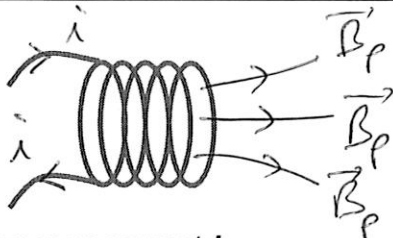


INDUCTION ET FORCES DE LAPLACE (2)

Circuit fixe dans un champ magnétique variable / Machines

I) AUTO-INDUCTION

I)1) Présentation du phénomène d'induction



Circuit parcouru par un courant i

- ⇒ Apparition d'un champ magnétique (propre) $\vec{B}_p$ en tout point de l'espace,
- ⇒ Création d'un **flux magnétique propre** au circuit Φ_p : ce flux n'est pas provoqué par un inducteur (qui serait extérieur) mais par le composant lui-même.

Si le courant i est variable, alors :

- ⇒ Le champ magnétique $\vec{B}_p$ est variable,
- ⇒ Le flux Φ_p est variable,
- ⇒ Il apparaît un phénomène d'induction, que l'on nomme **auto-induction**.

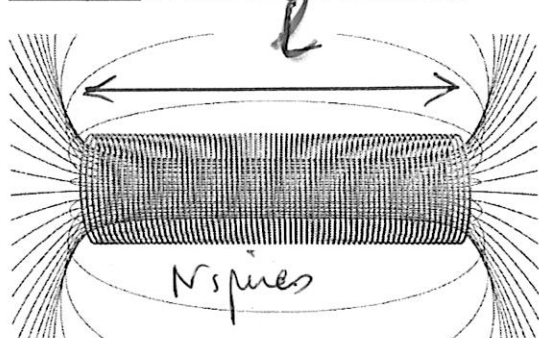
Lorsque le circuit électrique est bobiné, le flux propre peut-être important. On parle de **comportement inductif** du circuit.

I)2) Flux propre et inductance propre

L'**inductance propre** d'un circuit est définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} \text{Flux propre} & \boxed{\Phi_p = L \cdot i} & \text{intensité (A)} \\ \text{(weber Wb)} & & \\ \text{ou V.s)} & & \text{Inductance propre (H)} \end{array}$$

Exemple : bobine longue solénoïde



A l'intérieur du solénoïde :

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} i \quad (\text{voir PT})$$

$$\Phi_p = N \cdot B \cdot S = NBS$$

$$\Phi_p = N \mu_0 \frac{N}{l} i S = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} i$$

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$$

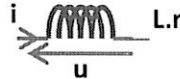
$$\begin{aligned} \mu_0 &= \text{perméabilité magnétique du vide} \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1} \end{aligned}$$

Remarques :

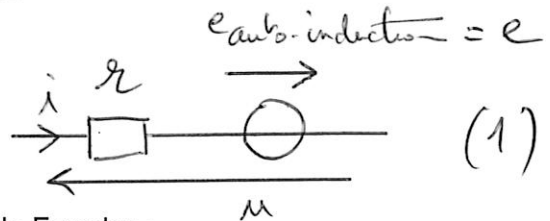
- ✓ L'inductance L est positive
- ✓ L'inductance L est proportionnelle à N^2 ,
- ✓ Ordre de grandeur de L : μH à H .

1)3) Force électromotrice d'auto-induction

Soit une bobine résistive :



Son modèle électrique équivalent est le suivant :



La fem d'auto-induction est définie à partir de la loi de Faraday :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

$$\text{d'où : } u = ri - e = ri + L \frac{di}{dt}$$

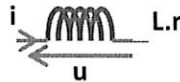
Effet inductif = conséquence de la loi de Lenz :

- ⇒ Retard dans l'apparition du courant, modélisé par une constante de temps :
- ⇒ Opposition aux variations brutales de courant.

$$\tau = \frac{L}{r}$$

1)4) effet inductif

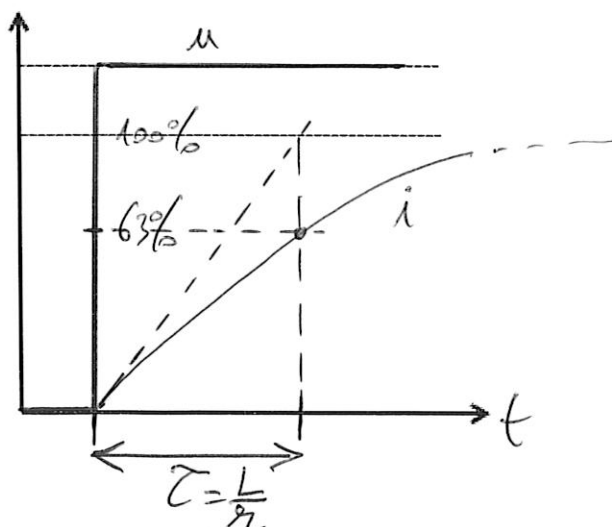
Soit une bobine résistive :



