DEVOIR SURVEILLE N°3

Durée de l'épreuve : 3 H

L'usage de la calculatrice est interdit.

CE SUJET EST LONG. IL NE S'AGIT PAS D'ESSAYER ABSOLUMENT DE LE FINIR, MAIS DE GERER AU MIEUX VOTRE TEMPS.

De nombreuses questions sont indépendantes ou proches du cours !

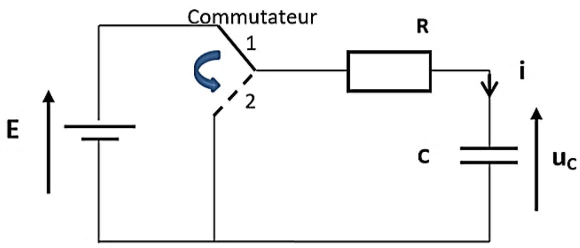
Lire tout l'énoncé avant de commencer, **numéroter** les feuilles et les questions, utiliser les **notations de l'énoncé**, apporter des **justifications** brèves mais précises et complètes, fournir des résultats **homogènes et** **encadrés** et des applications numériques **soulignées** et accompagnées d'une **unité.**

Calculatrice INTERDITE

PROBLEME N°1 : QUELQUES SYSTEMES DU PREMIER ORDRE (ENVIRON 30 % DU BAREME)

A) Charge d'un condensateur

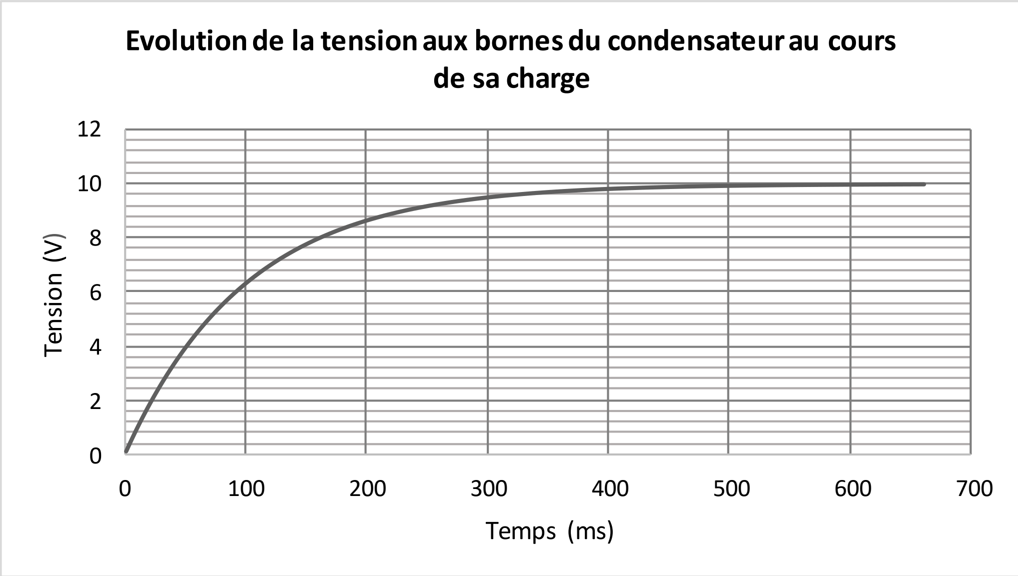
Soit le circuit ci-contre, dans lequel un générateur de tension idéal de f.é.m E peut être connecté à un dipôle constitué de l'association série d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un condensateur de capacité C.
Initialement le commutateur est en position 2 et le condensateur est déchargé.



A l'instant $t = 0$, on bascule le commutateur en position 1.

1) Quelles sont les expressions de la tension u_c et de l'intensité i en régime permanent, c'est-à-dire lorsque t tend vers l'infini ? Justifier.

2) **Etude du circuit pour $t \geq 0$**
   a) Etablir l'équation différentielle vérifiée par u_C.
   b) Résoudre cette équation différentielle : Etablir l'expression de $u_C(t)$.
   c) Retrouver le résultat de la question 1).
   d) Lorsqu'on réalise ce circuit avec une résistance R = 1 kΩ, on visualise à l'oscilloscope la courbe représentative $u_C(t)$ ci-dessous.



Déterminer par des exploitations graphiques soigneusement justifiées les valeurs de *E* et *C*.

e) Déterminer l'expression de *i*(*t*).

