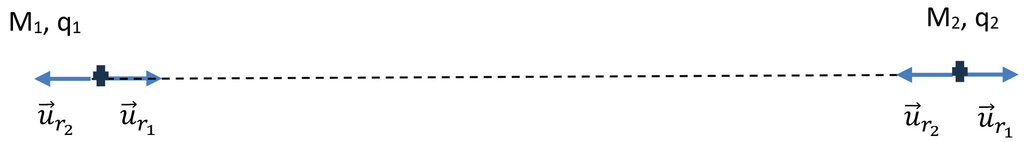
FORMULAIRE ELECTROMAGNETISME

➢ Force électrostatique et Loi de Coulomb



La **force électrostatique** est définie par la **loi de Coulomb** :

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{1\,sur\,2} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{2\,sur\,1} = \frac{\boldsymbol{q_1 q_2}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0 r^2}}\vec{\boldsymbol{u}}_{r_1} = -\frac{\boldsymbol{q_1 q_2}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0 r^2}}\vec{\boldsymbol{u}}_{r_2}$$

ε_0 : Permittivité diélectrique du vide, $\varepsilon_0\ en\ F.m^{-1}\ (farads\ par\ mètre)$

➢ Champ électrostatique

Le **champ électrostatique** créé, en tout point M de l'espace, par une **charge ponctuelle** $\boldsymbol{q}$ située en P**,** est **radial** et ne dépend que de la distance $\boldsymbol{r = PM}$:

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M}) = \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0 r^2}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}$$

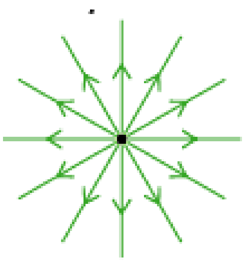
Unités : E en V.m^{-1}, q en C ou F.V, $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ **en F.m^{-1}, $\boldsymbol{r^2}$ en m^2**

➢ Lignes de champ électrostatique $\vec{E}$ dans les cas suivants :

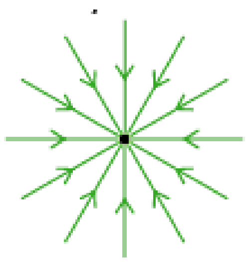
- Une charge ponctuelle $q > 0$;
- Une charge ponctuelle $q < 0$;
- Deux charges ponctuelles de signe opposé.

Une charge ponctuelle q :

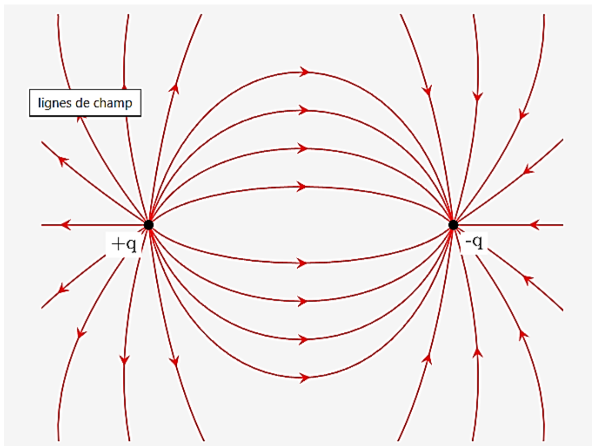
$q > 0$



$q < 0$



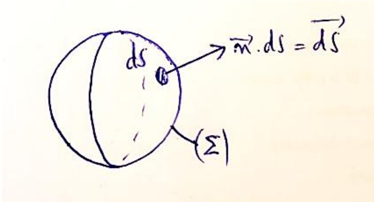
Deux charges ponctuelles de signe opposé :



- **Théorème de Gauss**

(Σ) surface fermée orientée vers l'extérieur,

$Q_{int} = \sum q_i$ situées à l'intérieur de (Σ),



ε_0 : Permittivité diélectrique du vide $(\mathrm{F.m^{-1}})$

Théorème de Gauss :

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

- Equation de **Maxwell-Gauss**

L'équation de **Maxwell-Gauss** traduit localement le **Théorème de Gauss** :

Equation de Maxwell-Gauss :

$$div\vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ρ : densité volumique de charges ($\mathrm{C.m^{-3}}$)

ε_0 : Permittivité diélectrique du vide $(\mathrm{F.m^{-1}})$

Si $\rho = 0$ (pas de charge électrique, localement) :

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

- **Energie potentielle électrostatique** $E_P(M)$ et **potentiel électrostatique** $V(M)$ liés au champ $\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$.