Son modèle électrique équivalent est le suivant :

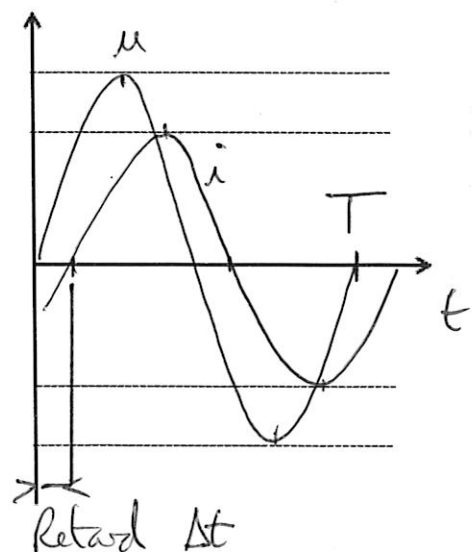
$$u = ri + L \frac{di}{dt} \quad (1)$$

Réponse à un échelon de tension :



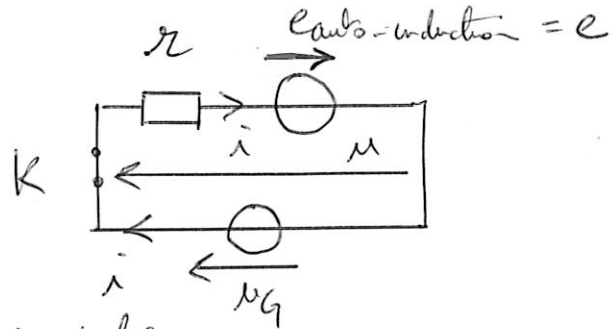
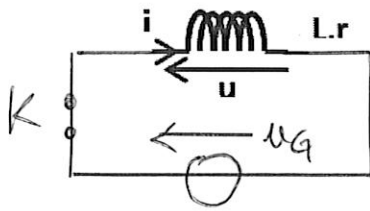
$$\text{Retard} \Leftrightarrow \tau = \frac{L}{r}$$

Régime sinusoïdal :



$$\text{Retard } \Delta t \Leftrightarrow \text{Déphasage } \Delta \varphi = 2\pi \frac{\Delta t}{T}$$

I)5) Etude énergétique



A partir de la loi des mailles :

$$u_G = u = r i - e = r i + L \frac{di}{dt}$$

Puissance électrique fournie par le générateur :

$$P_G = u_G \cdot i = r i^2 + i L \frac{di}{dt} = r i^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right)$$

puissance générateur *pertes joule* *puissance emmagasinée dans l'inductance*

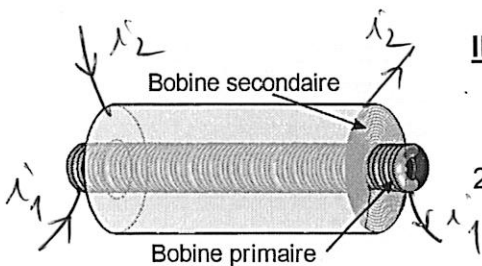
Energie emmagasinée dans l'inductance :

$$E_m = \frac{1}{2} L i^2$$

Lors de l'établissement du courant dans le circuit (à la **fermeture du circuit**), l'inductance **emmagasine de l'énergie**.

Lors de l'extinction du courant dans le circuit (à l'**ouverture du circuit**), l'inductance **restitue de l'énergie**.

