CPGE ATS

Programme de colles – Semaine 24 (28 avril au 3 mai 2025)

Les colles du jeudi 1er mai doivent être rattrapées.

Chapitres étudiés et questions de cours :

EM3 : Ondes électromagnétiques

EM 4 : Induction (Pas d'auto-induction)

Réponses attendues en bleu ou manuscrit.

1ère question de cours : questions 1 à 10

2ème question de cours : questions 11 à 15

1) Donner les 4 équations de Maxwell dans le vide en l'absence de charges ($\rho = 0$) et de courants ($\vec{j} = \vec{0}$) :

Maxwell Gauss : $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ **(1)**

Maxwell Faraday : $\overrightarrow{rot\vec{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ **(2)**

Maxwell Thomson : $div\vec{B} = 0$ **(3)**

Maxwell Ampère : $\overrightarrow{rot\vec{B}} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ **(4)**

2) Cas d'une Onde Plane Progressive Harmonique OPPH (= une seule fréquence) ou Monochromatique OPPM (= une seule couleur), avec propagation selon l'axe x, dans le sens des x croissants :
Ecrire mathématiquement $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$.
Définir les différents termes introduits.

Onde Plane Progressive Harmonique (OPPH) :

$\vec{E}(M,t) = \vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ avec $E_0 = cte$

$\vec{B}(M,t) = \vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0')$ avec $B_0 = cte'$

ω : pulsation temporelle (rad.s^{-1})

$T = \frac{2\pi}{\omega}$: période temporelle (s)

φ_0, φ_0' : phases à l'origine des temps et des espaces (rad)

$k = \|\vec{k}\|$ avec $\vec{k} = \|\vec{k}\|.\vec{n} = \|\vec{k}\|.\overrightarrow{u_x}$ vecteur d'onde (m^{-1}) dans le sens de la propagation

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$: période spatiale ou longueur d'onde (m)

3) Pour une Onde Plane Progressive Harmonique (OPPH) :
$\vec{E}(M,t) = \vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$ avec $E_0 = cte$
$\vec{B}(M,t) = \vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - kx)$ avec $B_0 = cte'$
Ecrire $\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t), \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, div\vec{E},\ div\vec{B}, \overrightarrow{rot\vec{E}},\ et\ \overrightarrow{rot\vec{B}}$ en notations complexes.

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}}(x,t) = \vec{E}_0 \operatorname{expj}(\omega t - kx)$$
$$\underline{\vec{B}}(M,t) = \underline{\vec{B}}(x,t) = \vec{B}_0 \operatorname{expj}(\omega t - kx)$$

Dérivées temporelles :

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = j\omega \underline{\vec{E}} \qquad \frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = j\omega \underline{\vec{B}}$$

Dérivées spatiales :

$$div\underline{\vec{E}} = -j\vec{k}.\underline{\vec{E}} \qquad \overrightarrow{rot\underline{\vec{E}}} = -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$$

$$div\underline{\vec{B}} = -j\vec{k}.\underline{\vec{B}} \qquad \overrightarrow{rot\underline{\vec{B}}} = -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}}$$

4) Onde électromagnétique : Quels sont les relations reliant $\vec{B}$ à $\vec{E}$?

$$\overrightarrow{rot\vec{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot\vec{B}} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ou : $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ **dans le cas d'une OPPM**

5) Définir le vecteur de Poynting et la puissance rayonnée par une onde électromagnétique.

Le **vecteur de Poynting** $\vec{R}$ représente la densité surfacique de puissance rayonnée :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$ **Unité : W.m^{-2}**

La **puissance rayonnée** par le champ électromagnétique à travers une surface correspond au flux du vecteur de Poynting à travers cette surface :

$$P_{ray} = \iint_S \vec{R}.\overrightarrow{dS} = \iint_S \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.\overrightarrow{dS}$$ Unité : W

6) Donner le modèle mathématique d'une Onde Stationnaire Harmonique (OSH) électromagnétique.

$$\overrightarrow{E_T}(x,t) = 2E_{0i} \sin(\omega t) \sin(kx)\, \overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{B_T}(x,t) = 2\frac{E_{0i}}{c}\cos(\omega t)\cos(kx)\,\overrightarrow{u_z}$$

7) Définir le flux magnétique.