B) Thermos de café

Quelques données pour l'eau :

Capacité thermique massique de l'eau liquide :	$c_{e,l} =$ 4 kJ.kg^{-1}.K^{-1} ;
Masse volumique de l'eau liquide :	$\rho_e = 1000\ kg.m^{-3}$

Aide aux calculs : $\ln\left(\frac{7}{4}\right) = 0.56$

Avant de sortir pour une série d'achats de matériel, une randonneuse se prépare un thermos, dans lequel elle verse 500 mL de café.

La capacité thermique massique et la masse volumique du café peuvent être assimilées à celle de l'eau.

La capacité thermique du vase interne du thermos est $C_{thermos} = 50\,J\,.K^{-1}$.

On verse le café dans le thermos, et le système {café + vase interne} se stabilise rapidement à la température $\theta_0 = \theta(t = 0) = 90\,°C$.

1. On note C la capacité thermique globale du système. Donner son expression littérale en fonction des caractéristiques connues du système.

On pourra considérer que la température extérieure reste constante : $\theta_{ext} = 20°C$. On étudie l'évolution de la température $T(t)$ du système {café + vase interne}.

2. Donner l'expression de la variation d'enthalpie dH du système lorsque sa température passe de T à $T + dT$.

Les fuites thermiques entre t et $t + dt$ sont de la forme :

$$\delta Q = -aC(T - T_{ext})dt$$

où

- C est la capacité thermique précédemment calculée
- $a = 10^{-3}\ SI$
- $T(t)$ est la température du système {thermos, café} à la date t
- T_{ext} est la température (constante) de la pièce.

3. Montrer alors que le température du système vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\tau \frac{dT}{dt} + T = T_{ext}$$

Définir et calculer la constante caractéristique de temps τ.

4. Résoudre l'équation différentielle et tracer l'allure du graphe $T(t)$donnant la température en fonction du temps.

5. Déterminer le temps nécessaire pour que la température du système atteigne $\theta_f = 60\ °C$, température à laquelle il devient possible de boire le café. Faire l'application numérique.

C) Chute d'une goutte d'eau

On supposera ici que l'air est immobile dans le référentiel galiléen terrestre et que sa masse volumique reste constante.

On considère la chute d'une gouttelette d'eau de rayon r et de masse volumique ρ supposée constante, située initialement à une altitude H au-dessus de la surface de la Terre avec une vitesse initiale v_0 nulle.

On supposera par ailleurs que les forces de frottements exercées par l'air sur la goutte suivent la loi de Stokes, et correspondent donc à une puissance $\mathcal{P} = -6\pi\eta_{air}rv^2$, où η_{air} correspond à la viscosité dynamique de l'air et v à la vitesse de la gouttelette.

On négligera la poussée d'Archimède s'exerçant sur la gouttelette.

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse, et en déduire l'expression du temps caractéristique τ de la chute des gouttes de pluie en fonction de η_{air}, r et m, puis de η_{air}, r et ρ.

2. En déduire que la gouttelette atteint une vitesse limite

$$v_{lim} = -\frac{2r^2}{9\eta_{air}}\rho g$$

3. Tracer l'allure de la courbe $v(t)$ représentant l'évolution de la vitesse en fonction du temps, en faisant apparaitre sur cette courbe les grandeurs τ et v_{lim}.

PROBLEME N°2 : MODELISATION D'UNE SUSPENSION DE VEHICULE (ENVIRON 25 % DU BAREME) (EXTRAIT CONCOURS TSI)

Sur un véhicule, les suspensions ont de multiples fonctions. Elles servent notamment :

- à améliorer le confort des occupants ;
- à améliorer la tenue de route en maintenant le contact entre les roues et le sol malgré ses irrégularités (amélioration de la sécurité) ;
- à diminuer l'effet, sur l'ensemble des organes mécaniques, des vibrations et impacts dus aux irrégularités de la route (diminution de l'usure et du risque de rupture).

Il existe différents types de suspensions et, dans ce problème, nous nous intéresserons à un type très répandu : les suspensions à ressorts. De manière simplifiée, ces suspensions se composent d'un ressort qui assure la liaison entre les roues (masses non suspendues) et la caisse (masse suspendue) et d'un système d'amortissement.

Le but de ce problème est d'étudier certaines caractéristiques des suspensions à ressort. En particulier, nous étudierons les mouvements verticaux du véhicule dans différentes situations : véhicule non amorti, véhicule amorti en régime libre, véhicule se déplaçant sur un sol non plat…
Pour l'ensemble du problème, le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré comme galiléen.
Le véhicule est soumis au champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$.

Données :
champ de pesanteur : $g = 10$ m.s^{-2}.