II) COUPLAGE DE DEUX CIRCUITS : INDUCTANCE MUTUELLE



II)1) Inductance mutuelle

2 circuits magn. couplés

2 circuits bobinés :

- ✓ Circuit 1 : N_1 spires, section S_1 , longueur L_1 , courant i_1
- ✓ Circuit 2 : N_2 spires, section S_2 , longueur L_2 , courant i_2

Flux à travers le circuit 1 :

$$\Phi_1(t) = \Phi_{1p}(t) + \Phi_{12}(t)$$

$$\Phi_1(t) = L_1 i_1(t) + M i_2(t)$$

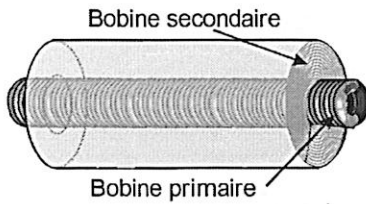
Flux à travers le circuit 2 :

$$\Phi_2(t) = \Phi_{2p}(t) + \Phi_{21}(t)$$

$$\Phi_2(t) = L_2 i_2(t) + M i_1(t)$$

M est l'**inductance mutuelle** qui quantifie le couplage magnétique entre les 2 circuits.

Exemple : 2 solénoïdes de même longueur L , bobinés dans le même sens.



Φ_{12} : Flux créé par le circuit 2 sur le circuit 1

$$\Phi_{12} = N_1 B_2 S_1 = N_1 \left(\mu_0 \frac{N_2}{L} i_2 \right) S_1$$

$$\Phi_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S_1}{L} i_2$$

Φ_{21} : Flux créé par le circuit 1 sur le circuit 2

$$\Phi_{21} = N_2 B_1 S_2 = N_2 \left(\mu_0 \frac{N_1}{L} i_1 \right) S_2$$

$$\Phi_{21} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S_2}{L} i_1$$

L'inductance mutuelle s'écrit :

dans laquelle S est la plus petite des 2 sections (surfaces) S_1 et S_2

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S}{L} \leq \sqrt{L_1 L_2} \quad \parallel$$

$$\geq 0$$

Remarque : $\sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{\mu_0 \frac{N_1^2 S_1}{L} \cdot \mu_0 \frac{N_2^2 S_2}{L}} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} \sqrt{S_1 S_2}$

Exemple : 2 solénoïdes de même longueur L , bobinés en sens inverse.

Φ_{12} : Flux créé par le circuit 2 sur le circuit 1

$$\Phi_{12} = -\mu_0 \frac{N_1 N_2 S_1}{L} i_2$$

Rappel :

$$\Phi = \vec{B}_m \cdot \vec{S}$$

Φ_{21} : Flux créé par le circuit 1 sur le circuit 2

$$\Phi_{21} = -\mu_0 \frac{N_1 N_2 S_2}{L} i_1$$

L'inductance mutuelle s'écrit :

$$M = -\mu_0 \frac{N_1 N_2 S}{L}$$

$$M \leq 0$$

Conclusion :

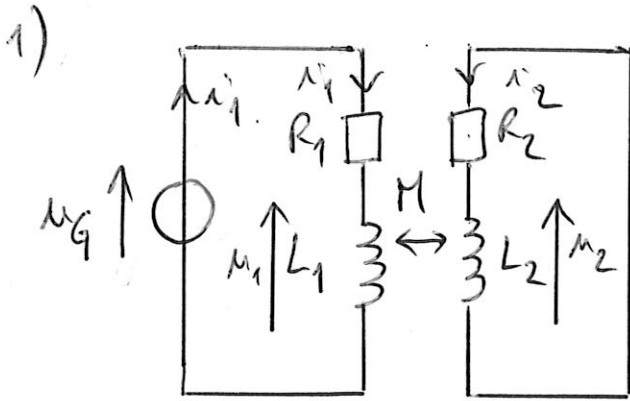
- ✓ Le signe de l'inductance mutuelle M , positif ou négatif, dépend des orientations relatives des deux circuits magnétiques,
- ✓ La valeur de M dépend de la géométrie et de la position des 2 circuits magnétiques : elle baisse très vite lorsqu'on éloigne les deux circuits, $M = \pm \sqrt{L_1 L_2}$ (ATJ 2020)
- ✓ $|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$ en général, $|M| = \sqrt{L_1 L_2}$ si le couplage magnétique est « total » entre les deux circuits : toutes les spires des 2 circuits sont traversées par toutes les lignes de champ produits par les 2 circuits,
- ✓ M se calcule en ne considérant que les parties bobinées.

II)2) Exemple

Soient 2 circuits bobinés $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, d'inductances propres respectives L_1 et L_2 et couplés par le coefficient d'inductance mutuelle M .