Le **flux Φ** d'un champ magnétique $\vec{B}$ à travers une surface S orientée est défini par :

$$\boldsymbol{\Phi = \iint_S \vec{B}(M).\overrightarrow{dS_M}} \qquad \text{avec : } \overrightarrow{dS_M} = dS_M.\overrightarrow{n_M}$$

où dS_M est la surface élémentaire centrée sur M et $\overrightarrow{n_M}$ est le vecteur normal orienté en M.

Le flux s'exprime en **Weber** (Wb) : 1 Wb = 1 T.m^2

8) Enoncer la Loi de Lenz.

Un phénomène d'induction tend toujours, par ses conséquences, à modérer les variations de flux magnétique qui l'ont engendré.

Les effets produits par un phénomène d'induction s'opposent toujours à leurs causes : La loi de Lenz est une **loi de modération**.

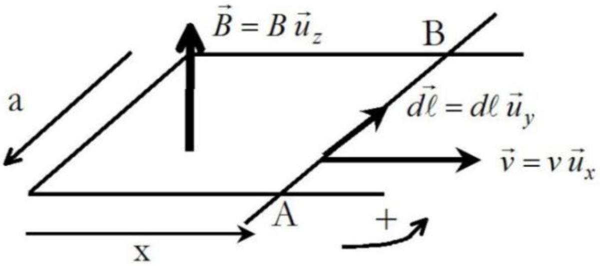
9) Enoncer la loi de Faraday.

La fem induite e(t) dans un circuit sous l'effet d'un champ magnétique variable $\overrightarrow{B(t)}$ est l'opposé de la dérivée temporelle du flux magnétique $\phi(t)$ à travers le circuit :

$$\boldsymbol{e(t) = -\frac{d\phi}{dt}(t)}$$

L'**induction** est donc liée aux **variations temporelles** du flux magnétique.

10) Définir la Force de Laplace.



Les rails sont fixes, la tige est mobile. Le circuit électrique est fermé.

Le champ magnétique est uniforme et stationnaire suivant axe z.

Pour un courant i défini par rapport au sens conventionnel + ci-dessus.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{F_L} = \int_L i.\overrightarrow{dl}\wedge\vec{B} = i.\vec{l}\wedge\vec{B}} \qquad \text{(Règle de la main droite)}$$

11) Etablir l'équation de d'Alembert ou de propagation de $\vec{E}$ dans le vide.

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{E}\right) - \vec{\Delta}(\vec{E}) \quad (5) \quad \text{(fourni)}$$

$\vec{\Delta}(\vec{E}) = \vec{\nabla}^2(\vec{E})$ Laplacien vectoriel de $\vec{E}$ (voir Analyse Vectorielle) :

Laplacien vectoriel $\Delta\vec{A}$	s'applique à un **vecteur** retourne un **vecteur**	$\begin{vmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{vmatrix}$	Rq : on trouve parfois la notation $\vec{\Delta}\vec{A}$, qui insiste sur le fait que le laplacien vectoriel retourne un vecteur.

Maxwell Faraday : $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (2)

Maxwell Ampère : $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (4)

(2) => $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right) = \overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

On a aussi :

En l'absence de charges :

(5) => $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{E}\right) - \vec{\Delta}(\vec{E}) = \overrightarrow{grad}(0) - \vec{\Delta}(\vec{E}) = -\vec{\Delta}(\vec{E})$

D'où :

$$-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\vec{\Delta}(\vec{E})$$

$$\boldsymbol{\vec{\Delta}(\vec{E}) - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \quad \textbf{ou} \quad \boldsymbol{\vec{\Delta}(\vec{E}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

avec $\boldsymbol{\mu_0\varepsilon_0 c^2} = \mathbf{1}$ avec c célérité (vitesse) de la lumière dans le vide ($c = 3{,}0.10^8\ m.s^{-1}$)

12) Etablir l'équation de d'Alembert ou de propagation de $\vec{B}$ dans le vide.

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{B}\right) - \vec{\Delta}(\vec{B}) = -\vec{\Delta}(\vec{B}) \quad \text{(fourni)}$$

$\vec{\Delta}(\vec{B}) = \vec{\nabla}^2(\vec{B})$ Laplacien vectoriel de $\vec{B}$ (voir Analyse Vectorielle) :

Laplacien vectoriel $\Delta\vec{A}$	s'applique à un **vecteur** retourne un **vecteur**	$\begin{vmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{vmatrix}$	Rq : on trouve parfois la notation $\vec{\Delta}\vec{A}$, qui insiste sur le fait que le laplacien vectoriel retourne un vecteur.