Energie potentielle électrostatique liée au champ $\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$:

$$E_P(M) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r} \ (en\ joules, J)$$

Potentiel électrostatique lié au champ $\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$:

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \ (en\ volts, V)$$

- Relations entre le champ électrostatique $\vec{E}$ et le potentiel $\boldsymbol{V}$

Circulation du champ :

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

Gradient :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$$

- Equation de **Maxwell-Faraday** de la statique :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$$

- **Théorème de Coulomb**.

Théorème de Coulomb : Au voisinage immédiat d'un conducteur électrostatique, le champ électrostatique peut s'écrire :

$$\boldsymbol{\vec{E}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}.\boldsymbol{\vec{n}}$$

σ : densité surfacique de charges (C.m^{-2})

$\vec{n}$: normale à la surface du conducteur, orientée vers l'extérieur

- Vecteur densité de courant $\vec{j}$ et intensité du courant I.

Dans un milieu conducteur de l'électricité, le déplacement des charges électriques peut être traduit par le **vecteur densité de courant $\vec{j}$**.

$$\boldsymbol{\vec{j} = \rho_l.\vec{v} = n^*.q.\vec{v}}$$

$\boldsymbol{\vec{j}}$: vecteur densité de courant (C.m^{-2}.s^{-1} ou A.m^{-2})

$\boldsymbol{\rho_l}$: densité volumique de charges libres (C.m^{-3})

$\boldsymbol{\vec{v}}$: vitesse moyenne de déplacement des charges (m.s^{-1})

n^* : nombre de porteurs de charges par unité de volume (m^{-3})

q : charge de chaque porteur de charge (C)

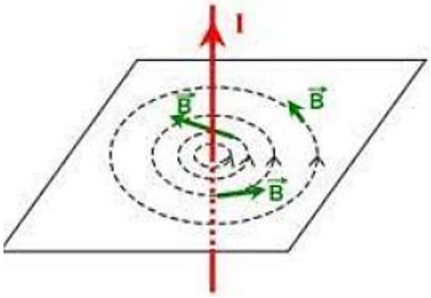
L'intensité du courant électrique $\boldsymbol{I}$ est définie comme le flux de $\boldsymbol{\vec{j}}$ à travers une surface (section) $\boldsymbol{S}$ du conducteur mais aussi comme le débit de charges électriques :

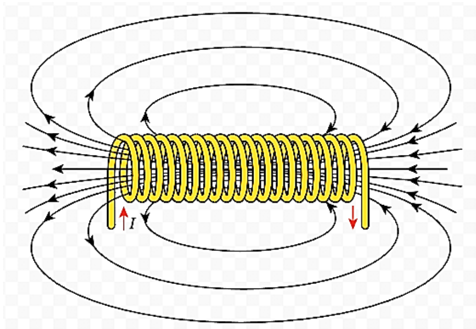
$$\boldsymbol{I = \iint_S \vec{j}.\overrightarrow{dS} = \frac{dq}{dt}}$$

$\boldsymbol{I}$: Intensité du courant électrique (A)

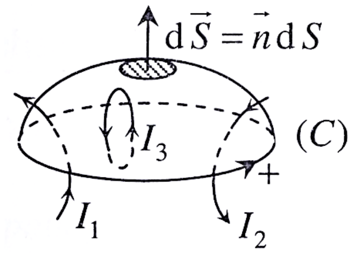
$\boldsymbol{q}$: Charge électrique (C)

- Lignes de champ magnétostatique $\vec{B}$ dans les cas suivants : Fil infini traversé par un courant I ; bobine longue traversée par un courant I.