Hypothèses :
tout au long du problème, on considérera que :

- l'extrémité supérieure du ressort est en contact avec le véhicule et l'extrémité inférieure du ressort est reliée à une roue qui se trouve en contact avec le sol ;
- la roue reste en contact avec le sol à tout instant ;
- les dimensions de la roue sont telles qu'on la suppose ponctuelle de sorte qu'elle suit parfaitement le profil de la route, y compris lorsque le sol n'est pas plat.

Première partie : suspension sans amortissement

Le véhicule à vide (masse suspendue) est assimilé à une masse $m = 1{,}0 \times 10^3$ kg.
La suspension est constituée d'un ressort de masse négligeable, de raideur $k = 1{,}0 \times 10^5$ N.m^{-1} et de longueur au repos l_0.

Dans cette première partie, on néglige tout amortissement. On ne s'intéresse qu'au mouvement de translation verticale du véhicule.
La position du véhicule est repérée par sa coordonnée $z(t)$, l'axe Oz étant vertical, orienté vers le haut et muni d'un vecteur unitaire $\vec{u_z}$ (figure 1).
$z(t)$ représente la coordonnée de l'extrémité supérieure du ressort.
A l'équilibre, en l'absence de tout mouvement vertical, la position du véhicule est repérée par sa coordonnée z_e.

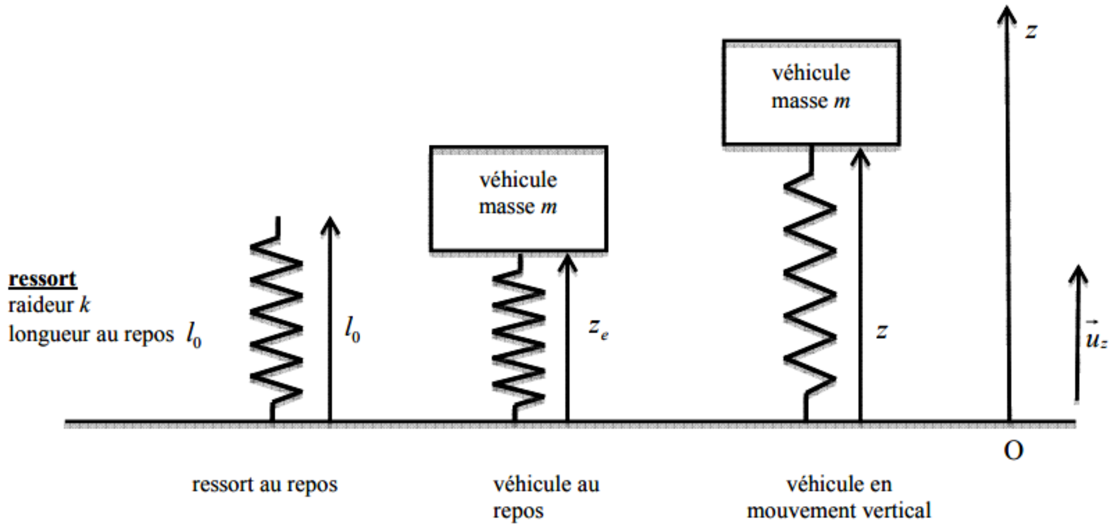


Figure 1 : suspension sans amortissement

1 – Faire le bilan des forces auxquelles le véhicule est soumis lorsqu'il est hors d'équilibre. On détaillera clairement chaque force en indiquant sa direction, son sens et sa norme.

2 – En appliquant le principe d'inertie (première loi de Newton), écrire la relation (équation (1)) entre ces différentes forces lorsque le véhicule est à l'équilibre. En déduire l'expression de la cote z_e à l'équilibre en fonction de m, g, k et l_0.

3 – En appliquant le principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton) au véhicule lorsqu'il est hors d'équilibre, déterminer l'équation différentielle (équation (2)) vérifiée par $z(t)$. L'équation (2) reliera les différentes grandeurs z_e, k, m, $z(t)$ et ses dérivées temporelles.

On montrera que l'on peut écrire :

$$\ddot{z} + \frac{k}{m} z = \frac{k}{m} z_e$$

4 – Donner la solution générale de l'équation (2). Déterminer les expressions littérales de la pulsation propre ω_0 et de la période propre T_0 de la suspension en fonction de k et m. Déterminer les valeurs numériques de ω_0 et T_0.

5 – On suppose qu'un opérateur appuie sur le véhicule et l'amène dans une position repérée par la cote z_0 avec $z_0 < z_e$. A un instant $t = 0$, choisi comme origine du temps, le véhicule est lâché sans vitesse initiale. Déterminer la solution $z(t)$ de l'équation (2) en prenant en compte les conditions initiales précédentes. Exprimer $z(t)$ en fonction de t, z_e, ω_0 et z_0.

