

INDUCTION ET FORCES DE LAPLACE

Exercice 2 : Rails de Laplace

1. Mouvement de la tige

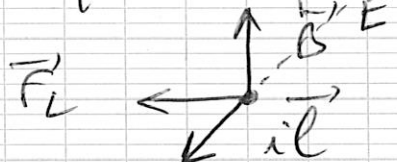
$\Rightarrow S$ (surface du circuit) $\nearrow$

$\Rightarrow \Phi = BS \cos \alpha = BS$ $\nearrow$

$\Rightarrow$ Il apparaît $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ et i .

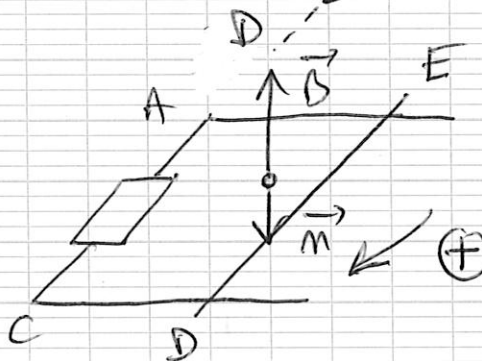
2. $\vec{F} = F\vec{j}$ vers la droite.

loi de Lenz : i doit être tel qu'il apparaît une force de Laplace $F_L = i l \wedge \vec{B}$ vers la gauche.



i de E vers D.

3.



$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot S$$

$$\Phi = -BS$$

avec $S = l(x_0 + x)$
et $x = vt$.

d'où :

$$\Phi = -Bl(x_0 + vt)$$

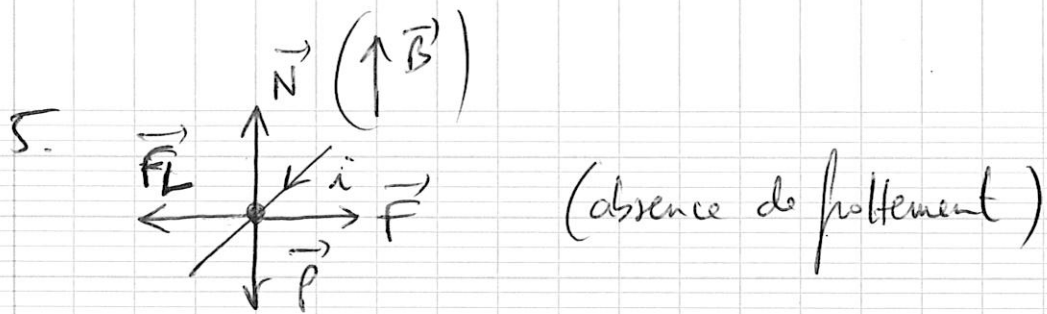
$$\boxed{\Phi = -Blx_0 - Blvt}$$

$$\Phi_0 = -Blx_0$$

$$a = -Blv$$

4. $e = -\frac{d\Phi}{dt} = Blv$

loi de Faraday.



Pour obtenir une vitesse constante :

$$\|\vec{F}\| = \|\vec{F}_L\|$$

$$\begin{aligned} \|\vec{F}\| = \|\vec{F}_L\| &= |\sin \theta| = \left| \frac{Blv}{R} \right| \\ &= \left| \frac{B^2 l^2 v}{R} \right| \end{aligned}$$

Exercice 3: Spire en rotation

1. $\phi = \vec{B} \cdot \vec{m} = BS \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = BS \sin \theta$

(l'angle entre $\vec{n}$ et $\vec{B}$ est $\theta - \frac{\pi}{2}$)

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -BS \dot{\theta} \cos \theta = -BS \Omega \cos(\Omega t)$$

$$i = -\frac{BS}{r} \dot{\theta} \cos \theta = -\frac{BS}{r} \Omega \cos(\Omega t)$$