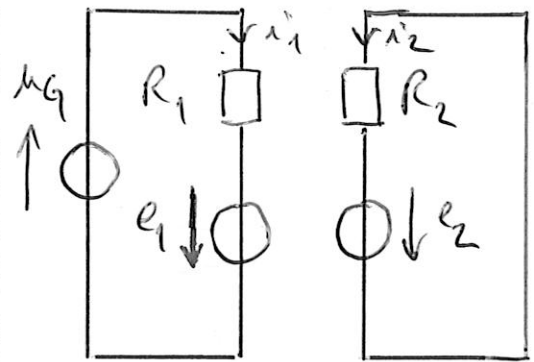
Le circuit $\mathcal{S}_1$ est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale $u_G(t)$ à la pulsation ω .

1. Faire le schéma électrique du dispositif.
2. Établir les équations différentielles régissant le fonctionnement de chacun des circuits.
3. Réécrire ces équations en notation complexe.
4. En notant $i_1(t) = I_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)}$ et $i_2(t) = I_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)}$, exploiter les équations précédentes pour exprimer $\frac{I_2}{I_1}$ et $\delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.
5. Montrer que $\frac{I_2}{I_1} \leq \frac{|M|}{L_2} \leq \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$



Avec inductances

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$



Avec Φ et d'auto-induction

$$\begin{cases} e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_G = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} & (1) \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} & (2) \end{cases}$$

$$3) \quad \underline{u}_1 = R_1 \underline{i}_1 + jL_1 \omega \underline{i}_1 + jM \omega \underline{i}_2$$

$$= (R_1 + jL_1 \omega) \underline{i}_1 + jM \omega \underline{i}_2 \quad (3)$$

$$0 = R_2 \underline{i}_2 + jL_2 \omega \underline{i}_2 + jM \omega \underline{i}_1$$

$$= (R_2 + jL_2 \omega) \underline{i}_2 + jM \omega \underline{i}_1 \quad (4)$$

$$4) \quad \underline{i}_1 = I_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} = I_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega t} = \underline{I}_1 e^{j\omega t}$$

$$\underline{i}_2 = I_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)} = I_2 e^{j\varphi_2} e^{j\omega t} = \underline{I}_2 e^{j\omega t}$$

$$(4) \Rightarrow 0 = (R_2 + jL_2 \omega) \underline{I}_2 e^{j\omega t} + jM \omega \underline{I}_1 e^{j\omega t}$$

$$\underline{I}_2 e^{j\omega t} (R_2 + jL_2 \omega) = -j \underline{I}_1 e^{j\omega t} M \omega$$

$$\frac{\underline{I}_2 e^{j\omega t}}{\underline{I}_1 e^{j\omega t}} = - \frac{jM\omega}{R_2 + jL_2 \omega}$$

Module $\Rightarrow \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{|M\omega|}{\sqrt{R_2^2 + (L_2 \omega)^2}} = \frac{|M|}{\sqrt{\left(\frac{R_2}{\omega}\right)^2 + L_2^2}}$

Argument $\Rightarrow \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \arg\left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\right)$

(on) $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L_2 \omega}{R_2}\right)$ si $M > 0$

$\Delta\varphi = +\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L_2 \omega}{R_2}\right)$ si $M < 0$

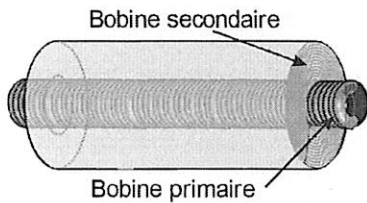
$$5) \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{|M|}{\sqrt{\left(\frac{R_2}{\omega}\right)^2 + L_2^2}} \quad \nearrow \quad \text{si } \omega \nearrow$$

$$\left(\frac{I_2}{I_1}\right)_{\max} = \frac{|M|}{L_2} \quad \text{donc} \quad \frac{I_2}{I_1} \leq \frac{|M|}{L_2}$$

Avec $|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$

$$\frac{I_2}{I_1} \leq \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

II)3) Bilan énergétique



Bilan de puissances au primaire : En multipliant (1) par i_1 :

$$u_1 i_1 = R_1 i_1^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) + M i_1 \frac{di_2}{dt} \quad (5)$$

P_G P_{J1} Puissance reçue par Bobine 1

Bilan de puissances au secondaire :

En multipliant (2) par i_2 :

$$0 = R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) + M i_2 \frac{di_1}{dt} \quad (6)$$

