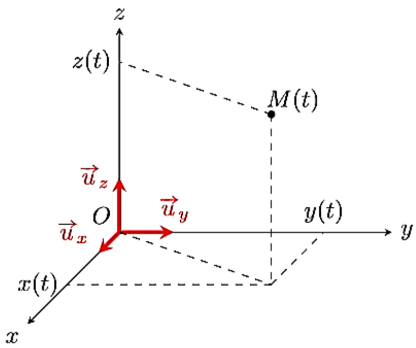
FORMULAIRE DE MECANIQUE

1) Vecteurs position, vitesse instantanée et accélération instantanée + unités

Vecteur position (mètres, m) :



$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{u}_x + y.\vec{u}_y + z.\vec{u}_z$$

Vecteur vitesse instantanée $\vec{v}_{M/R}$ d'un point M dans un référentiel R ($v_{M/R}$ en **mètres par seconde, m.s^{-1}**) :

$$\vec{v}_{M/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \dot{x}.\vec{u}_x + \dot{y}.\vec{u}_y + \dot{z}.\vec{u}_z$$

Vecteur accélération instantanée $\vec{a}_{M/R}$ d'un point M dans un référentiel R ($a_{M/R}$ en **mètres par seconde au carré, m.s^{-2}**) :

$$\vec{a}_{M/R} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_R = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_R = \ddot{x}.\vec{u}_x + \ddot{y}.\vec{u}_y + \ddot{z}.\vec{u}_z$$

2) Vitesse moyenne, accélération moyenne + unités

Dans le cas d'un **mouvement unidirectionnel d'axe *x***, la **vitesse moyenne (scalaire)** est définie de la façon suivante :

$v_{MOY} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (en mètres par seconde, m.s^{-1})

Dans le cas d'un **mouvement unidirectionnel d'axe *x***, **l'accélération moyenne (scalaire)** est définie de la façon suivante :

$a_{MOY} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (en mètres par seconde au carré, m.s^{-2})

3) Principe fondamental de la dynamique

Quantité de mouvement d'un point matériel M de masse *m*, en mouvement dans un référentiel *R* :

$$\overrightarrow{p_{M\,/\,R}} = m.\overrightarrow{v_{M\,/\,R}}$$

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$\sum \vec{F}_{ext\ sur\ M} = \left(\frac{d\overrightarrow{p_{M\,/\,R}}}{dt}\right) = m.\overrightarrow{a_{M\,/\,R}}$$

4) Expression de quelques forces + unités

Gravitation : $\vec{F}_{AsurB} = -\vec{F}_{BsurA} = -G\frac{m_A m_B}{r^2}\vec{u}_{A\to B}$

F_{AsurB} poids en newtons (N),

G = 6.67.10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2} constante de gravitation universelle

r = distance AB (m)

m_A et m_B masses en kilogrammes (kg)

$\vec{u}_{A\to B}$ vecteur unitaire

Poids : $\boldsymbol{\vec{P} = \vec{F}_{Terre\to m} = m.\vec{g}}$

P poids en newtons (N)

m masse en kilogrammes (kg)

g accélération de la pesanteur (m.s^{-2})

Force de rappel élastique : $\boldsymbol{\vec{T} = -k.(l - l_0).\overrightarrow{u_x} = -k.x.\overrightarrow{u_x}}$

T en newtons (N)

k = raideur du ressort (N.m^{-1})

x = allongement du ressort : $x = l - l_0$ (m)

$\overrightarrow{u_x}$: vecteur unitaire sortant du ressort

Force de frottement fluide : $\boldsymbol{\vec{f} = -h.\vec{v}}$

f en newtons (N)

h coefficient de frottement fluide (kg.s^{-1})

v : vitesse du point matériel (m.s^{-1})

Poussée d'Archimède : Un système immergé dans un fluide subit de la part de ce fluide une force verticale vers le haut égale à l'opposé du poids du volume de fluide déplacé.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\Pi_a} = -\rho_{fluide} V g \overrightarrow{u_z}} \text{ (pour un axe z orienté vers le bas)}$$

5) MRU ET MRUA

Mouvement rectiligne uniforme (MRU) : mouvement rectiligne à vitesse constante.