2. $\vec{m} = i S \vec{n}$

3.
$$\begin{aligned} \vec{T} &= \vec{m} \wedge \vec{B} \\ &= i S \vec{n} \wedge \vec{B} \\ &= i S B \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \vec{n}_\Delta = i S B \cos \theta \vec{n}_\Delta \end{aligned}$$

d'où
$$\vec{T} = -\frac{B^2 S^2}{r} \dot{\theta} \cos^2 \theta \vec{n}_\Delta$$

$$T = -\frac{B^2 S^2}{r} \dot{\theta} \cos^2 \theta = -\frac{B^2 S^2}{r} \Omega \cos^2(\Omega t)$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

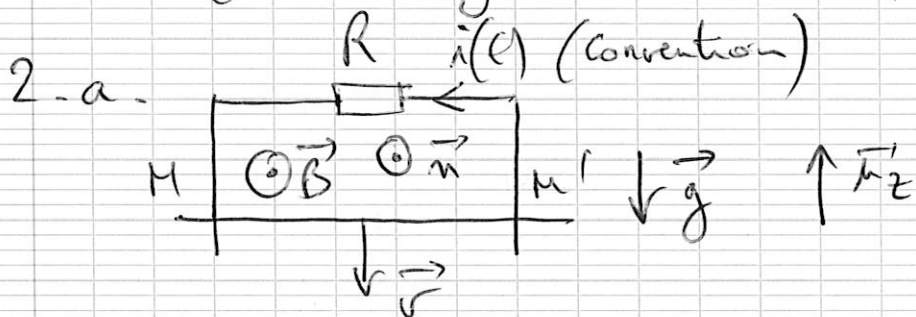
$$T_{\text{moy}} = -\frac{B^2 S^2}{2r} \dot{\theta} = -\frac{B^2 S^2 \Omega}{2r}$$

4. $T_{\text{moy}} < 0$: loi de Lenz (médiation $\Rightarrow$ freinage)

(2)

Exercice 3 : Rails de Laplace verticaux

1. la tige horizontale MM' chute
 - $\Rightarrow$ la surface du circuit S varie
 - $\Rightarrow$ le flux varie
 - $\Rightarrow$ f.e.m. induite et courant induit
 - $\Rightarrow$ force de Laplace sur la tige
 - $\Rightarrow$ freinage de la descente (loi de Lenz $\Rightarrow$ modération).



Compte-tenue des orientations :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} S = BS$$

Avec :

$$S = l(z_0 - z) \quad (z < 0 \text{ compte-tenue des orientations})$$

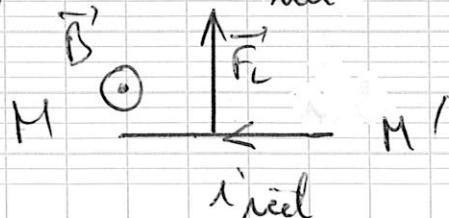
$$\Phi = Bl(z_0 - z) > 0$$

loi de Faraday.

$$\left| \begin{aligned} e &= -\frac{d\Phi}{dt} = Bl \dot{z} \quad (\text{avec } \dot{z} < 0) \\ i &= \frac{Bl \dot{z}}{R} \quad (\text{avec } \dot{z} < 0) \end{aligned} \right. \quad \boxed{i = -\frac{Blv}{R}} \quad (\text{eq. elec})$$

$\nearrow \dot{z} > 0$
 (norme)

Vérification : $i_{\text{réel}} < 0$ (inverse de la convention)

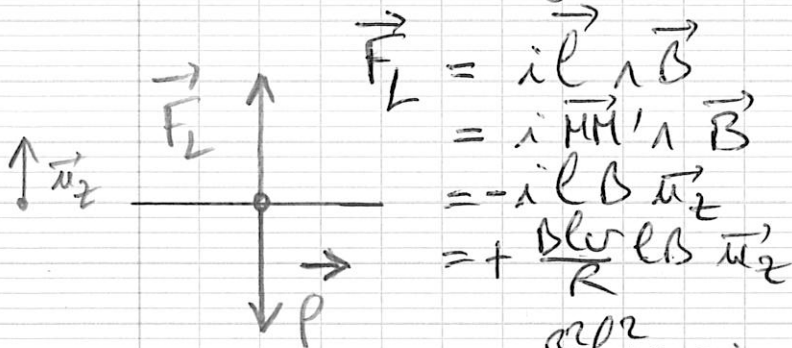


$$\vec{F}_L = i \vec{l} \wedge \vec{B}$$

$\vec{F}_L$ vers le haut

2.b.) Bilan des forces appliquées à la tige :
 2.c.) $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$