P_{J2} Puissance reçue par Bobine 2

Bilan de puissances :

$$(5)+(6) \quad P_G = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)$$

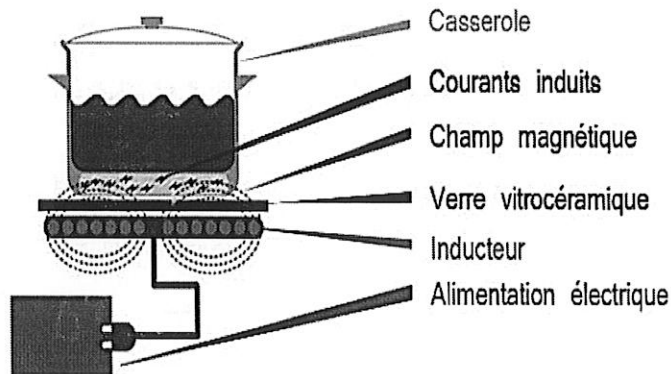
P_G Puissance reçue par les 2 bobines

Les 2 circuits convertissent de l'énergie électrique en énergie magnétique E_m .

$$E_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

III) APPLICATIONS

III)1) Chauffage par induction

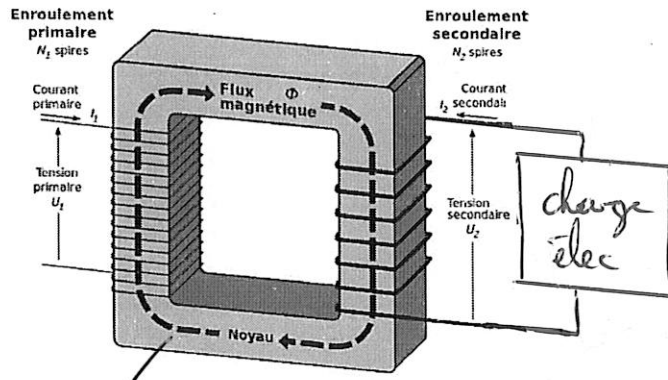


Inducteur = Bobinage alimenté entre 20 kHz et 50 kHz
 Induit = Fond de la casserole

$\vec{B}$ (créé par l'inducteur) variable
 $\Rightarrow$ Courants induits dans le fond de la casserole
 $\Rightarrow$ Effet joule
 $\Rightarrow$ Chauffage

III)2) Transformateur de tension

Primari
alimenté par
tension alternative
 $u_1(t)$
 $\Rightarrow$ courant $i_1(t)$



Secondaire
non alimenté
 $u_2(t)$
 $i_2(t)$

Couplage magnétique "total" par induction - entre primaire et secondaire - le matériau magnétique canalise les lignes de flux.
 $\Phi_{1spiral}(t) = \pm \Phi_{2spiral}(t)$ suivant sens d'enroulement.

$$\Rightarrow e_1(t) = -\frac{d\Phi_{1spiral}}{dt} = -N_1 \frac{d\Phi_{spiral}}{dt} \quad \text{et} \quad e_2(t) = -N_2 \frac{d\Phi_{2spiral}}{dt}$$

d'où :

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{u_2}{u_1} = \pm \frac{N_2}{N_1} = \pm m \quad \text{m rapport de transformation}$$

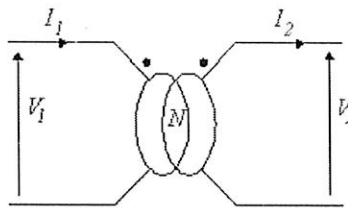
Modèle équivalent du transformateur monophasé parfait :

Puissance au primaire :

$$p(t) = u_1 \cdot i_1$$

Puissance au secondaire :

$$p(t) = u_2 \cdot i_2$$



(grandeurs instantanées)

$$\frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \frac{i_1(t)}{i_2(t)} = \pm m$$

(grandeurs efficaces)

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{I_1}{I_2} = m$$

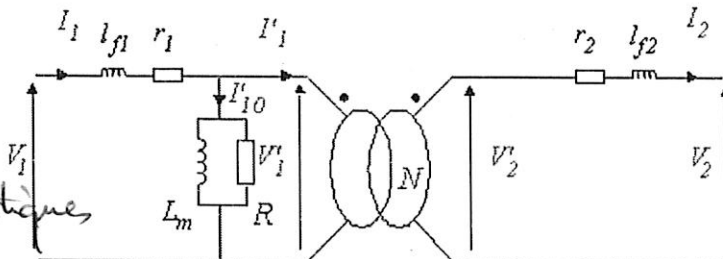
Modèle équivalent du transformateur monophasé réel :

r_1 : pertes joule au primaire

l_{f1} : inductance de fuite au primaire

R : pertes ferromagnétiques

L_m : puissance magnétisante.



Transfo
parfait

r_2 : pertes joule au secondaire

l_{f2} : inductance de fuite au secondaire