- **Accélération** $a(t) = \ddot{x}(t) = 0$
- **Vitesse** $v(t) = \dot{x}(t) = v_0$
- **Position** $x(t) = v_0 t + x_0$

Mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA) : mouvement rectiligne à accélération constante.

- **Accélération** $a(t) = \ddot{x}(0) = a_0$
- **Vitesse** $v(t) = \dot{x}(t) = a_0.t + v_0$
- **Position** $x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$

6) Travail et puissance d’une force + unités

Travail élémentaire fourni par la force $\vec{F}$ au point matériel M au cours de son déplacement élémentaire $\overrightarrow{dM}$:

$$\boldsymbol{\delta W(\vec{F})_{/R} = \vec{F}.\overrightarrow{dM}}$$

Unité du travail : le joule (J)

Travail d’une force $\vec{F}$ le long d’une trajectoire donnée allant de A vers B :

$$\boldsymbol{W(\vec{F})_{A\to B} = \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{F(M)}.\overrightarrow{dM}}$$

Puissance fournie par la force $\vec{F}$ au point matériel M :

$$\boldsymbol{P(\vec{F})_{/R} = \frac{\delta W(\vec{F})_{/R}}{dt} = \vec{F}.\overrightarrow{v_{M/R}}}$$

Unité de la puissance : le watt (W)

7) Energie cinétique

Energie cinétique d’un point matériel de masse *m*, en mouvement dans un référentiel *R* :

$$\boldsymbol{E_{c,M/R} = \frac{1}{2} m {v_{M/R}}^2}$$

Théorème de l’énergie cinétique pour un point matériel de masse m se déplaçant le long d’une trajectoire $\widehat{\mathrm{AB}}$:

$$\boldsymbol{\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum W(\overrightarrow{F_n})_{A\to B}}$$

Théorème de la puissance cinétique ;

$$\mathbf{\frac{dE_C}{dt}_{/R} = \sum P_{/R}(\overrightarrow{F_n})}$$

8) Energie potentielle

Une force est dite **conservative** si son travail le long d’une trajectoire $\widehat{AB}$ ne dépend que des points A et B, et pas du chemin suivi pour aller de A vers B.

Dans ce cas, la force $\vec{F}$ dérive d’une **énergie potentielle *E_P*** :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad(E_P)} = -\left(\frac{\partial E_P}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\overrightarrow{u_z} \right)$$

Dans ce cas :

$$\boldsymbol{W(\vec{F})_{A\to B} = -\Delta E_P = E_P(A) - E_P(B)}$$

ou

$$\boldsymbol{\delta W(\vec{F}) = -dE_P}$$

Energie Potentielle de Pesanteur ***E_{PP}*** mesurée le long d'un axe vertical orienté vers le haut :

$$\boldsymbol{E_{PP} = mgz + cte}$$

Energie Potentielle de Pesanteur ***E_{PP}*** mesurée le long d'un axe **vertical orienté vers le bas :**

$$\boldsymbol{E_{PP} = - mgz + cte'}$$

Les constantes sont déterminées à partir des Conditions aux Limites (CL)

Energie Potentielle Elastique ***$E_{P\,él}$*** dont dérive la force de rappel élastique $\overrightarrow{\boldsymbol{F_{él}}}$ exercée par un ressort de raideur *k* :

$$\boldsymbol{E_{P\,él} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2} \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{F_{él}}} = \boldsymbol{-k.x.\overrightarrow{u_x}} \text{ si allongement } x = l - l_0 \text{ suivant } \overrightarrow{u_x}$$

