

Difficile

ATS 2011 → II) Premier Pb
III) (difficile, HP) | Deuxième Pb
IV) III)

Récupération d'énergie

Le sujet propose d'étudier deux dispositifs de récupération d'énergie soit thermique (problème 1) soit mécanique (problème 2) afin de produire une énergie électrique.

Chaque problème et chaque partie du sujet sont indépendants.

Premier problème

Cogénération

La cogénération est un principe de production simultanée d'électricité et de chaleur. Elle fait partie des techniques les plus efficaces énergétiquement pour l'utilisation des énergies fossiles et renouvelables. L'idée de la cogénération se base sur le fait que la production d'énergie électrique dégage une grande quantité de chaleur, habituellement dissipée et perdue dans l'environnement. Pour compléter la demande en énergie thermique (chauffage, process industriel, etc.), elle propose d'utiliser les pertes de la production d'énergie électrique également comme source d'énergie thermique. Les grands constructeurs de chaudière domestique ont donc mis au point des prototypes permettant d'une part, de chauffer l'habitat et d'autre part, de produire de l'énergie électrique.

I. Principe de l'innovation

Étudions deux configurations d'installation permettant de produire 1 kW d'énergie électrique et 5 kW de chauffage.

Configuration 1 : Supposons dans un premier temps que nous disposons de deux installations distinctes : une pour faire de l'électricité, une autre pour se chauffer.

Configuration 2 : Imaginons que nous voulons avoir le même résultat au niveau des puissances générées, mais avec une installation de cogénération. Celle-ci récupère les pertes thermiques liées à la production d'électricité pour les réutiliser dans la production de chaleur.

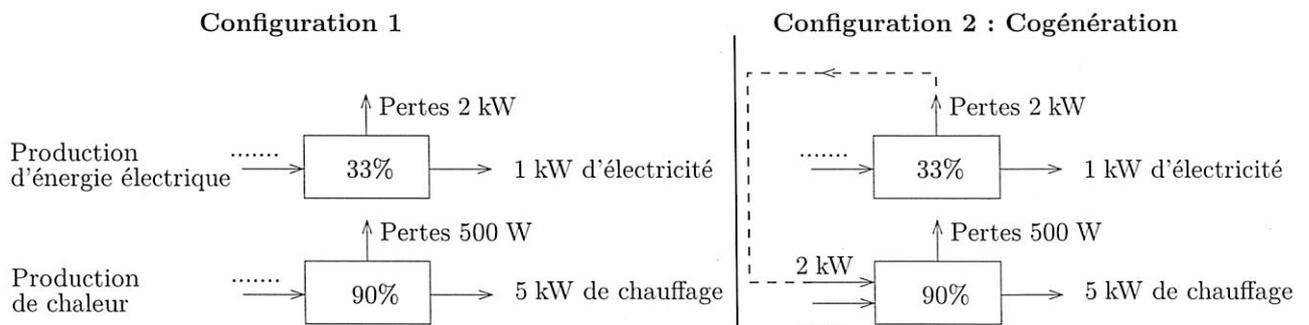


FIGURE 1 – Bilan énergétique - Comparaison des deux configurations

- I.1. Pour chaque configuration, déterminer les puissances consommées pour produire une puissance électrique de 1 kW et une puissance thermique de 5 kW (chauffage).
- I.2. En déduire le rendement global de chaque configuration ? Quel est l'intérêt d'une installation de cogénération ?

Le sujet propose d'étudier différents aspects d'une chaudière à cogénération fonctionnant grâce à la chaleur dégagée lors la **combustion du méthane** (partie II). Celle-ci permet de faire fonctionner un **moteur Stirling** (partie III) qui entraîne en translation un piston. L'énergie mécanique ainsi produite est convertie en énergie électrique par un dispositif non étudié dans le sujet.

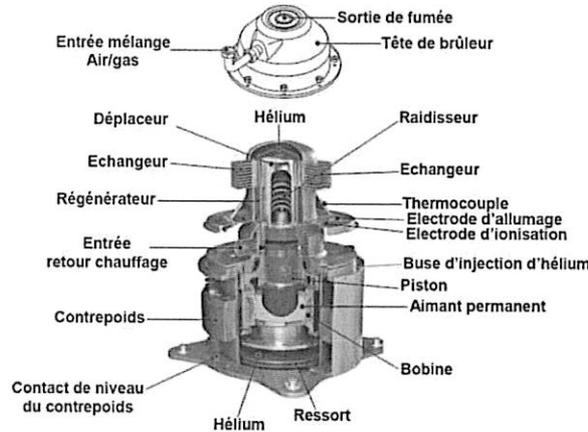


FIGURE 2 – Vue du cogénérateur étudié

II. Pouvoir calorifique du méthane

La chaudière à cogénération produit de l'énergie thermique et électrique à partir du gaz naturel, le méthane CH_4 dont le comportement est assimilable à celui d'un gaz parfait.