- **Théorème d'Ampère**



$\oint_{(C)} \vec{\boldsymbol{B}}.\vec{\boldsymbol{dl}} = \boldsymbol{\mu_0}.\boldsymbol{I_e}$ avec $I_e = \iint_S \vec{j}.\vec{dS}$

μ_0 : perméabilité magnétique du vide

- Equation **de Maxwell-Ampère** de la statique (forme locale)

$$\overrightarrow{rot}\vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{\mu_0}\vec{\boldsymbol{j}}$$

- Equation de conservation de la charge.

Equation de conservation de la charge, ou équation de continuité :

$$\boldsymbol{div(\vec{j})} + \frac{\partial \boldsymbol{\rho_l}}{\partial \boldsymbol{t}} = \boldsymbol{0}$$

$\vec{\boldsymbol{j}}$: densité de courant (A.m^{-2})

$\boldsymbol{\rho_l}$: densité volumique de charges libres (C.m^{-3})

- Loi d'ohm sous forme locale.

Loi d'ohm locale dans un milieu conducteur : $\vec{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{\sigma}.\vec{\boldsymbol{E}}$

$\vec{\boldsymbol{E}}$: champ électrique (V.m^{-1})

$\vec{\boldsymbol{j}}$: densité de courant (A.m^{-2})

$\boldsymbol{\sigma}$: conductivité électrique (Ω^{-1}.m^{-1})

- Equations de Maxwell

Equation	**Statique** Présence de sources	**Remarques**	**Variable Quelconque** Présence de sources
Maxwell Gauss $\boldsymbol{div\vec{E}} =$	$\boldsymbol{\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$	Forme locale du théorème de Gauss $\oiint_{\Sigma} \boldsymbol{\vec{E}.\overrightarrow{dS}} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$	$\boldsymbol{\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$
Maxwell Faraday $\boldsymbol{\overrightarrow{rot}\vec{E}} =$	$\vec{0}$	La **circulation** du champ électrostatique est **conservative**	$-\boldsymbol{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$
Maxwell Thomson ou Maxwell Flux $\boldsymbol{div\vec{B}} =$	**0**	Le champ magnétique est à **flux conservatif**	**0**
Maxwell Ampère $\boldsymbol{\overrightarrow{rot}\vec{B}} =$	$\boldsymbol{\mu_0 \vec{j}}$	Forme locale du théorème d' Ampère $\oint_{(C)} \boldsymbol{\vec{B}.\overrightarrow{dl}} = \boldsymbol{\mu_0 . I_e}$	$\boldsymbol{\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

- Equations de Maxwell dans le vide en l'absence de charges ($\rho = 0$) et de courants ($\vec{j} = \vec{0}$) :

Maxwell Gauss : $\boldsymbol{div\vec{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \mathbf{0}$

Maxwell Faraday : $\boldsymbol{\overrightarrow{rot}\vec{E}} = -\boldsymbol{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$

Maxwell Thomson : $\boldsymbol{div\vec{B}} = \mathbf{0}$

Maxwell Ampère : $\boldsymbol{\overrightarrow{rot}\vec{B}} = \mu_0 \vec{j} + \boldsymbol{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} = \boldsymbol{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

- Onde Plane Progressive Harmonique OPPH (= une seule fréquence) ou Monochromatique OPPM (= une seule couleur), avec propagation selon l'axe x, dans le sens des x croissants :

Onde Plane Progressive Harmonique (OPPH) :

$\boldsymbol{\vec{E}(M,t) = \vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)}$ avec $E_0 = cte$

$\boldsymbol{\vec{B}(M,t) = \vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0{}')}$ avec $B_0 = cte'$

$\boldsymbol{\omega}$: pulsation temporelle (rad.s^{-1})

$\boldsymbol{T} = \frac{2\pi}{\omega}$: période temporelle (s)