6 – Tracer l'allure de $z(t)$ et faire apparaître sur le graphique les cotes minimale z_{min}, maximale z_{max} et moyenne z_{moy} ainsi que la période propre T_0.
Donner les expressions des cotes minimale z_{min}, maximale z_{max} et moyenne z_{moy} en fonction de z_e et z_0.

Deuxième partie : suspension avec amortissement

On suppose dans cette partie que la suspension décrite dans la partie précédente comporte maintenant un dispositif qui exerce, sur le véhicule de masse m, une force d'amortissement visqueux donnée par $\vec{F} = -h\vec{v}$ où $\vec{v}$ représente la vitesse verticale du véhicule par rapport à la roue et h un coefficient appelé coefficient de frottement fluide (figure 2).

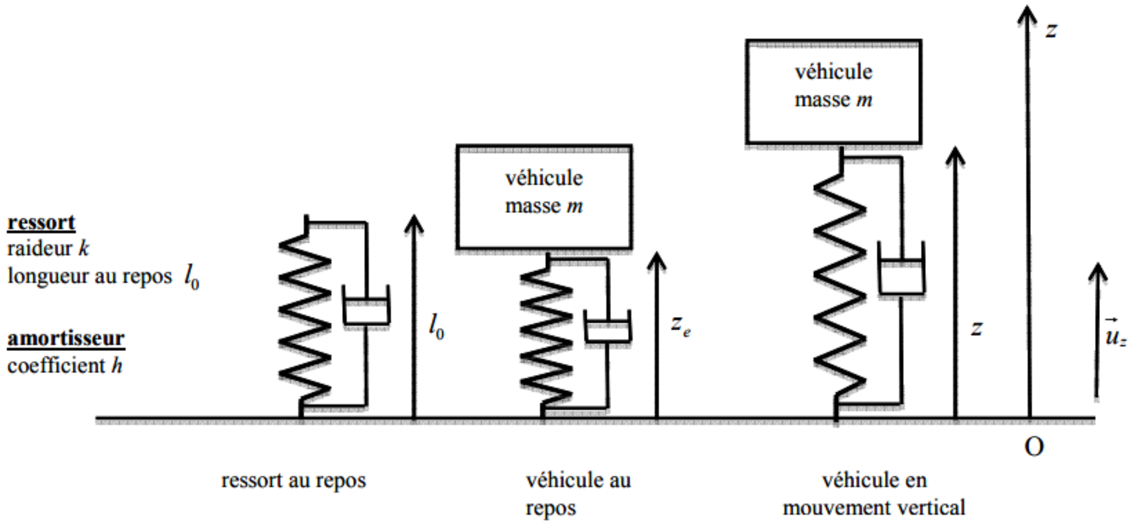


Figure 2 : suspension avec amortissement

7 – Quelle est l'unité de h dans le système international ?
8 – Faire le bilan des forces appliquées au véhicule hors d'équilibre. On détaillera clairement chaque force en indiquant sa direction, son sens et sa norme. Ecrire la relation entre ces différentes forces lorsque le véhicule est à l'équilibre.
9 – En appliquant le principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton) au véhicule hors d'équilibre, déterminer l'équation différentielle vérifiée par la coordonnée $z(t)$ au cours du temps. L'équation reliera les différentes grandeurs z_e, k, h, m, $z(t)$ et ses dérivées temporelles.

On montrera que l'on peut écrire :

$$\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_e$$

10 – Ecrire les conditions portant sur les paramètres m, k et h pour que la suspension se trouve respectivement dans les régimes pseudopériodique, critique et apériodique.

11 – Véhicule en charge et vieillissement de la suspension.

11.1 – Si l'amortissement est tel que la suspension se trouve en régime critique lorsque le véhicule est à vide, dans quel régime se trouve-t-il lorsque le véhicule est en charge ? Justifier qualitativement la réponse.
11.2 – Dès lors, comment choisir la valeur de l'amortissement pour que le véhicule ne soit pas en régime pseudopériodique même lorsqu'il est en charge ? Justifier qualitativement la réponse.

PROBLEME N°3 : GESTION DU RECUL D'UN CANON (ENVIRON 20 % DU BAREME)

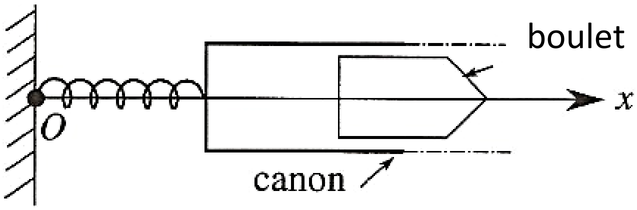
On se propose ici d'étudier le canon servant à lancer des boulets pour attaquer un château-fort.