Données :

- Pression standard : $p^\circ = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
- Enthalpies de formation :

Espèces chimiques	$\text{CH}_4(\text{g})$	$\text{CO}_2(\text{g})$	$\text{O}_2(\text{g})$	$\text{H}_2\text{O}(\text{g})$
$\Delta_f H^\circ$ (en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$) à $T = 298 \text{ K}$	-74,85	-393,5	0	-241,9

- Capacités thermiques molaires à pression constante :

Espèces chimiques	$\text{N}_2(\text{g})$	$\text{CO}_2(\text{g})$	$\text{O}_2(\text{g})$	$\text{H}_2\text{O}(\text{g})$
C_p° (en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$)	29,1	37,1	29,4	33,6

- Enthalpie standard de vaporisation de l'eau : $\Delta_{\text{vap}} H_m^\circ(T = 298 \text{ K}) = 44,0 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

II.1. Quelle différence existe-t-il entre l'origine du gaz naturel, d'origine géologique, et celle des gaz commercialisés en bouteille comme le propane ou le butane ?

II.2. Écrire l'équation bilan de la combustion complète d'une mole de méthane avec le dioxygène contenu dans l'air.

II.3. Écrire l'équation de combustion incomplète d'une mole de méthane en admettant que celle-ci ne produise que du monoxyde de carbone CO et de l'eau.

II.4. Comparer les deux réactions et conclure quant à l'une des causes de formation du monoxyde de carbone. Pourquoi doit-on éviter la formation de monoxyde de carbone ?

On considèrera dans la suite du problème la combustion complète du méthane.

II.5. Calculer l'enthalpie de réaction $\Delta_r H^\circ(T = 298 \text{ K})$ de cette réaction. On supposera que l'eau formée est sous forme de vapeur. Cette réaction est-elle endothermique ou exothermique ? Justifier.

On suppose que l'air est composé à 20% de dioxygène O_2 et à 80% de diazote N_2 .

II.6. Estimer la température maximale théorique T_f des gaz produits lors de la combustion du méthane avec l'air dans les proportions stoechiométriques. On considèrera que la chaleur dégagée par la combustion est entièrement transférée pour échauffer les gaz présents de la température initiale $T = 298 \text{ K}$ à la température maximale T_f .

II.7. Pourquoi la température ainsi calculée est-elle supérieure à la température que l'on peut mesurer ?

II.8. Calculer la quantité de méthane n présente dans un mètre cube normal, c'est à dire à la pression standard p° et à la température $T = 298 \text{ K}$.

II.9. En déduire le pouvoir calorifique inférieur P.C.I. du méthane, c'est à dire l'énergie thermique totale dissipée par la combustion d'un mètre cube normal de méthane, l'eau formée étant sous forme vapeur. On exprimera le résultat en J/m^3 .

On appelle P.C.S. pouvoir calorifique supérieur, l'énergie thermique totale dissipée par la combustion d'un mètre cube de méthane, l'eau formée étant sous forme liquide.

II.10. Le P.C.S. est-il inférieur ou supérieur au P.C.I. ? Justifier.

II.11. Exprimer le P.C.S. en fonction du P.C.I., n et $\Delta_{\text{vap}}H_m^\circ(\text{H}_2\text{O})$.

II.12. Application numérique : quelle est la valeur du P.C.S. en J/m^3 puis en kWh/m^3 ?

III. Étude du moteur Stirling

On considère $n = 40 \text{ mmol}$ d'hélium, assimilable à un gaz parfait de coefficient isentropique constant $\gamma = C_p / C_v = 1,66$, subissant un cycle modélisé par les évolutions suivantes à partir de l'état A de volume $V_A = 1 \text{ L}$:

- Compression isotherme réversible au contact de la source \mathcal{S}_f , jusqu'à l'état B , de volume $V_B = V_A / 4$;
- Échauffement isochore au contact thermique de la source \mathcal{S}_c jusqu'à l'état C ;
- Détente isotherme réversible au contact de la source \mathcal{S}_c jusqu'à l'état D , de volume V_A ;
- Refroidissement isochore au contact thermique de la source \mathcal{S}_f jusqu'à l'état A .

La source chaude \mathcal{S}_c est maintenue à température constante $T_c = 930 \text{ K}$ par un bruleur alimenté en méthane et en air.

La source froide \mathcal{S}_f est maintenue à température constante $T_f = 330 \text{ K}$, en régime permanent de fonctionnement, par le retour d'eau froide des circuits de chauffage.

III.1. Calculer les valeurs numériques de pression et de volume dans chacun des états. On présentera les résultats dans un tableau.

III.2. Représenter l'allure du cycle en coordonnées de Clapeyron (P, V) .

III.3. Le cycle est-il moteur ou récepteur ? Justifier.

III.4. On rappelle la relation de Mayer : $C_p - C_v = nR$. Exprimer C_p et C_v en fonction de n , R et γ .

