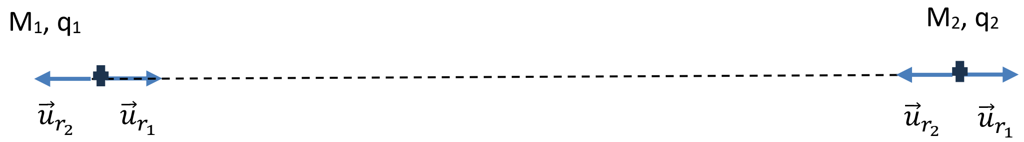
# FORMULAIRE ELECTROMAGNETISME

➢ **Force électrostatique et Loi de Coulomb**




La **force électrostatique** est définie par la **loi de Coulomb** :

$$\vec{F}_{1\,sur\,2} = -\vec{F}_{2\,sur\,1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_{r_1} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_{r_2}$$

$\varepsilon_0$ : Permittivité diélectrique du vide, $\varepsilon_0$ $en\ F.m^{-1}$ $(farads\ par\ mètre)$

➢ **Champ électrostatique**

Le **champ électrostatique** créé, en tout point M de l'espace, par une **charge ponctuelle** $\boldsymbol{q}$ située en P**,** est **radial** et ne dépend que de la distance $\boldsymbol{r = PM}$ :

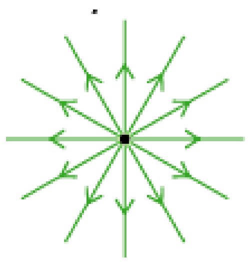
$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

Unités : E en V.m$^{-1}$, q en C ou F.V, $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ **en F.m$^{-1}$, $\boldsymbol{r^2}$ en m$^2$**

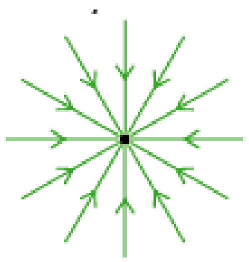
➢ Lignes de champ électrostatique $\vec{E}$ dans les cas suivants :
- Une charge ponctuelle $q > 0$ ;
- Une charge ponctuelle $q < 0$ ;
- Deux charges ponctuelles de signe opposé.

Une charge ponctuelle $q$ :

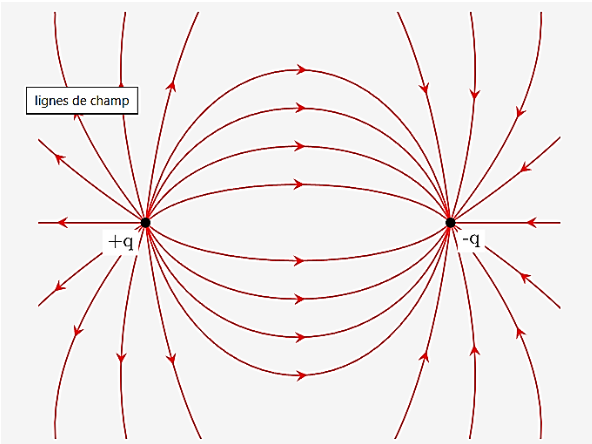
$q > 0$



$q < 0$



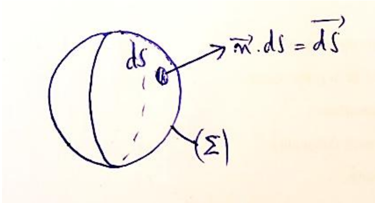
Deux charges ponctuelles de signe opposé :



- **Théorème de Gauss**

$(\Sigma)$ surface fermée orientée vers l'extérieur,

$Q_{int} = \sum q_i$ situées à l'intérieur de $(\Sigma)$,




$\varepsilon_0$ : Permittivité diélectrique du vide $(\mathrm{F.m^{-1}})$

**Théorème de Gauss :**

$$\oiint_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{E}}.\overrightarrow{\boldsymbol{dS}} = \frac{\boldsymbol{Q_{int}}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$$

- Equation de **Maxwell-Gauss**

L'équation de **Maxwell-Gauss** traduit localement le **Théorème de Gauss** :

**Equation de Maxwell-Gauss :**

$$\boldsymbol{div\vec{E}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}.\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$$

$\rho$ : densité volumique de charges (C.m$^{-3}$)

$\varepsilon_0$ : Permittivité diélectrique du vide $(\mathrm{F.m^{-1}})$

Si $\rho = 0$ (pas de charge électrique, localement) :

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

- **Energie potentielle électrostatique** $E_P(M)$ et **potentiel électrostatique** $V(M)$ liés au champ $\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$.

**Energie potentielle électrostatique** liée au champ $\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$ :

$$\boldsymbol{E_P(M) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}}\ (\boldsymbol{en\ joules, J})$$

**Potentiel électrostatique** lié au champ $\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$ :

$$\boldsymbol{V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}\ (\boldsymbol{en\ volts, V})$$

- Relations entre le champ électrostatique $\vec{E}$ et le potentiel $\boldsymbol{V}$

Circulation du champ :

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

Gradient :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$$

- Equation de **Maxwell-Faraday** de la statique :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$$

- **Théorème de Coulomb**.

