires :



Volumes élémentaires :



Vecteurs déplacements élémentaires :

- Cartésiennes* : $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$.
- Cylindriques : $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$.
- Sphériques : $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi$.

Opérateurs Gradient, Divergence, Rotationnel, Laplacien

$f(x,y,z)$ est un champ scalaire quelconque. $\vec{A}(x,y,z)$ est un champ vectoriel quelconque. Pour alléger les notations des dérivées partielles, on ne note pas les variables qui sont gardées fixées, mais elles sont sous-entendues.

On note les vecteurs avec la notation $\vec{A} = \left| \begin{array}{l} A_x \\ A_y \\ A_z \end{array} \right. = A_x\,\vec{e}_x + A_y\,\vec{e}_y + A_z\,\vec{e}_z$

On introduit le "vecteur" nabla : $\vec{\nabla} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{array} \right.$. Ce n'est pas vraiment un vecteur. C'est un moyen pratique de retrouver les formules des différents opérateurs en coordonnées cartésiennes (mais pas forcément pour les autres systèmes de coordonnées).

Opérateur	Remarque importante	Expression en coordonnées cartésiennes	Comment le retrouver avec nabla
Gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$	s'applique à un **scalaire** retourne un **vecteur**	$\left\| \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right.$	$\vec{\nabla} f = \left\| \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{array} \right. f = \left\| \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right.$
Divergence $\text{div}\,\vec{A}$	s'applique à un **vecteur** retourne un **scalaire**	$\dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left\| \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{array} \right. \cdot \left\| \begin{array}{l} A_x \\ A_y \\ A_z \end{array} \right. = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$
Rotationnel $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$	s'applique à un **vecteur** retourne un **vecteur**	$\left\| \begin{array}{l} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{array} \right.$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left\| \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{array} \right. \wedge \left\| \begin{array}{l} A_x \\ A_y \\ A_z \end{array} \right. = \left\| \begin{array}{l} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{array} \right.$
Laplacien scalaire $\Delta f = \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right)$	s'applique à un **scalaire** retourne un **scalaire**	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\nabla^2 f = \left\Vert \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{array} \right\Vert^2 f = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f$
Laplacien vectoriel $\Delta\vec{A}$	s'applique à un **vecteur** retourne un **vecteur**	$\left\| \begin{array}{l} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{array} \right. = \left\| \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{array} \right.$	Rq : on trouve parfois la notation $\vec{\Delta}\vec{A}$, qui insiste sur le fait que le laplacien vectoriel retourne un vecteur.