III.5. Déterminer pour la transformation $A \rightarrow B$ l'expression du travail W_{AB} et du transfert thermique Q_{AB} reçus par le fluide en fonction de n , R et T_f . Commenter le signe de W_{AB} .

III.6. Déterminer pour la transformation $B \rightarrow C$ l'expression du travail W_{BC} et du transfert thermique Q_{BC} reçus par le fluide en fonction de n , R , γ , T_f et T_c . Commenter le signe de Q_{BC} .

III.7. En déduire l'expression de l'entropie échangée S_e par le fluide au cours de la transformation $B \rightarrow C$.

III.8. Déterminer l'expression de la variation d'entropie du fluide ΔS_{BC} .

III.9. Calculer numériquement S_e et ΔS_{BC} . La transformation $B \rightarrow C$ est-elle réversible ?

III.10. Déterminer pour la transformation $C \rightarrow D$ l'expression du travail W_{CD} et du transfert

thermique Q_{CD} reçus par le fluide.

III.11. Déterminer pour la transformation $D \rightarrow A$ l'expression du travail W_{DA} et du transfert thermique Q_{DA} reçus par le fluide.

III.12. Exprimer le travail total W_t fourni par le moteur au cours d'un cycle, en fonction de n , R , T_f et T_c .

III.13. Le moteur produit du travail à partir de l'énergie thermique reçue au cours de la détente isotherme $C \rightarrow D$. Exprimer le rendement du moteur η_m uniquement en fonction de T_f et T_c et calculer sa valeur.

III.14. Calculer le travail total W_t fourni par le moteur au cours d'un cycle. Combien de cycles par seconde doit effectuer le moteur pour fournir une puissance \mathcal{P} de 2 kW ?

Deuxième problème

Générateur d'énergie portable

On trouve de plus en plus de dispositifs permettant la génération d'énergie électrique à partir de mouvement humain volontaire ou non volontaire. Le sujet propose de modéliser un générateur d'énergie électrique fonctionnant à partir du mouvement naturel du corps humain. Il permet par exemple de recharger les accumulateurs d'un téléphone portable ou d'un baladeur.

I. Modélisation de la marche d'un joggeur

Lorsqu'on enregistre grâce à des marqueurs le déplacement en 3 dimensions du torse humain, on remarque que le déplacement le plus significatif est le mouvement vertical de la hanche.

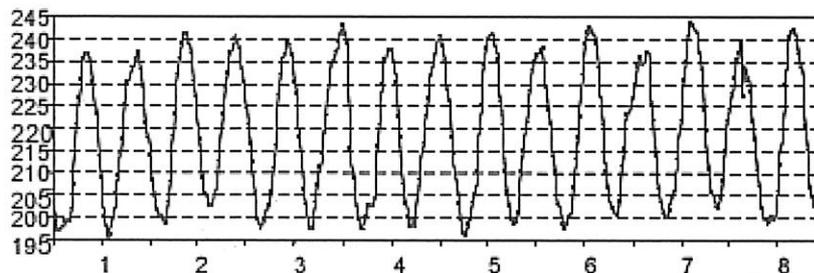


FIGURE 3 – Relevé en laboratoire de l'altitude $Z_e(t)$ (en mm) de la hanche lors de la marche d'un homme à 5 km/h sur un tapis roulant en fonction du temps (en s)

En vue de la modélisation, on assimile le mouvement vertical de la hanche à un déplacement purement sinusoïdal : $Z_e(t) = Z_e \cos(\omega t) + Z_{moy}$ (on fera abstraction de la position de l'origine des temps).

I.1. Déterminer graphiquement, avec une précision de 10%, la valeur moyenne Z_{moy} et l'amplitude Z_e du mouvement.

I.2. Déterminer graphiquement, avec une précision de 10%, la période T du mouvement. En déduire la pulsation ω .

II. Modélisation mécanique du générateur d'énergie portable

Lorsque l'homme marche, il entraîne un système de récupération d'énergie disposé sur sa hanche.

Le référentiel mobile \mathcal{R}' ($O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) lié à la hanche de l'homme est en translation dans le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen.

Le référentiel mobile \mathcal{R}' est repéré en coordonnées cartésiennes dans \mathcal{R} par sa position verticale : $Z_e(t) = Z_e \cos(\omega t) + Z_{moy}$. Sa vitesse selon \vec{u}_x est uniforme.