$\boldsymbol{\varphi_0}, \boldsymbol{\varphi_0}'$: phases à l'origine des temps et des espaces (rad)

$\boldsymbol{k} = \|\vec{\boldsymbol{k}}\|$ avec $\vec{\boldsymbol{k}} = \|\vec{\boldsymbol{k}}\|.\vec{\boldsymbol{n}} = \|\vec{\boldsymbol{k}}\|.\overrightarrow{\boldsymbol{u_x}}$ vecteur d'onde (m^{-1}) dans le sens de la propagation

$\boldsymbol{\lambda} = \frac{2\pi}{k}$: période spatiale ou longueur d'onde (m)

- Onde Plane Progressive Harmonique (OPPH) : notation complexe et dérivées
  $\vec{E}(M,t) = \vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$ avec $E_0 = cte$
  $\vec{B}(M,t) = \vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - kx)$ avec $B_0 = cte'$
  En notations complexes :

  $\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}}(x,t) = \vec{E}_0 \,\mathrm{expj}(\omega t - kx)$
  $\underline{\vec{B}}(M,t) = \underline{\vec{B}}(x,t) = \vec{B}_0 \,\mathrm{expj}(\omega t - kx)$

Dérivées temporelles :

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = j\omega\underline{\vec{E}} \qquad \frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = j\omega\underline{\vec{B}}$$

Dérivées spatiales :

$$div\underline{\vec{E}} = -j\vec{k}.\underline{\vec{E}} \qquad \overrightarrow{rot}\underline{\vec{E}} = -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$$

$$div\underline{\vec{B}} = -j\vec{k}.\underline{\vec{B}} \qquad \overrightarrow{rot}\underline{\vec{B}} = -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}}$$

- Onde électromagnétique : relations reliant $\vec{B}$ à $\vec{E}$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ou : $\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}$ **dans le cas d'une OPPM**

- Vecteur de Poynting et puissance rayonnée par une onde électromagnétique

Le **vecteur de Poynting** $\vec{\boldsymbol{R}}$ représente la densité surfacique de puissance rayonnée :

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$$ **Unité : $W.m^{-2}$**

La **puissance rayonnée** par le champ électromagnétique à travers une surface correspond au flux du vecteur de Poynting à travers cette surface :

$$\boldsymbol{P_{ray}} = \iint_S \vec{\boldsymbol{R}}.\overrightarrow{\boldsymbol{dS}} = \iint_S \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}.\overrightarrow{\boldsymbol{dS}}$$ Unité : W

- Modèle mathématique d'une Onde Stationnaire Harmonique (OSH) électromagnétique

$$\overrightarrow{E_T}(x,t) = 2E_{0i}\sin(\omega t)\sin(kx)\,\overrightarrow{u_y} = E_{0T}\sin(\omega t)\sin(kx)\,\overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{B_T}(x,t) = 2\frac{E_{0i}}{c}\cos(\omega t)\cos(kx)\,\overrightarrow{u_z} = \frac{E_{0T}}{c}\cos(\omega t)\cos(kx)\,\overrightarrow{u_z}$$

- Flux magnétique

Le **flux Φ** d'un champ magnétique $\vec{B}$ à travers une surface S orientée est défini par :

$$\boldsymbol{\Phi = \iint_S \vec{B}(M).\overrightarrow{dS_M}} \qquad \text{avec : } \overrightarrow{dS_M} = dS_M.\overrightarrow{n_M}$$

où dS_M est la surface élémentaire centrée sur M et $\overrightarrow{n_M}$ est le vecteur normal orienté en M.

Le flux s'exprime en **Weber** (Wb) : 1 Wb = 1 T.m^2 = 1 V.s

- Loi de Lenz

Un phénomène d'induction tend toujours, par ses conséquences, à modérer les variations de flux magnétique qui l'ont engendré.

Les effets produits par un phénomène d'induction s'opposent toujours à leurs causes : La loi de Lenz est une **loi de modération**.