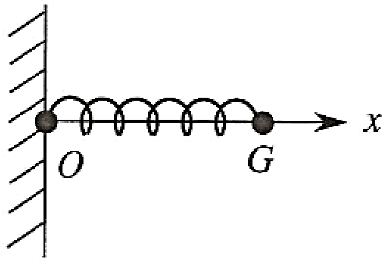
On considère un canon de masse $M = 800\ kg$, qui est utilisé pour envoyer un boulet de masse $m = 2\ kg$.

On souhaite envoyer le boulet avec une vitesse $v_0 = 50\ m.s^{-1}$.

Lorsque le boulet est envoyé, cela provoque un mouvement de recul du canon. On peut montrer que la vitesse de recul du canon est alors $v_r = -\frac{m}{M} v_0$ (le mouvement du canon étant alors vers l'arrière, en sens opposé du mouvement du boulet).

Afin d'éviter tout accident, on veut limiter le recul du canon. Pour cela, on utilise un ressort de raideur k, de longueur à vide ℓ_0 dont l'une des extrémités est fixe et l'autre liée au canon. Le déplacement a lieu suivant l'axe Ox correspondant à la direction et au sens du mouvement du boulet.





Dans la suite, le canon est assimilé à un point matériel confondu avec son centre de gravité G. On négligera tout frottement avec le sol tout comme avec l'air.

1. Etablir l'expression de l'énergie mécanique du canon.
2. On souhaite que le canon recule au maximum d'une distance d et on veut choisir un ressort de constante de raideur adapté. Montrer que la relation entre la distance de recul d et la constante de raideur du ressort est : $k = \frac{m^2 v_0^2}{d^2 M}$.

   Effectuer l'application numérique pour $d = 1\ m$.

3. En raison du mouvement de recul et de la présence du ressort, le canon se met à osciller. En exploiter l'expression de l'énergie mécanique établie à la première question, établir l'expression de l'équation différentielle du mouvement du canon.
4. En déduire l'expression de la période de ces oscillations. Effectuer l'application numérique.
5. En utilisant un ressort de constante de raideur $k_2 > k$, comment varierait la distance de recul ? la période des oscillations ?
6. Etablir complètement l'expression de l'élongation $x(t)$ du ressort.
7. Tracer l'allure de la courbe $x(t)$ en indiquant les valeurs maximale x_{max} et minimale x_{min} atteintes. Faire apparaitre sur cette courbe x_{max} , x_{min} ainsi que la période T des oscillations.

PROBLEME N°4 : THERMODYNAMIQUE (ENVIRON 30 % DU BAREME)

A) Questions de formulaire

- Pour une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait, donner la loi de Laplace,
- Pour un gaz parfait, écrire une relation entre la variation d'enthalpie H et la variation de température T,
- Donner une loi des moments permettant de calculer le titre en vapeur x_V pour un mélange diphasique Liquide + Gaz,
- Donner la définition de la chaleur latente (massique) de vaporisation.

B) Compression et détente d'un fluide frigorigène

On donne : Constante des gaz parfaits R = 8.31 J.K^{-1}.kg-1 : Masse molaire du fluide : M = 100 g/mol.

Aide aux calculs : $ln\left(\frac{15}{125}\right) = -2.1$

On étudie les transformations thermodynamiques d'un réfrigérant (1,1,1,2-tétrafluoroéthane ou R134a) dont on donne :

- le diagramme (P, h) en **annexe 1 (à rendre avec la copie)**
- le diagramme (T, s) en **annexe 2 (à rendre avec la copie)**
- un extrait de tables thermodynamiques **en annexe 3 (à rendre avec la copie)**

Le tableau récapitulatif en **annexe 4** est également **à rendre avec la copie**.

Dans l'état initial noté A, le fluide est à une pression de P_A = 2 bars et une température T_A = 50°C.