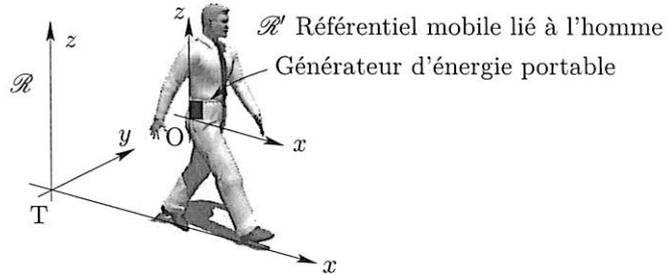


FIGURE 4 – Repérage du générateur d'énergie portable dans l'espace

II.1. Le référentiel mobile \mathcal{R}' est-il galiléen ? Montrer que l'accélération d'entraînement \vec{a}_e de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} se met sous la forme :

$$\vec{a}_e = -\omega^2 Z_e \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

Le générateur est constitué d'un empilement cylindrique d'aimants au milieu duquel oscille une bobine lorsque l'homme marche.

Le mobile { bobine + masse } de masse totale $m = 50 \text{ g}$ est en suspension sur un ressort que l'on supposera parfait, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 .

Dans le référentiel mobile \mathcal{R}' , on note $z(t)$ la position du mobile par rapport à O , le point d'attache du ressort et $v(t) = \frac{dz}{dt}$ sa vitesse.

L'accélération du champ de pesanteur est notée $\vec{g} = -g \cdot \vec{u}_z$.

Afin de prendre en compte la conversion d'énergie mécanique-électrique, on modélisera l'interaction électromagnétique agissant sur le mobile { bobine + masse } par une force de la forme $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$.

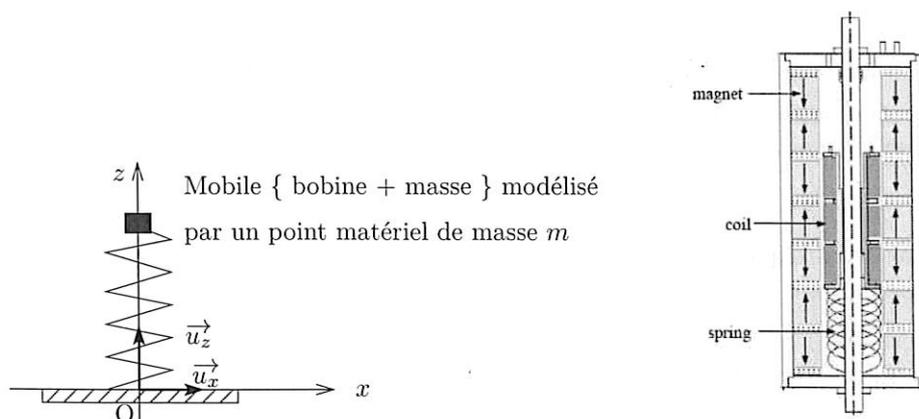


FIGURE 5 – Modélisation du mobile + ressort

II.2. Exprimer les forces s'exerçant sur le mobile { bobine + masse } dans le référentiel mobile $\mathcal{R}' (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

II.3. On note z_{eq} la position d'équilibre du mobile { bobine + masse } lorsque \mathcal{R}' est fixe dans \mathcal{R} . Exprimer z_{eq} en fonction de m, g, k et ℓ_0 .

II.4. À l'équilibre, le ressort est-il comprimé ou étiré? Justifier.

On considère dans toute la suite du problème que l'homme marche, c'est à dire que \mathcal{R}' est en translation dans \mathcal{R} .

On note $Z(t) = z(t) - z_{eq}$ la position du mobile { bobine + masse } par rapport à sa position d'équilibre z_{eq} .

II.5. Montrer que l'équation différentielle du mouvement du mobile dans le référentiel \mathcal{R}' se met sous la forme :

$$\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{Z} + \omega_0^2 Z = \omega^2 Z_e \cos(\omega t)$$

On exprimera ω_0 et Q en fonction de m, k et α .

On étudie dans la suite le régime sinusoïdal forcé imposé par la marche de l'homme à la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Utilisons les grandeurs complexes \underline{Z} et \underline{v} associées à $Z(t)$ et $v(t)$:

$$\underline{Z}(t) = \underline{Z}_m \cdot e^{j\omega t} \quad \underline{v}(t) = \underline{V}_m \cdot e^{j\omega t} \quad \text{avec } j^2 = -1$$

\underline{Z}_m et \underline{V}_m sont les amplitudes complexes de $Z(t)$ et $v(t)$.

II.6. Exprimer \underline{V}_m en fonction de \underline{Z}_m et ω .

II.7. A partir de l'équation différentielle du mouvement, déterminer l'expression de l'amplitude complexe de la vitesse \underline{V}_m .

II.8. En déduire que le module de \underline{V}_m se met sous la forme :

$$V_m = |\underline{V}_m| = \frac{\omega^2 Z_e}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

On fait l'hypothèse que l'oscillateur est suffisamment amorti pour pouvoir considérer que la pulsation de résonance en vitesse est ω_0 .

II.9. Exprimer l'amplitude de la vitesse V_m à la résonance en fonction de m, Z_e, ω_0 et α .

II.10. En déduire l'amplitude des oscillations $Z_m = |\underline{Z}_m|$ à la résonance.

