

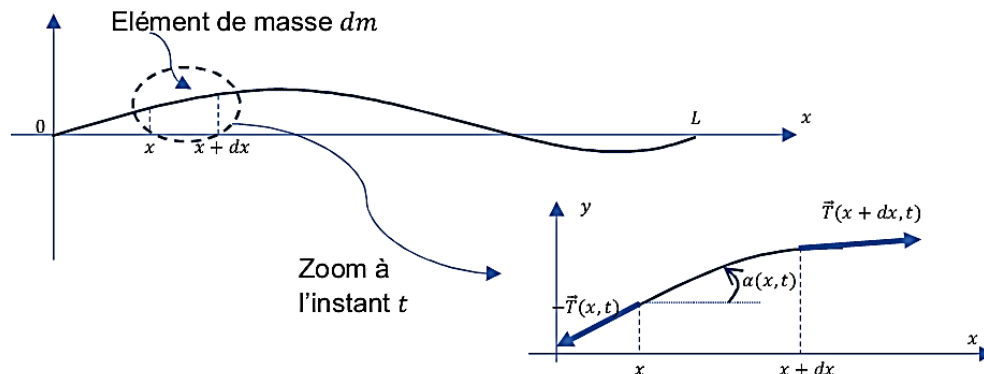
DEVOIR MAISON N°11

ONDES MECANIQUES

➤ A rendre le JEUDI 3 AVRIL 2025

Etude d'une corde vibrante (Extrait concours)

Dans un premier temps, on souhaite étudier le mouvement vertical d'une corde de masse linéique μ uniforme. Pour cette étude, on étudie un élément de masse dm de la corde, de longueur $d\ell$ et on impose les hypothèses suivantes :



- Hypothèse 1 : On néglige les frottements.
- Hypothèse 2 : La corde, supposée infiniment souple, est constamment tendue. Chaque élément de la corde est alors soumis à des forces de tension tangentes en tout point à la corde. On note $\vec{T}(x, t)$ la tension qu'exerce à un instant t la partie de la corde d'abscisse supérieure à x sur la partie de la corde d'abscisse inférieure à x .
- Hypothèse 3 : Le poids de chaque élément de la corde est négligeable par rapport aux tensions s'exerçant de part et d'autre de ce brin de corde.
- Hypothèse 4 : On néglige le déplacement horizontal (dans le référentiel d'étude supposé galiléen). Un point de la corde est repéré à l'équilibre par $(x, 0)$ et est repéré hors équilibre par $(x, y(x, t))$.
- Hypothèse 5 : Le déplacement vertical $y(x, t)$ est faible. L'angle $\alpha(x, t)$ est supposé petit de sorte qu'il est légitime d'effectuer un développement limité à l'ordre 1 par rapport à cet angle.

Il est demandé, pour les questions 19 et 20 une rédaction rigoureuse au cours de laquelle le candidat précise l'hypothèse (1, 2, 3, 4 ou 5) qu'il utilise à chaque étape importante de son raisonnement.

- 19) En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la partie de corde située entre x et $x + dx$, et en le projetant sur l'axe horizontal, montrer que la tension est uniforme le long de la corde.

Pour la suite, on notera T_0 la norme, uniforme et constante, de la tension $\vec{T}$ du fil.

- 20) En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la partie de corde située entre x et $x + dx$, et en le projetant sur l'axe vertical, montrer que $y(x, t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0$. On donnera l'expression de v en fonction de T_0 et μ .

- 21) Que représente la grandeur v ?

Pour les questions 22 et 23, les deux extrémités de la corde (situées en $x = 0$ et $x = L$) sont fixes. Afin de résoudre l'équation aux dérivées partielles précédente, on propose une solution particulière $y(x, t)$ à variables séparées de la forme $y(x, t) = A \cos(kx - \psi) \cos(\omega t - \varphi)$ où A est une constante avec $v = \frac{\omega}{k}$ et où ω et k sont deux grandeurs réelles et positives appelées respectivement pulsation temporelle et pulsation spatiale de l'onde.

22) Comment qualifier l'onde décrite par l'expression de $y(x, t)$?

23) Montrer que les conditions aux limites imposent une quantification des pulsations ω_n des ondes recherchées avec $\omega_n = \frac{n\pi v}{L}$ où n désigne un entier naturel non nul fixant le rang du mode propre.

Pour les questions 24 et 25, l'extrémité d'abscisse $x = L$ de la corde est fixe et un système exciteur impose à son extrémité d'abscisse $x = 0$ un petit déplacement transversal $y(0, t) = a \cos(\Omega t)$ (avec a constante fixant l'amplitude verticale et Ω fixant la pulsation d'excitation).



Pour décrire le régime forcé, nous cherchons une vibration $y(x, t)$ de pulsation temporelle Ω et satisfaisant les conditions limites.

Pour ce régime forcé établi, on montre que la solution s'écrit :

$$y(x, t) = a \frac{\sin\left(\frac{\Omega}{v}(L - x)\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{v}L\right)} \cos(\Omega t)$$

24) Pour quelles pulsations d'excitation Ω obtient-on des ventres d'amplitude maximale (ici d'amplitude infinie par absence de modélisation des frottements) ?

25) On remarquera une similitude entre les pulsations pour lesquelles il y a résonance en régime sinusoïdal forcé et les pulsations des modes propres. Citer un autre système physique pour lequel on rencontre le même phénomène.