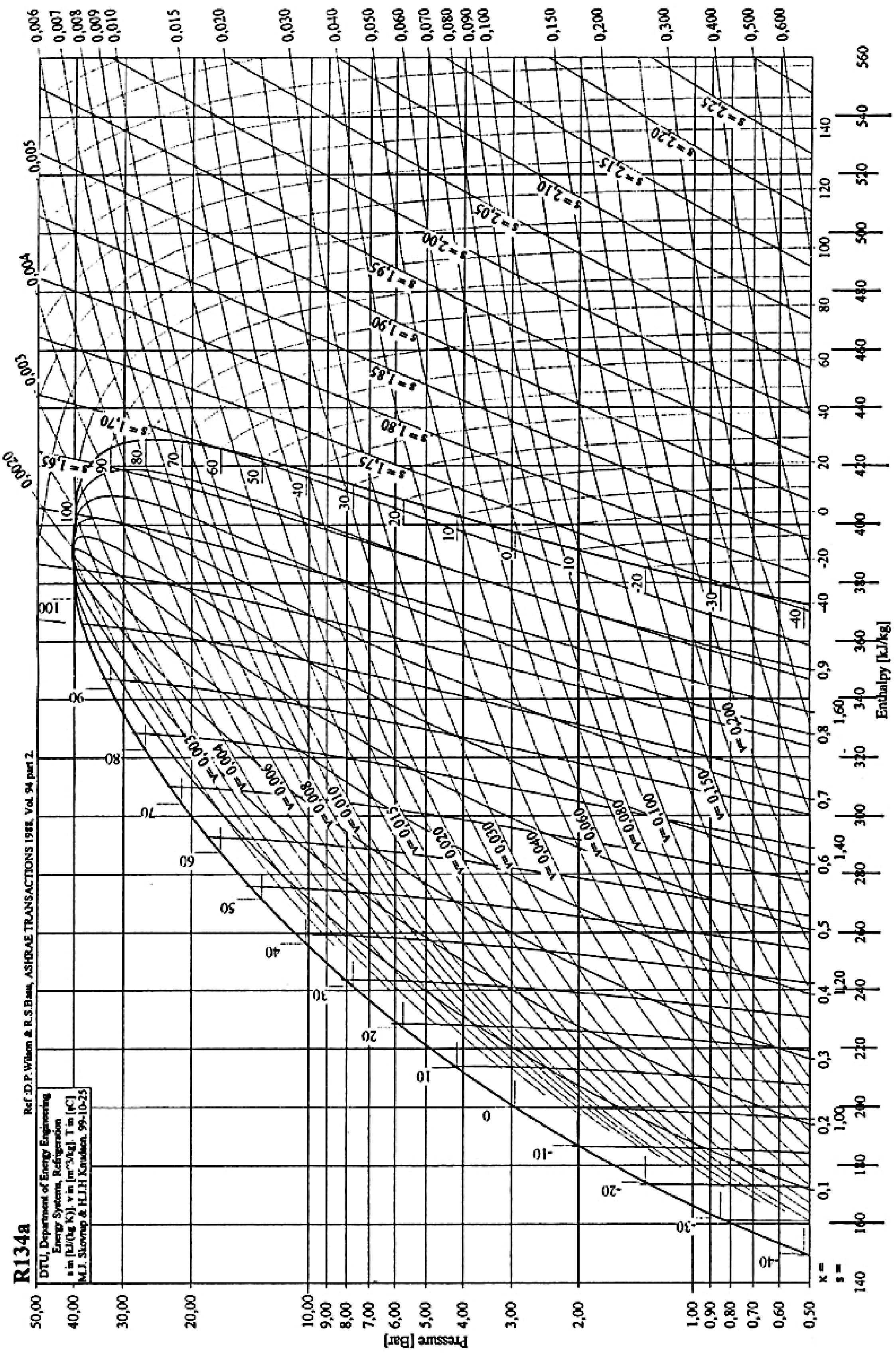
Il est ensuite comprimé de manière isotherme mécaniquement réversible jusqu'au **point B** (vapeur saturante), puis subit une liquéfaction totale isotherme jusqu'au **point C** (liquide saturant).

Il est ensuite détendu de manière isenthalpique pour retomber à une pression de 2 bars (**point D**).

1) Sur chacun des diagrammes (P, h) et (T, s), indiquer les domaines liquide, diphasique et gazeux.
2) Compléter le diagramme (P, h) puis le diagramme (T, s), en y indiquant les points A, B, C et D.
3) Indiquer deux méthodes permettant de déterminer le titre en vapeur x_{vD} au point D à partir des diagrammes (P, h) et / ou (T, s).
4) Compléter le tableau en annexe 4.
5) A partir des tables fournies en annexe 3, confirmer quelques valeurs du tableau précédent, puis calculer un ordre de grandeur de x_{vD}. Justification : Entourer sur l'annexe 3 les données prises en compte.
6) Calculer le travail W_{AB} fourni par le compresseur pour comprimer 1 kg de R134a de manière isotherme à 50°C.
7) Sur votre copie, tracer l'allure du diagramme de Clapeyron (P, v), ainsi que les points A , B, C et D.