Compte tenu des dimensions du dispositif, l'amplitude des oscillations est limitée à $L_{max} = 4$ cm.

II.11. Montrer que le coefficient de conversion α doit être supérieur à α_{min} pour que l'amplitude maximale des oscillations soit inférieure à L_{max} . On précisera l'expression de α_{min} en fonction de m, Z_e, ω_0 et L_{max} .

On supposera par la suite que le dispositif est conçu pour fonctionner à la résonance avec une amplitude maximale des oscillations égale à L_{max} et avec $\alpha = \alpha_{min}$.

II.12. Quelle est l'expression de la puissance \mathcal{P} de la force \vec{F} modélisant la conversion d'énergie mécanique-électrique? Pourquoi le système doit-il être conçu pour fonctionner à la résonance?

II.13. Exprimer la puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ de la force \vec{F} en fonction de m, L_{max}, Z_e et ω_0 .

II.14. Calculer la raideur du ressort nécessaire pour fonctionner à la résonance et la puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$. On prendra $\omega = \omega_0 = 10$ rad/s et $Z_e = 2$ cm.

III. Modélisation du générateur d'énergie électrique

La partie mobile du générateur sur laquelle sont fixées les bobines se déplace rectilignement au milieu d'aimants permanents.

III.1. Dessiner sur votre copie, les lignes de champ magnétique créées par un aimant permanent rectangulaire.

Le bobinage est modélisé par une bobine plate, circulaire de rayon R constituée de N spires jointives d'inductance et de résistance négligeables.

La position du mobile { bobine + masse } est repérée par sa distance $Z(t)$ au point O' . On note sa vitesse $v(t) = \frac{dZ}{dt}$.

On repère un point M par ses coordonnées (r, θ, z) dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

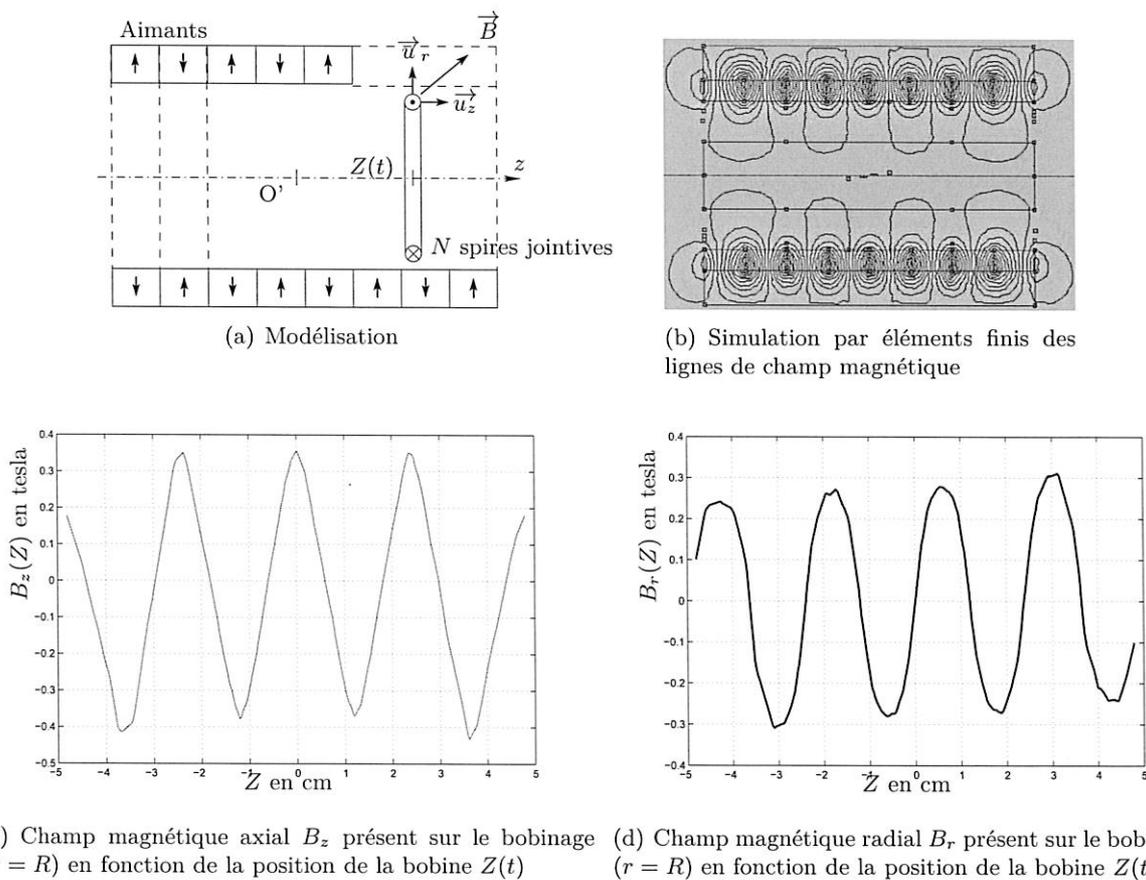


FIGURE 6 – Modélisation du champ magnétique

Nous supposons que le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par l'ensemble des aimants sur les conducteurs du bobinage varie en fonction de la position de la spire sous la forme :

$$\vec{B}(r = R, t) = B_{r0} \sin(kZ(t)) \vec{u}_r + B_{z0} \cos(kZ(t)) \vec{u}_z$$

III.2. Déterminer graphiquement, avec une précision de 10%, une valeur de B_{r0} , B_{z0} et k .