Maxwell Faraday : $\overrightarrow{rot\vec{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (2)

Maxwell Ampère : $\overrightarrow{rot\vec{B}} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (4)

(4) => $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot\vec{B}}\right) = \overrightarrow{rot}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot\vec{E}}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$

On a aussi :

D'où :

$$-\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\vec{\Delta}(\vec{B})$$

$$\boldsymbol{\vec{\Delta}(\vec{B}) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}} \quad \textbf{ou} \quad \boldsymbol{\vec{\Delta}(\vec{B}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

avec $\boldsymbol{\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1}$ avec c célérité (vitesse) de la lumière dans le vide ($c = 3{,}0.10^8\ m.s^{-1}$)

13) Montrer que le champ $\vec{B}(M,t) = \vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - kx) = B_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_z$ associé à une OPPM vérifie l'équation de d'Alembert $\frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial t^2} = 0$ et suppose une relation entre $k, \omega\ et\ c$.

$\vec{B}(M,t) = \vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - kx) = B_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_z$

$B(x,t) = B_0 \cos(\omega t - kx)$

Grandeur complexe temporelle associée : $\underline{B}(x,t) = B_0\, \mathrm{expj}(\omega t - kx)$

- ⇨ $\frac{\partial \underline{B}}{\partial x} = -jk\underline{B}$ et $\frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial x^2} = -k^2 \underline{B}$
- ⇨ $\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = j\omega \underline{B}$ et $\frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{B}$

$\underline{B}$ vérifie l'équation de d'Alembert :

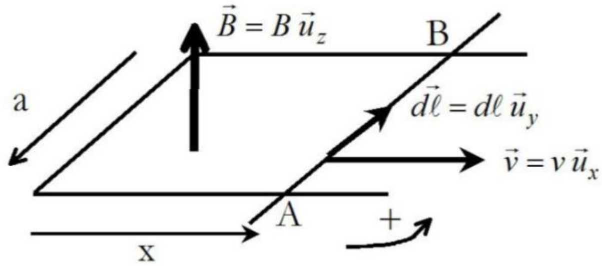
$$\frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial t^2} = 0$$

$$-k^2 \underline{B} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{B} = 0$$

$$\underline{B}\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) = 0$$

- ⇨ $\underline{B}(x,t) = 0$ ou $-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$
- ⇨ $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$
- ⇨ $\boxed{\boldsymbol{k = \pm \frac{\omega}{c}} \textbf{ Relation de structure}}$

14) Rails de Laplace :



Les rails sont fixes. Le circuit est fermé.

Champ magnétique uniforme et stationnaire suivant axe z,

Force $\vec{F}$ (exercée par un opérateur) suivant axe x, qui entraîne un déplacement et une vitesse de la tige suivant l'axe x.

- **Etablir les équations mécanique et électrique.**

Mouvement de la tige

- ⇨ La surface S du circuit varie, $S \nearrow$
- ⇨ Le flux Φ du champ magnétique $\vec{B}$ à travers S varie, $\Phi = BS \nearrow$
- ⇨ Apparition d'une fem e et d'un courant i par phénomène d'induction,
- ⇨ Apparition d'une force de Laplace :

$i\vec{\ell} \rightarrow$ pouce
$\vec{B} \rightarrow$ index
$\vec{F_L} \rightarrow$ majeur.

$$\vec{F_L} = \int_L i.\vec{dl} \wedge \vec{B} = i.\vec{l} \wedge \vec{B}$$ (Règle de la main droite)

La loi de Lenz permet de déterminer le sens du courant induit i : le courant i est tel qu'il s'oppose aux causes qui lui donnent naissance :

* $i \Rightarrow \vec{F_L}$ opposée à $\vec{F}$

(a) * $i \Rightarrow \vec{B}$ propre vers le bas de façon à $\searrow \Phi$

2 méthodes pour déterminer sens de i. (sens réel)

Equation électrique

On néglige le phénomène d'auto-induction.

Soit R la résistance totale du circuit.