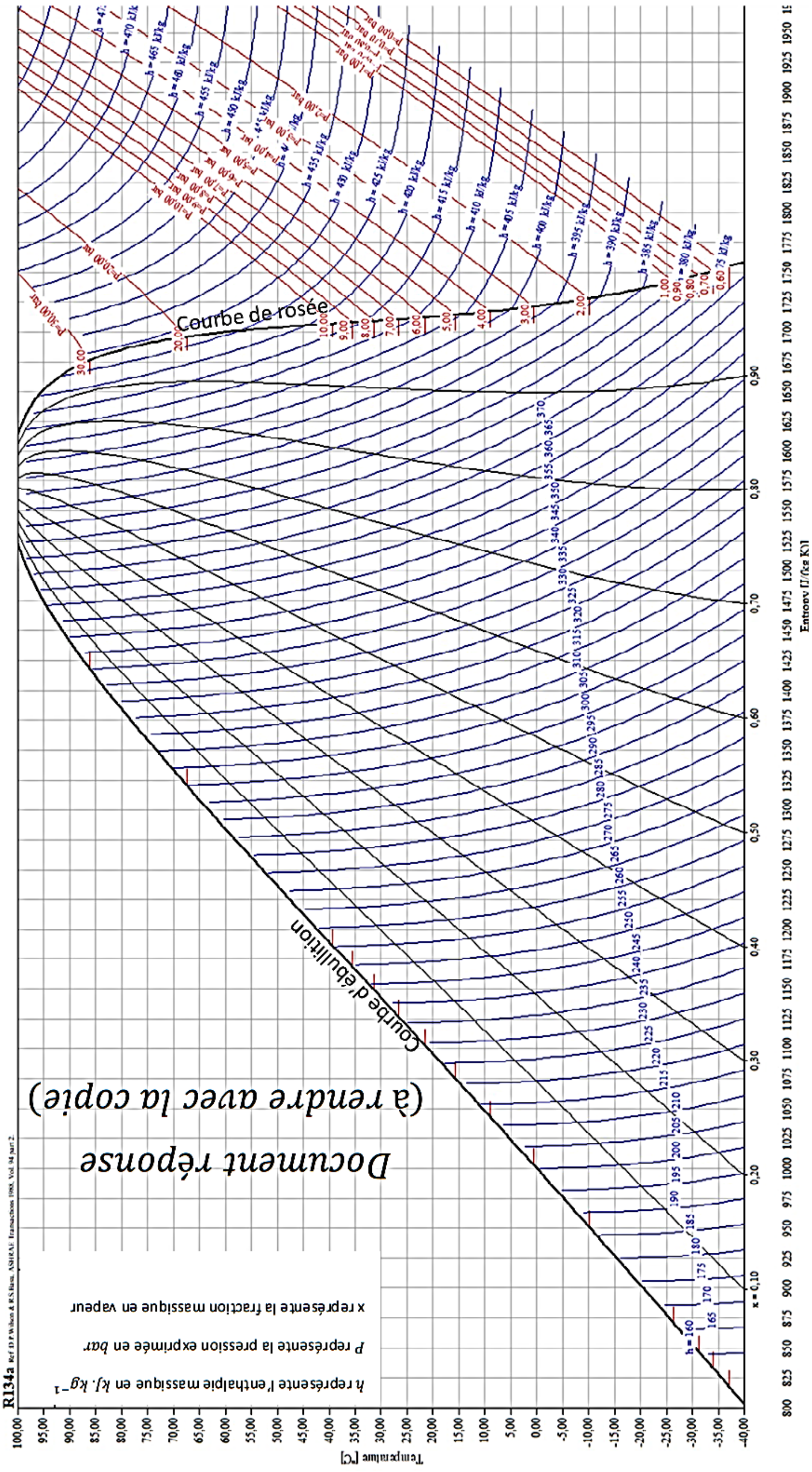
NOM :

Annexe 1


R134a
DTU, Department of Energy Engineering
Energy Systems, Refrigeration
Ref :D.P. Wilson & R.S.Basu, ASHRAE TRANSACTIONS 1988, Vol. 94 part 2.
Pressure [Bar]
Enthalpy [kJ/kg]

NOM :

Annexe 2



Document réponse
(à rendre avec la copie)
Courbe de rosée
Courbe d'ébullition
R134a
h représente l'enthalpie massique en kJ.kg−1
P représente la pression exprimée en bar
x représente la fraction massique en vapeur
Température [°C]

NOM :