III.3. Déterminer l'expression du champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$ à l'intérieur des conducteurs de la bobine.

III.4. En déduire l'expression de la force électromotrice d'induction $e(t)$ induite qui apparaît aux bornes du bobinage en fonction de $v(t)$, $Z(t)$, B_{r0} , k , N et R .

La tension générée permet d'alimenter une charge que l'on modélisera par une résistance R_0 .

III.5. Faire un schéma électrique équivalent. En déduire l'expression du courant induit $i(t)$.

III.6. Déterminer l'expression de la résultante des forces de Laplace \vec{F}_L suivant \vec{u}_z s'exerçant sur la bobine.

III.7. Comparer avec l'expression de la force \vec{F} utilisée dans la partie précédente.

ATS 2011

Σ fermé - TB.

III Etude du moteur de Stirling.

III.1.	P(bar)	V(l)	T(K)	
A	1,1	1	330	} isotherme
B	4,4	0,25	330	
C	12,4	0,25	930	} isochore
D	3,1	1	930	

A:

$$P_A V_A = n R T_A$$

$$P_A = \frac{n R T_A}{V_A} = \frac{40 \cdot 10^{-3} \times 8,31 \times 330}{10^{-3}}$$

$$= 110 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

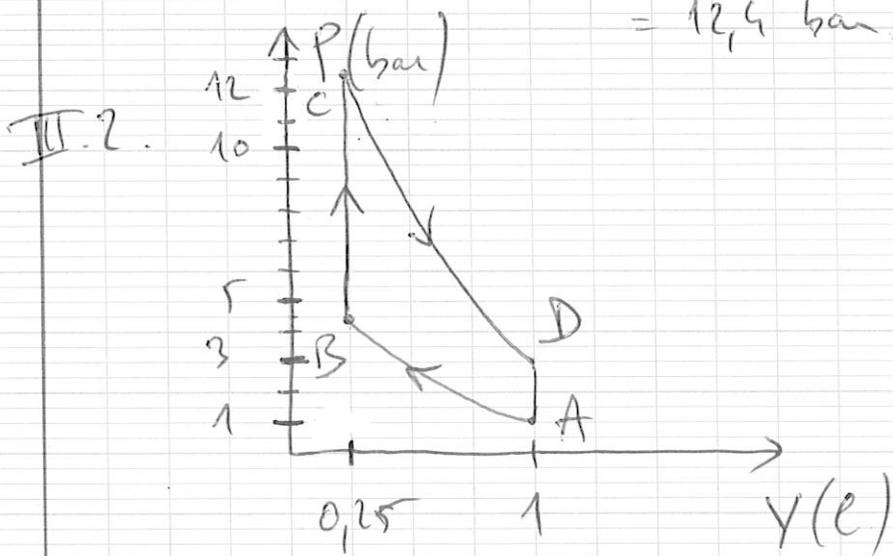
$$= 1,10 \text{ bar}$$

C:

$$P_C = \frac{n R T_C}{V_C} = \frac{40 \cdot 10^{-3} \times 8,31 \times 930}{0,25 \cdot 10^{-3}}$$

$$= 12,4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$= 12,4 \text{ bar}$$



III.3. Sen) horaire \Rightarrow Cycle moteur $W > 0$

$$\text{III.4. } C_p - C_v = nR$$

$$\frac{C_p}{C_v} = \gamma$$

$$C_v \gamma - C_v = nR$$

$$C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}$$

$$C_p - \frac{1}{\gamma} C_p = nR$$

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} C_p = nR$$

$$C_p = \frac{nR \gamma}{\gamma - 1}$$

$$\text{III.5. } A \rightarrow B$$

isotherme.

$$\Delta U_{AB} = W_{AB} + Q_{AB}$$

$$C_v \Delta T = W_{AB} + Q_{AB}$$

0 car isotherme.