**Théorème de Coulomb** : Au voisinage immédiat d'un conducteur électrostatique, le champ électrostatique peut s'écrire :

$$\boldsymbol{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\vec{n}}$$

$\sigma$ : densité surfacique de charges (C.m$^{-2}$)

$\vec{n}$ : normale à la surface du conducteur, orientée vers l'extérieur

- Vecteur densité de courant $\vec{j}$ et intensité du courant $I$.

Dans un milieu conducteur de l'électricité, le déplacement des charges électriques peut être traduit par le **vecteur densité de courant $\vec{j}$**.

$$\boldsymbol{\vec{j} = \rho_l.\vec{v} = n^*.q.\vec{v}}$$

$\boldsymbol{\vec{j}}$ : vecteur densité de courant (C.m$^{-2}$.s$^{-1}$ ou A.m$^{-2}$)

$\boldsymbol{\rho_l}$ : densité volumique de charges libres (C.m$^{-3}$)

$\boldsymbol{\vec{v}}$ : vitesse moyenne de déplacement des charges (m.s$^{-1}$)

$n^*$ : nombre de porteurs de charges par unité de volume (m$^{-3}$)

$q$ : charge de chaque porteur de charge (C)

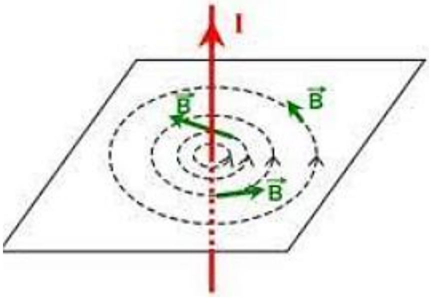
**L'intensité du courant** électrique $\boldsymbol{I}$ est définie comme le flux de $\boldsymbol{\vec{j}}$ à travers une surface (section) $\boldsymbol{S}$ du conducteur mais aussi comme le débit de charges électriques :

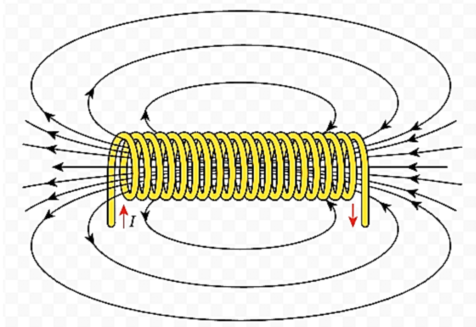
$$\boldsymbol{I = \iint_S \vec{j}.\overrightarrow{dS} = \frac{dq}{dt}}$$

$\boldsymbol{I}$ : Intensité du courant électrique (A)

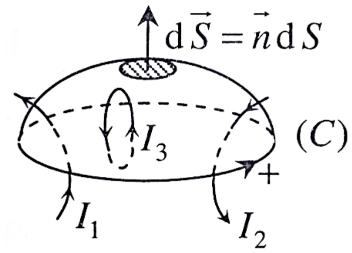
$\boldsymbol{q}$ : Charge électrique (C)

➢ Lignes de champ magnétostatique $\vec{B}$ dans les cas suivants : Fil infini traversé par un courant $I$ ; bobine longue traversée par un courant $I$.




➢ **Théorème d'Ampère**




$\oint_{(C)} \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0.I_e$ avec $I_e = \iint_S \vec{j}.\vec{dS}$

**$\mu_0$ : perméabilité magnétique du vide**

➢ Equation **de Maxwell-Ampère** de la statique (forme locale)

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

➢ Equation de conservation de la charge.

**Equation de conservation de la charge, ou équation de continuité :**

$$div(\vec{j}) + \frac{\partial \rho_l}{\partial t} = 0$$

$\vec{j}$ : densité de courant (A.m$^{-2}$)

$\rho_l$ : densité volumique de charges libres (C.m$^{-3}$)

➢ Loi d'ohm sous forme locale.

**Loi d'ohm locale dans un milieu conducteur :** $\vec{j} = \sigma.\vec{E}$

$\vec{E}$ : champ électrique (V.m$^{-1}$)

$\vec{j}$ : densité de courant (A.m$^{-2}$)

$\sigma$ : conductivité électrique (Ω$^{-1}$.m$^{-1}$)

➢ Equations de Maxwell

| Equation | **Statique** Présence de sources | **Remarques** | **Variable Quelconque** Présence de sources |
|---|---|---|---|
| **Maxwell Gauss** $\boldsymbol{div\vec{E}} =$ | $\boldsymbol{\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ | Forme locale du théorème de Gauss $\oiint_{\Sigma} \boldsymbol{\vec{E}.\vec{dS}} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ | $\boldsymbol{\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ |
| **Maxwell Faraday** $\boldsymbol{\overrightarrow{rot}\vec{E}} =$ | $\boldsymbol{\vec{0}}$ | La **circulation** du champ électrostatique est **conservative** | $\boldsymbol{-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$ |
| **Maxwell Thomson ou Maxwell Flux** $\boldsymbol{div\vec{B}} =$ | **0** | Le champ magnétique est à **flux conservatif** | **0** |
| **Maxwell Ampère** $\boldsymbol{\overrightarrow{rot}\vec{B}} =$ | $\boldsymbol{\mu_0\vec{j}}$ | Forme locale du théorème d' Ampère $\oint_{(C)} \boldsymbol{\vec{B}.\vec{dl}} = \boldsymbol{\mu_0.I_e}$ | $\boldsymbol{\mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$ |