Annexe 3

CALORIE FLUOR

Table Thermodynamique R 134a

Temperature (°C)	Liquide Pression (bar abs)	Liquide Densité (Kg/M^3)	Vapeur Densité (Kg/M^3)	Liquide Enthalpie (KJ/Kg)	Vapeur Enthalpie (KJ/Kg)	Liquide Entropie (KJ/Kg-K)	Vapeur Entropie (KJ/Kg-K)
-16	1.5728	1345.9	7.9673	178.83	389.02	0.92054	1.7379
-15	1.6394	1342.8	8.287	180.14	389.63	0.92559	1.7371
-14	1.7082	1339.7	8.6168	181.44	390.24	0.93062	1.7363
-13	1.7792	1336.6	8.9568	182.75	390.85	0.93564	1.7355
-12	1.8524	1333.4	9.3074	184.07	391.46	0.94066	1.7348
-11	1.928	1330.3	9.6688	185.38	392.06	0.94566	1.7341
-10	2.006	1327.1	10.041	186.7	392.66	0.95065	1.7334
-9	2.0864	1323.9	10.425	188.02	393.27	0.95563	1.7327
-8	2.1693	1320.8	10.82	189.34	393.87	0.9606	1.732
-7	2.2548	1317.6	11.227	190.66	394.47	0.96556	1.7313
-6	2.3428	1314.3	11.646	191.99	395.06	0.97051	1.7307
-5	2.4334	1311.1	12.077	193.32	395.66	0.97544	1.73
-4	2.5268	1307.9	12.521	194.65	396.25	0.98037	1.7294
-3	2.6228	1304.6	12.978	195.98	396.84	0.98529	1.7288
-2	2.7217	1301.4	13.448	197.32	397.43	0.99021	1.7282
-1	2.8234	1298.1	13.931	198.66	398.02	0.99511	1.7276
0	2.928	1294.8	14.428	200	398.6	1	1.7271

CALORIE FLUOR

Table Thermodynamique R 134a

Temperature (°C)	Liquide Pression (bar abs)	Liquide Densité (Kg/M^3)	Vapeur Densité (Kg/M^3)	Liquide Enthalpie (KJ/Kg)	Vapeur Enthalpie (KJ/Kg)	Liquide Entropie (KJ/Kg-K)	Vapeur Entropie (KJ/Kg-K)
26	6.8543	1202.9	33.335	235.97	412.84	1.1246	1.7159
27	7.0592	1199.1	34.346	237.4	413.34	1.1294	1.7155
28	7.2688	1195.2	35.382	238.84	413.84	1.1341	1.7152
29	7.483	1191.4	36.445	240.28	414.33	1.1388	1.7148
30	7.702	1187.5	37.535	241.72	414.82	1.1435	1.7145
31	7.9257	1183.5	38.653	243.17	415.3	1.1482	1.7142
32	8.1543	1179.6	39.799	244.62	415.78	1.1529	1.7138
33	8.3878	1175.6	40.974	246.08	416.26	1.1576	1.7135
34	8.6263	1171.6	42.18	247.54	416.72	1.1623	1.7131
35	8.8698	1167.5	43.416	249.01	417.19	1.167	1.7128
36	9.1185	1163.4	44.683	250.48	417.65	1.1717	1.7124
37	9.3724	1159.3	45.983	251.95	418.1	1.1764	1.7121
38	9.6315	1155.1	47.316	253.43	418.55	1.1811	1.7118
39	9.896	1151	48.683	254.92	418.99	1.1858	1.7114
40	10.166	1146.7	50.085	256.41	419.43	1.1905	1.7111
41	10.441	1142.5	51.523	257.91	419.86	1.1952	1.7107
42	10.722	1138.2	52.998	259.41	420.28	1.1999	1.7103
43	11.009	1133.8	54.512	260.91	420.7	1.2046	1.71
44	11.301	1129.5	56.064	262.43	421.11	1.2092	1.7096
45	11.599	1125.1	57.657	263.94	421.52	1.2139	1.7092
46	11.903	1120.6	59.292	265.47	421.92	1.2186	1.7089
47	12.213	1116.1	60.969	267	422.31	1.2233	1.7085
48	12.529	1111.5	62.69	268.53	422.69	1.228	1.7081
49	12.851	1106.9	64.458	270.07	423.07	1.2327	1.7077
50	13.179	1102.3	66.272	271.62	423.44	1.2375	1.7072
51	13.513	1097.6	68.134	273.18	423.8	1.2422	1.7068
52	13.854	1092.9	70.047	274.74	424.15	1.2469	1.7064
53	14.201	1088.1	72.012	276.31	424.49	1.2516	1.7059
54	14.555	1083.2	74.03	277.89	424.83	1.2563	1.7055

NOM :

Annexe 4

	Température T (°C)	Pression P (bar)	Enthalpie Massique h (kJ/kg)	Entropie massique s (kJ/(kg.K)	Titre en vapeur x_V
Point A	**50**	**2**			
Point B					
Point C					
Point D					