(Frottements négligés)



$$\begin{aligned}\vec{F}_L &= i\vec{l} \wedge \vec{B} \\ &= i\vec{MM'} \wedge \vec{B} \\ &= -i\vec{l} B \vec{u}_z \\ &= +\frac{B^2 l^2}{R} \vec{u}_z\end{aligned}$$

$$= +\frac{B^2 l^2}{R} \vec{u}_z \quad \left(= -\frac{B^2 l^2}{R} \vec{u}_z \right) \quad \begin{matrix} (v > 0) \\ (z < 0) \end{matrix}$$

PFD: $\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{u}_z}{dt}$

on: Par projection sur $\vec{u}_z$: $-mg\vec{u}_z + \frac{B^2 l^2}{R} \vec{u}_z = m \frac{d\vec{u}_z}{dt} = -m \frac{dv}{dt} \vec{u}_z$

$$\begin{aligned}-mg - \frac{B^2 l^2}{R} z &= m\ddot{z} \\ -g = \ddot{z} + \frac{B^2 l^2}{mR} z\end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned}-mg + \frac{B^2 l^2}{R} z &= -m \frac{dv}{dt} \\ \frac{dv}{dt} + \frac{B^2 l^2}{mR} z &= +g\end{aligned} \right. \quad (v = v_z)$$

$$z = \frac{mR}{B^2 l^2}$$

Sol. eq. sans second. membre:
 $v_1 = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$

Sol. particulière:

$$v_2 = + \frac{mgR}{B^2 l^2}$$

Sol. générale:

$$v = + \frac{mgR}{B^2 l^2} + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Conditions initiales:

$$v(0)=0 \Rightarrow \lambda = \frac{mgR}{B^2 \ell^2}$$

($\dot{z} = -v$) Solution:
$$v(t) = + \frac{mgR}{B^2 \ell^2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ avec } \tau = \frac{mR}{B^2 \ell^2}$$

$$i = -\frac{B \ell v}{R}$$

$$i(t) = -\frac{mg}{B \ell} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$3. \quad P_{FL} = \vec{F}_L \cdot \vec{v} \\ = -\frac{B^2 \ell^2 v^2}{R} = -\frac{B^2 \ell^2}{R} \left(\frac{R i}{B \ell}\right)^2 = -R i^2$$

P_{FL} est dissipée par effet joule.

Exercice 4: Oscillations d'un cadre dans un champ magnétique

1. Compte-tenue des conventions:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot S = BS = Ba\left(\frac{a}{2} + x\right)$$

loi de Faraday:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Ba \dot{x}$$

$$i = \frac{e}{R} = -\frac{Ba}{R} \dot{x} = -\frac{Ba}{R} \frac{dx}{dt}$$

2. Equilibre $\Leftrightarrow$ pas de mouvement
 $\Rightarrow$ pas de phénomène d'induction

Referentiel : Terre fixe

Système : Cadre

Bilan des forces :

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_x$$

$$\vec{F}_R = -k(l-l_0)\vec{u}_x \\ = -kx\vec{u}_x$$

Force de rappel
du ressort.