Equation électrique :

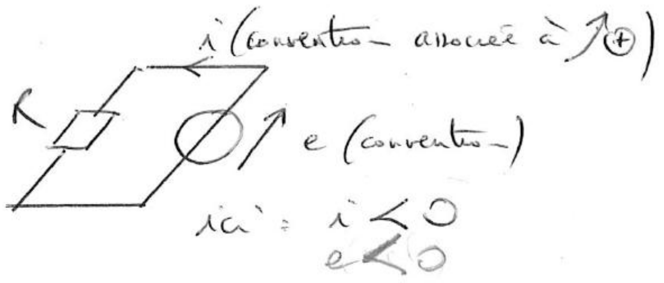
$\Phi = BS = Bax$ $\qquad e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Ba\frac{dx}{dt} = -Ba\dot{x}$

(e réel et i réel)

$$\boxed{e = -Bav \qquad i = \frac{e}{R} = -\frac{Bav}{R}}$$

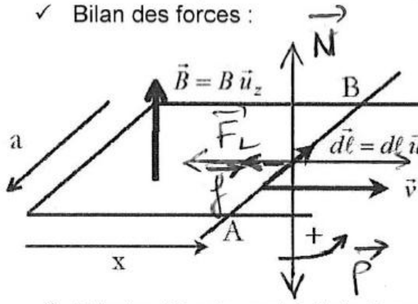
(signe de i (réel) opposé à la convention)

Schéma électrique équivalent :



Equation mécanique

- ✓ Référentiel : Galiléen
- ✓ Système : tige en en mouvement, longueur a, masse m
- ✓ Bilan des forces :



$\vec{P}$, Poids de la tige.
$\vec{N}$, Réaction des rails (normale)
$\vec{f}$, Frottements des rails
$\vec{F}$ Force exercée par opérateur (motrice)
$\vec{F_L}$ Force de Laplace (résistante)

- ✓ Principe Fondamental de la Dynamique :

$$\sum \vec{F} = \vec{F} + \vec{F_L} + \vec{f} + \vec{P} + \vec{N} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

- ✓ Projection sur l'axe x :

$$\vec{F} + \vec{F_L} + \vec{f} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Remarque sur les signes : si $i > 0$, $F_L > 0$ (conventions !)

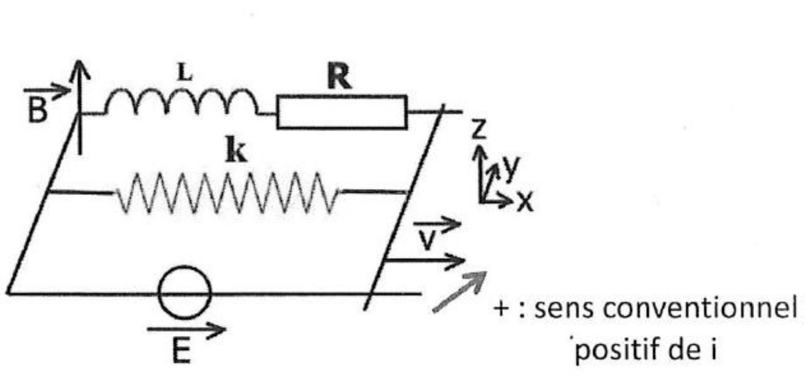
D'où :

$$F + F_L + f = m\frac{dv}{dt}$$

$$F + iaB + f = m\frac{dv}{dt} \quad \text{avec } i = -\frac{Bav}{R}$$

si $f = 0$ $\boxed{F - \frac{B^2a^2}{R}v = m\frac{dv}{dt}}$ Eq. diff. 1er ordre

15) Haut-parleur électrodynamique : Etablir les équations mécanique et électrique.