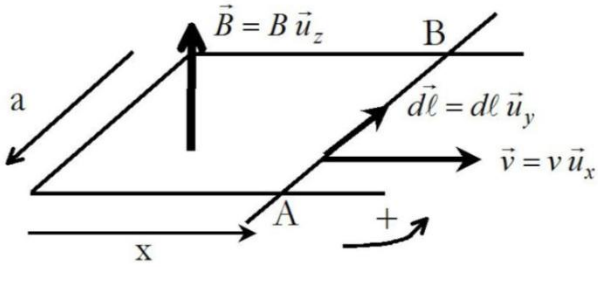
- Loi de Faraday

La fem induite e(t) dans un circuit sous l'effet d'un champ magnétique variable $\overrightarrow{B(t)}$ est l'opposé de la dérivée temporelle du flux magnétique $\phi(t)$ à travers le circuit :

$$\boldsymbol{e(t) = -\frac{d\phi}{dt}(t)}$$

L'**induction** est donc liée aux **variations temporelles** du flux magnétique.

- Force de Laplace.



Les rails sont fixes, la tige est mobile. Le circuit électrique est fermé.

Le champ magnétique est uniforme et stationnaire suivant axe z.

Pour un courant i défini par rapport au sens conventionnel + ci-dessus.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{F_L} = \int_L i.\overrightarrow{dl}\wedge\vec{B} = i.\vec{l}\wedge\vec{B}} \qquad \text{(Règle de la main droite)}$$

➢ **L'inductance propre** d'un circuit est définie de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\Phi_P = L.i}$$

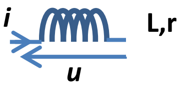
Φ_P : Flux propre (webers (Wb) ou volts-seconde (V.s))

L : Inductance (henrys (H))

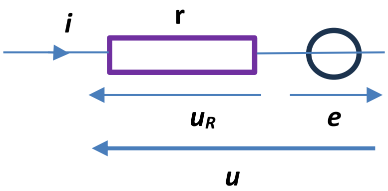
i : intensité dans la bobine (A)

➢ Force électromotrice d'auto-induction

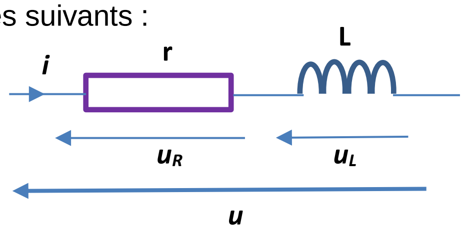
Soit une bobine résistive :



Ses modèles électriques équivalents sont les suivants :



ou



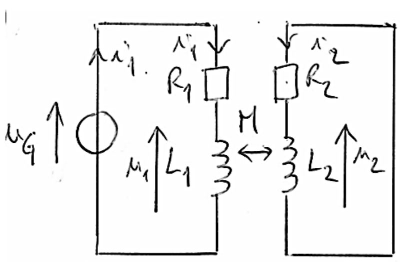
$u = u_R - e = Ri - e$ ou $u = u_R + u_L = Ri + L\frac{di}{dt}$

En effet : La **fem d'auto-induction** est définie à partir de la loi de Faraday :

$$\boldsymbol{e = -\frac{d\phi_P}{dt} = -L\frac{di}{dt}}$$

➢ Pour deux circuits magnétiquement couplés, **l'inductance mutuelle** s'écrit ***M*** :

- $|\boldsymbol{M}| \leq \sqrt{\boldsymbol{L_1L_2}}$ en général, $|\boldsymbol{M}| = \sqrt{\boldsymbol{L_1L_2}}$ si le couplage magnétique est « total » entre les deux circuits : toutes les spires des 2 circuits sont traversées par toutes les lignes de champ produites par les 2 circuits,
- Le signe de l'inductance mutuelle ***M***, positif ou négatif, dépend des orientations relatives des deux circuits magnétiques,



Avec inductances

$$\begin{cases} u_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} \end{cases}$$