1er principe Σ forme.

$$\begin{aligned} W_{AB} &= - \int_A^B p_{ext} \cdot dV \\ &= - \int_A^B p \cdot dV \quad \text{reversible} \\ &= - \int_A^B \frac{nRT}{V} dV \end{aligned}$$

$$= -nRT_A \int_A^B \frac{dV}{V}$$

$$= -nRT_A \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)$$

$$= -nRT_A \ln \left(\frac{1}{4} \right) = +nRT_A \ln 4$$

$$= +nRT_f \ln 4. > 0$$

Travail req $> 0 \Leftrightarrow$ Compression.

$$Q_{AB} = -W = -nRT_f \ln 4$$

III.6. B \rightarrow C

$$W_{BC} = - \int_B^C p_{ext} \cdot dV = 0 \quad \text{car } dV = 0$$

$$\Delta U_{BC} = W_{BC} + Q_{BC}$$

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = C_V \Delta T = \frac{nR}{\gamma-1} (T_c - T_f)$$

$Q_{BC} > 0$ chaleur reçue de la source chaude.

$$\text{III.7. } S_c = \frac{Q_{BC}}{T_c} = \frac{nR}{\gamma-1} \left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right)$$

$$\text{III.8. } dU = T \cdot ds - p \cdot dV \quad \text{'' (voir)''}$$

$$dU = T \cdot ds$$

$$\frac{nR}{\gamma-1} dT = T \cdot ds$$

$$\frac{nR}{\gamma-1} \frac{dT}{T} = ds$$

$$\frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_c}{T_f} \right) = \Delta S_{BC}$$

$$\text{III.9. } S_c = \frac{40 \cdot 10^{-3} \times 8,31}{(1,66 - 1)} \left(1 - \frac{330}{930}\right)$$

$$= 325 \cdot 10^{-3} \text{ J.K}^{-1}$$

$$\Delta S_{bc} = \frac{40 \cdot 10^{-3} \times 8,31}{(1,66 - 1)} \times \ln \left(\frac{930}{330} \right)$$

$$= 522 \cdot 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$S_c \neq \Delta S$ Transformation - irreversible.
($S_c \neq 0$)

III.10. CD analogue à AB (isotherme)
 $\Rightarrow W_{CD} = -nRT \ln \left(\frac{V_D}{V_C} \right)$

$$W_{CD} = -nRT_c \ln 4.$$

$$Q_{CD} = nRT_c \ln 4.$$

III.11. DA analogue à BC (isochore).

$$W_{DA} = 0$$

$$Q_{DA} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_f - T_c)$$

III.12. $W_{\text{fourmi}} = - (W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA})$

$$= -nRT_f \ln 4 + nRT_c \ln 4$$

$$= nR(T_c - T_f) \ln 4.$$

III.13. $\eta_m = \frac{W_{\text{fourmi}}}{Q_{CD}} = \frac{T_c - T_f}{T_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$

$$= 1 - \frac{330}{930} = 65\%$$

III.14. $W_{\text{fourmi}} = 40 \cdot 10^{-3} \times 8,31 \times (930 - 330) \ln 4$

$$= 276 \text{ J}$$

$$n = \frac{2000}{276} \approx 7,2 \text{ cycles/s } 6$$

ATS 2011
Deuxième problème

I.1. $z_{\text{moy}} = \frac{z_{\text{max}} + z_{\text{min}}}{2} = \frac{240 + 200}{2} = 220 \text{ mm}$

$z_e = 20 \text{ mm}$

I.2. $T = \frac{8,5}{15} = 0,57 \text{ s}$

II.1. Non car mouvement non rectiligne uniforme.

$z_e(t) = (z_e \cos \omega t + z_{\text{moy}})$

$\Rightarrow \dot{z}_e(t) = -\omega z_e \sin \omega t$

$\Rightarrow \ddot{z}_e(t) = -\omega^2 z_e \cos(\omega t)$

$\Rightarrow \vec{a}_e(t) = -\omega^2 z_e \cos(\omega t) \vec{u}_z$

II.2. Force d'entraînement : $-m \vec{a}_e$

Poids : $-mg \vec{u}_z = \vec{P}$

Force électromagnétique : $\vec{F} = -\alpha \dot{z} \vec{u}_z$

Force de rappel élastique :

$\vec{F}_e = -k(z - l_0) \vec{u}_z$

II.3. $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ avec $m \vec{a}_e = \vec{0}$ et $\dot{z}_e = 0$

$-mg - k(z_{\text{eq}} - l_0) = 0$

$-mg + kl_0 = kz_{\text{eq}}$

$z_{\text{eq}} = l_0 - \frac{mg}{k}$

II.4. A l'équilibre, ressort comprimé. $z_{\text{eq}} < l_0$

II.5. $\Sigma \vec{F}' = m \vec{a}'$

$$-mg - \alpha \dot{z} - k(z - l_0) + m\omega^2 z_e \cos(\omega t) = m\ddot{z}$$

$$-mg - \alpha \dot{z} - k(z + z_{eq} - l_0) + m\omega^2 z_e \cos(\omega t) = m\ddot{z}$$

Avec $-mg - k z_{eq} + k l_0 = 0$.