Equation mécanique

- ✓ Poids $\bar{P}$ vertical / réaction des rails $\bar{N}$ verticale → se compensent
- ✓ Force de Laplace : $\vec{F_L} = i.\ell.B.\vec{u_x}$
- ✓ Force de rappel élastique : $\vec{F_{él}} = -k.x.\vec{u_x}$
- ✓ Force de frottement : $\vec{F_f} = -h.\vec{v} = -h.v.\vec{u_x}$

Principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F_L} + \vec{F_{él}} + \vec{F_f} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (\vec{P} \text{ et } \vec{N} \text{ se compensent})$$

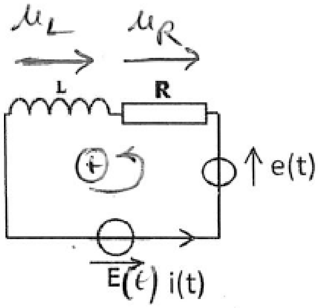
Principe fondamental de la dynamique suivant Ox :

$$\vec{F_L} + \vec{F_{el}} + \vec{F_f} = m\frac{d\vec{v_x}}{dt}$$

$$i\ell B - kx - hv = m\frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{i\ell B - kx - h\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}}$$

Modèle électrique



- ✓ Induction modélisée par $e = -\frac{d\phi}{dt} = -B\ell v$
- ✓ Auto-induction modélisée par L
- ✓ Résistance R du circuit
- ✓ Générateur E(t)

Equation électrique

$$E + e - Ri - L\frac{di}{dt} = 0$$

$$E = Ri + L\frac{di}{dt} - e = Ri + L\frac{di}{dt} + B\ell v$$

$$\boxed{E = Ri + L\frac{di}{dt} + B\ell\frac{dx}{dt}}$$

Les équations différentielles mécanique et électrique sont couplées (les grandeurs i et x , leurs dérivées, et leurs dérivées secondes apparaissent dans chaque équation différentielle).

10. Propagation des ondes électromagnétiques	
Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide	Énoncer les équations de Maxwell dans le vide. Interpréter qualitativement le lien entre l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday. Établir l'équation de propagation des champs dans le vide.
Équation locale de Poynting	Décrire un bilan d'énergie électromagnétique dans le cas du vide et définir le vecteur de Poynting. Citer des ordres de grandeur de flux énergétiques moyens (Laser, flux solaire, etc.) Utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée.
Onde plane, onde plane progressive, onde plane progressive harmonique	Définir une onde plane, une onde plane progressive et une onde plane progressive harmonique. Expliquer la pertinence et les limites de ces modèles.
Onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement	Décrire la structure d'une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement. Expliquer la pertinence de ce modèle. Décrire la propagation de l'énergie des ondes planes progressives harmoniques polarisées rectilignement. **Mettre en œuvre un protocole expérimental illustrant la polarisation rectiligne d'une onde électromagnétique.**
Spectre des ondes électromagnétiques	Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications.
Réflexion sous incidence normale d'une onde plane, progressive et monochromatique polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait. Onde stationnaire	Exploiter la nullité des champs dans un métal parfait. Établir l'expression de l'onde réfléchie en exploitant les relations de passage fournies. Interpréter qualitativement la présence de courants localisés en surface. Reconnaître et caractériser une onde stationnaire.
Applications aux cavités à une dimension. Mode d'onde stationnaire	Mettre en œuvre un dispositif permettant d'étudier une onde électromagnétique, dans le domaine des ondes centimétriques.

7. Lois de l'induction	
Flux d'un champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté	Évaluer le flux d'un champ magnétique uniforme à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté plan.
Loi de Faraday Courant induit par le déplacement relatif d'une boucle conductrice par rapport à un aimant ou un circuit inducteur. Sens du courant induit	**Décrire, mettre en œuvre et interpréter des expériences illustrant les lois de Lenz et de Faraday.**
Loi de modération de Lenz	Utiliser la loi de Lenz pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés.
Force électromotrice induite, loi de Faraday	Utiliser la loi de Faraday en précisant les conventions d'algébrisation.

9. Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire	
Circuit en translation rectiligne dans un champ magnétique stationnaire. Rail de Laplace	Interpréter qualitativement les phénomènes observés dans le cas du rail de Laplace. Établir les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe. Établir et interpréter la relation entre la puissance de la force de Laplace et la puissance électrique. Effectuer un bilan énergétique. Expliquer l'origine des courants de Foucault et en connaître des exemples
	d'utilisation. **Mettre en évidence qualitativement les courants de Foucault.**
Conversion de puissance électrique en puissance mécanique Haut-parleur électrodynamique	Expliquer le principe de fonctionnement d'un haut-parleur électrodynamique. Établir l'équation mécanique et l'équation électrique. Effectuer un bilan énergétique. Effectuer une étude en régime sinusoïdal forcé.