PFS :

$$\vec{P} + \vec{F}_R = \vec{0}$$

$$mg - kx_0 = 0 \\ x_0 = \frac{mg}{k}$$

3. Bilan des forces en régime dynamique :

$$\vec{P}' = mg\vec{u}_x$$

$$\vec{F}_R = -k(x+x_0)\vec{u}_x$$

$$\vec{F}_L = \vec{F}_{QP} \quad (\text{Les forces sur MQ et NP se compensent})$$

$$\vec{F}_L = \dot{\alpha} \vec{QP} \wedge \vec{B}$$

$$= \dot{\alpha} aB \vec{u}_x$$

$$= -\frac{Ba}{R} aB \dot{\alpha} \vec{u}_x = -\frac{a^2 B^2}{R} \dot{\alpha} \vec{u}_x$$

PD :

$$\vec{P}' + \vec{F}_R + \vec{F}_L = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \ddot{x}$$

$$mg - k(x+x_0) - \frac{a^2 B^2}{R} \dot{\alpha} = m \ddot{x}$$

Eq. diff.
second
ordre

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{a^2 B^2}{mR} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0}$$

car $mg - kx_0 = 0$

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Forme
canonique

(6)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \sqrt{\frac{0,4}{50 \cdot 10^{-3}}} = 2,8 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{a^2 b^2}{mR}$$

$$\Rightarrow Q = \omega_0 \frac{mR}{a^2 b^2} = \sqrt{\frac{k'}{m}} \frac{mR}{a^2 b^2} = \frac{\sqrt{k m'} R}{a^2 b^2}$$

$$\text{A.N.: } Q = \frac{\sqrt{0,4 \times 50 \cdot 10^{-3}}}{(0,10)^2 (0,1)^2} \times 5 \cdot 10^{-4} = 0,71$$

$Q > \frac{1}{2} \Rightarrow$ régime pseudo-périodique.

$$x(t) = SP + [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] e^{-\lambda t}$$

avec : $SP = 0$

A et B déterminées à partir des conditions initiales.

$$A t = 0 : \quad x(0) = \frac{a}{2}$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$\dot{x}(t) = (-A \omega \sin \omega t + B \omega \cos \omega t) e^{-\lambda t} - \lambda (A \cos \omega t + B \sin \omega t) e^{-\lambda t}$$

$$x(0) = \frac{a}{2} = A$$

$$\dot{x}(0) = 0 = B \omega - \lambda A$$

$$\Rightarrow B = \frac{\lambda A}{\omega}$$

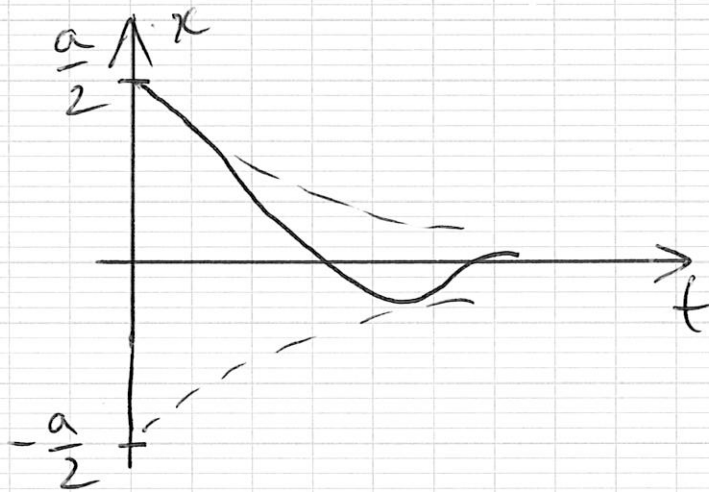
$$\text{A.N.: } \omega = 2,8 \sqrt{1 - \frac{1}{4 \times 0,71^2}} = 2,0 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{2,8}{2 \times 0,71} = 2,0 \text{ s}^{-1}$$

$$* A = \frac{a}{2} = 5 \text{ cm}$$

$$* B = \frac{\lambda A}{\omega} = A = \frac{a}{2} = 5 \text{ cm.}$$

$$x(t) = 5 \cdot 10^{-2} [\cos 2_0 t + \sin 2_0 t] e^{-2_0 t}$$



Régime pseudo-
périodique
très amorti.