9) Energie mécanique

Energie mécanique d'un point matériel :

$$\boldsymbol{E_m = E_C + E_P}$$

Théorème de l'Energie Mécanique pour un point matériel de masse m :

$$\boldsymbol{\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}(E_C + E_P) = P(\vec{F}_{non\ conservative})}$$

10) Positions d'équilibre

Une position d'équilibre est **stable** si la force y ramène le point matériel lorsqu'il est faiblement éloigné. Dans ce cas, **l'énergie potentielle** est **minimale**. On a :

$$\boldsymbol{\frac{dE_P}{dx}(x_{éq}) = 0} \qquad \boldsymbol{\frac{d^2E_P}{dx^2}(x_{éq}) > 0}$$

Une position d'équilibre est **instable** si la force en éloigne le point matériel lorsqu'il est faiblement éloigné. Dans ce cas, **l'énergie potentielle** est **maximale**. On a :

$$\boldsymbol{\frac{dE_P}{dx}(x_{éq}) = 0} \qquad \boldsymbol{\frac{d^2E_P}{dx^2}(x_{éq}) < 0}$$

11) Modèle mathématique d'une onde plane progressive se propageant à la célérité c dans le sens des x croissants

$y(x,t) = F(x - ct)$ avec F fonction quelconque

Pour $t = 0$, $y(x,0) = F(x)$

La fonction F correspond à la représentation spatiale à $t = 0$.

Autre expression :

$y(x,t) = f(t - \frac{x}{c})$ avec f fonction quelconque

Pour $x = 0$, $y(0,t) = f(t)$

La fonction f correspond à la représentation temporelle en $x = 0$.

12) Modèle mathématique d'une onde plane progressive se propageant à la célérité c dans le sens des x décroissants

$y(x,t) = G(x + ct)$ avec G fonction quelconque

Pour $t = 0$, $y(x,0) = G(x)$

La fonction G correspond à la représentation spatiale à $t = 0$.

Autre expression :

$y(x,t) = g(t + \frac{x}{c})$ avec g fonction quelconque

Pour $x = 0$, $y(0,t) = g(t)$

La fonction g correspond à la représentation temporelle en $x = 0$.

13) Modèle mathématique d'une Onde Progressive Harmonique OPH y de pulsation ω se propageant à la célérité c dans la direction x

$$y(x,t) = Y_m \cos(\omega t \pm kx + \varphi)$$

Y_m > 0 est l'amplitude de l'onde

ω > 0 est la pulsation de l'onde ($rad.s^{-1}$)

k > 0 est la norme du vecteur d'onde ($rad.m^{-1}$)

φ est la phase à l'origine (rad)

14) Caractéristiques de la « double périodicité » de l'OPH $y(x,t) = Y_m \cos[\omega t \pm kx + \varphi]$

L'OPH $Y_m \cos[\omega t \pm kx + \varphi]$ est une fonction « doublement sinusoïdale » :

- A x fixé, elle une fonction sinusoïdale de t (représentation temporelle = chronogramme), de **pulsation temporelle ω.**
- A t fixé, elle est une fonction sinusoïdale de x (représentation spatiale = photo), de **pulsation spatiale k.**

L'OPH possède donc une **double périodicité**, spatiale et temporelle.

	Pulsation	Fréquence	Période
Temporel	ω	f	T
Spatial	$k = \frac{\omega}{c}$	$\sigma = \frac{f}{c}$	$\lambda = \frac{c}{f} = cT$

15) Modèle mathématique d'une Onde Stationnaire Harmonique (OSH)

Forme mathématique générale d'une **Onde Stationnaire Harmonique (OSH)** :

$$\boldsymbol{y(x,t) = Y_m \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)}$$

Pour une Onde Stationnaire Harmonique (OSH), les termes dépendant du temps $\cos(\omega t + \varphi)$ et de l'espace $\cos(kx + \psi)$ sont **découplés**, contrairement à l'OPH.

Le terme $Y_m|\cos(kx + \psi)|$ représente l'amplitude de vibration locale en x.