On obtient :

$$-\alpha \dot{z} - k z + m\omega^2 z_e \cos(\omega t) = m\ddot{z}$$

Or $\ddot{z} + \alpha \dot{z} + k z = m\omega^2 z_e \cos(\omega t)$

Or $\ddot{z} = \ddot{z}$ et $\dot{z} = \dot{z}$

D'où :

$$m\ddot{z} + \alpha \dot{z} + k z = m\omega^2 z_e \cos(\omega t)$$

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = \omega^2 z_e \cos(\omega t)$$

Identification : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$$

$$\Rightarrow Q = \omega_0 \frac{m}{\alpha}$$

$$= \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{m}{\alpha} = \frac{\sqrt{k m}}{\alpha}$$

II.6. $\underline{V}_m = j\omega \underline{z}_m$

II.7. D'après eq. diff. :

$$j\omega \underline{v} + \frac{\omega_0}{Q} \underline{v} + \frac{\omega_0^2}{j\omega} \underline{v} = \omega^2 z_e e^{j\omega t}$$

$$\text{II.8. } \cancel{V_m e^{j\omega t}} \left(j\omega + \frac{\omega_0}{Q} + \frac{\omega_0^2}{j\omega} \right) = \omega^2 z_e \cancel{e^{j\omega t}}$$

$$\begin{aligned} \underline{V_m} &= \omega^2 z_e \times \frac{1}{\frac{\omega_0}{Q} + j\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)} \\ &= \frac{\omega^2}{\omega_0} z_e \times \frac{1}{\frac{1}{Q} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \underline{V_m} = \frac{\omega^2}{\omega_0} z_e \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$\text{II.9. } \omega_R \approx \omega_0$$

$$\underline{V_{mR}} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0} z_e \times \frac{1}{\left(\frac{1}{Q}\right)}$$

$$= Q \omega_0 z_e \quad \text{avec } Q = \omega_0 \frac{m}{\alpha}$$

$$\underline{V_{mR}} = \omega_0^2 z_e \frac{m}{\alpha}$$

$$\text{II.10. } \underline{z_{mR}} = \frac{\underline{V_{mR}}}{j\omega_0}$$

$$\text{d'où : } \underline{z_{mR}} = \frac{\underline{V_{mR}}}{\omega_0} = \omega_0 z_e \frac{m}{\alpha}$$

$$\text{II.11. } \omega_0 z_e \frac{m}{\alpha} \leq L_{\max}$$

$$\alpha \geq \frac{\omega_0 z_e m}{L_{\max}} = \alpha_{\min}$$

II.12. $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = -\alpha v^2$
P maxi si v maxi
 \Leftrightarrow résonance de vitesse

II.13. $P = -\alpha v^2$

III.2.

$$B_{z_0} \approx 0,3 \text{ T}$$

$$B_{r_0} \approx 0,25 \text{ T}$$

$$kz(t) = \omega t$$

$$k = \frac{\omega t}{z} = \frac{2\pi t}{T z} = \frac{2\pi t}{T} \frac{1}{z}$$

$$= 2\pi \times \frac{1}{z} \text{ pour } t = T$$

$$\approx \frac{2\pi}{2,4 \cdot 10^{-2}} \approx 262 \text{ m}^{-1}$$

III.3.

$$\vec{E}'_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$= v \vec{u}_z \wedge (B_r \vec{u}_r + B_z \vec{u}_z)$$

$$= v B_r \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r$$

$$= v B_r \vec{u}_\theta$$

III.4.

$$e(t) = \int \vec{E}'_m \cdot d\vec{l}'$$

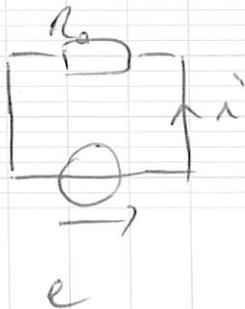
$$= \int v B_r \vec{u}_\theta \cdot \underbrace{N \cdot r \cdot d\theta \vec{u}_\theta}_1$$

$$= 2\pi v B_r R N$$

$$= 2\pi v(t) B_r(t) R N$$

$$= 2\pi R N v(t) B_{r_0} \sin(kz(t))$$

III.5.



$$i(t) = \frac{e(t)}{R_0}$$

$$\begin{aligned}
 \text{III.6. } d\vec{F}_L &= i d\vec{l}' \wedge \vec{B}' \\
 &= i r d\theta \vec{u}_\theta \wedge \vec{B}' \\
 &= i R d\theta \vec{u}_\theta \wedge \vec{B}'_r \\
 &\quad + i R d\theta \vec{u}_\theta \wedge \vec{B}'_z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{F}'_L &= \int d\vec{F}'_L \\
 &= \int i R d\theta \vec{u}_\theta \wedge \vec{B}'_r \\
 &\quad + \int i R d\theta \vec{u}_\theta \wedge \vec{B}'_z \quad | = 0 \\
 &= -R \int \sin\theta \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta
 \end{aligned}$$