- Equations de Maxwell dans le vide en l'absence de charges ($\rho = 0$) et de courants ($\vec{j} = \vec{0}$) :

  **Maxwell Gauss :** $\boldsymbol{div\vec{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \boldsymbol{0}$

  **Maxwell Faraday :** $\boldsymbol{\overrightarrow{rot}\vec{E}} = -\boldsymbol{\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$

  **Maxwell Thomson :** $\boldsymbol{div\vec{B}} = \boldsymbol{0}$

  **Maxwell Ampère :** $\boldsymbol{\overrightarrow{rot}\vec{B}} = \mu_0\vec{j} + \boldsymbol{\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}} = \boldsymbol{\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$

- Onde Plane Progressive Harmonique OPPH (= une seule fréquence) ou Monochromatique OPPM (= une seule couleur), avec propagation selon l'axe $x$, dans le sens des $x$ croissants :

  **Onde Plane Progressive Harmonique (OPPH) :**

  $\boldsymbol{\vec{E}(M,t) = \vec{E}(x,t) = \vec{E}_0\cos(\omega t - kx + \varphi_0)}$ avec $E_0 = cte$

  $\boldsymbol{\vec{B}(M,t) = \vec{B}(x,t) = \vec{B}_0\cos(\omega t - kx + \varphi_0')}$ avec $B_0 = cte'$

  $\boldsymbol{\omega}$ : pulsation temporelle (rad.s$^{-1}$)

$\boldsymbol{T} = \frac{2\pi}{\omega}$ : période temporelle (s)

$\boldsymbol{\varphi_0}, \boldsymbol{\varphi_0}'$ : phases à l'origine des temps et des espaces (rad)

$\boldsymbol{k} = \|\vec{\boldsymbol{k}}\|$ avec $\vec{\boldsymbol{k}} = \|\vec{\boldsymbol{k}}\|.\vec{\boldsymbol{n}} = \|\vec{\boldsymbol{k}}\|.\overrightarrow{\boldsymbol{u_x}}$ vecteur d'onde ($m^{-1}$) dans le sens de la propagation

$\boldsymbol{\lambda} = \frac{2\pi}{k}$ : période spatiale ou longueur d'onde (m)

- Onde Plane Progressive Harmonique (OPPH) : notation complexe et dérivées
  $\vec{E}(M,t) = \vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$ avec $E_0 = cte$
  $\vec{B}(M,t) = \vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - kx)$ avec $B_0 = cte'$
  En notations complexes :

  $\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}}(x,t) = \vec{E}_0 \operatorname{expj}(\omega t - kx)$
  $\underline{\vec{B}}(M,t) = \underline{\vec{B}}(x,t) = \vec{B}_0 \operatorname{expj}(\omega t - kx)$

Dérivées temporelles :

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = j\omega\underline{\vec{E}} \qquad \frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = j\omega\underline{\vec{B}}$$

Dérivées spatiales :

$$div\underline{\vec{E}} = -j\vec{k}.\underline{\vec{E}} \qquad \overrightarrow{rot}\underline{\vec{E}} = -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$$

$$div\underline{\vec{B}} = -j\vec{k}.\underline{\vec{B}} \qquad \overrightarrow{rot}\underline{\vec{B}} = -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}}$$

- Onde électromagnétique : relations reliant $\vec{B}$ à $\vec{E}$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ou : $\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}$ **dans le cas d'une OPPM**

- Vecteur de Poynting et puissance rayonnée par une onde électromagnétique

Le **vecteur de Poynting** $\vec{\boldsymbol{R}}$ représente la densité surfacique de puissance rayonnée :

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$$ **Unité : $W.m^{-2}$**

La **puissance rayonnée** par le champ électromagnétique à travers une surface correspond au flux du vecteur de Poynting à travers cette surface :

$$\boldsymbol{P_{ray}} = \iint_S \vec{\boldsymbol{R}}.\overrightarrow{\boldsymbol{dS}} = \iint_S \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}.\overrightarrow{\boldsymbol{dS}}$$ Unité : W

- Modèle mathématique d'une Onde Stationnaire Harmonique (OSH) électromagnétique

$$\overrightarrow{E_T}(x,t) = 2E_{0i}\sin(\omega t)\sin(kx)\,\overrightarrow{u_y} = E_{0T}\sin(\omega t)\sin(kx)\,\overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{B_T}(x,t) = 2\frac{E_{0i}}{c}\cos(\omega t)\cos(kx)\,\overrightarrow{u_z} = \frac{E_{0T}}{c}\cos(\omega t)\cos(kx)\,\overrightarrow{u_z}$$