ATS 2012

II. Détection automatique de la pluie

De nombreux dispositifs d'aide à la conduite sont apparus ces dernières années, comme par exemple la détection automatique de pluie qui commande la mise en route des essuie-glaces.

Disposé à l'intérieur du véhicule, une diode électroluminescente DEL projette un faisceau lumineux sur le pare-brise. Un capteur reçoit et mesure en permanence la lumière réfléchie.
Plus il y a d'eau sur la vitre, moindre est la réflexion. Le capteur de pluie pilote ainsi l'essuie-glace en fonction de la quantité d'eau détectée et sélectionne automatiquement la vitesse d'essuyage la plus efficace.

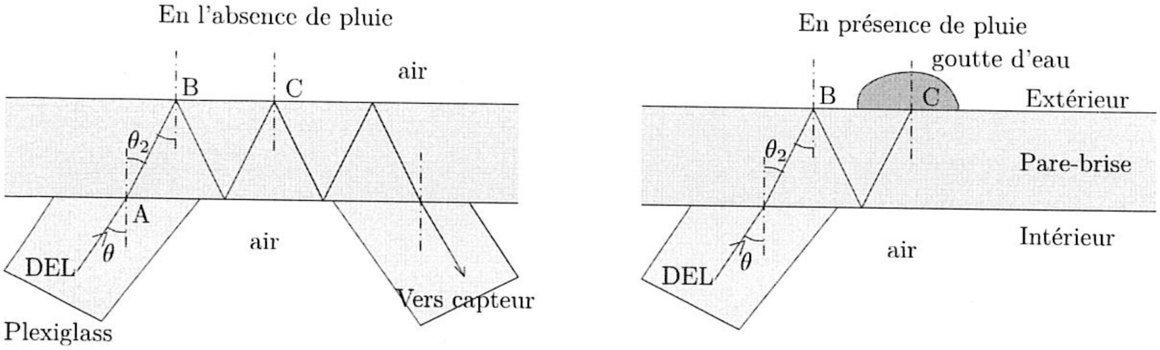


FIGURE 4 – Étude de la propagation du rayon lumineux dans le pare-brise de la voiture

Hors - Programme

Les rayons lumineux émis par la diode électroluminescente se propagent jusqu'au pare-brise dans du plexiglass d'indice optique $n_p = 1,50$. Les rayons sont dirigés vers le pare-brise avec un angle d'incidence de $\theta = 50°$.
On supposera que le pare-brise est en verre d'indice optique $n_v = 1,55$.
L'indice optique de l'eau est $n_e = 1,33$ et celui de l'air $n_a = 1$.

II.1. Calculer la valeur de θ_2 l'angle de réfraction au point A.

II.2. En l'absence de pluie, existe-il un rayon réfracté au point B ou au point C ? Justifier.

II.3. En présence d'une goutte de pluie sur le pare-brise, existe-il un rayon réfracté au point C ? Justifier.

II.4. Expliquer pourquoi plus il y aura de gouttes sur le pare-brise, moins l'intensité lumineuse reçue par le capteur sera importante.

III. Commande à distance du verrouillage des portes d'un véhicule

Les véhicules modernes disposent de l'ouverture centralisée à partir d'une commande intégrée à la clé. Suivant la fonction que veut mettre en oeuvre l'opérateur (ouverture des portes, fermeture...), un signal est émis par la clé sous forme d'onde électromagnétique.

Rappel :

- $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} = \left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_z}$
- $\overrightarrow{\triangle}\,\overrightarrow{A} = \triangle A_x.\overrightarrow{e_x} + \triangle A_y.\overrightarrow{e_y} + \triangle A_z.\overrightarrow{e_z} = \left|\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} & \text{sur} \quad \overrightarrow{e_x} \\ \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} & \text{sur} \quad \overrightarrow{e_y} \\ \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} & \text{sur} \quad \overrightarrow{e_z} \end{array}\right.$

- $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\overrightarrow{A}) - \overrightarrow{\Delta A}$
- $c = 3.10^8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: célérité de la lumière dans le vide ou dans l'air
- $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \text{H}\cdot\text{m}^{-1}$: perméabilité du vide

III.1. Rappeler l'expression des équations de Maxwell dans un milieu non chargé, non conducteur et assimilable au vide. On précisera les unités du champ magnétique $\overrightarrow{\text{B}}$ et du champ électrique $\overrightarrow{\text{E}}$.

III.2. Déduire des équations de Maxwell l'équation de propagation vectorielle vérifiée par le champ électrique $\overrightarrow{\text{E}}$ dans un milieu non chargé, non conducteur et assimilable au vide.

On considère une onde électromagnétique pour laquelle l'expression du champ électrique est donnée en coordonnées cartésiennes par la formule : $\overrightarrow{\text{E}}(x,t) = E_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]\overrightarrow{e_z}$ où E_0 est une constante positive, ω est la pulsation de l'onde et t la variable temporelle.

III.3. À partir de l'expression de $\overrightarrow{\text{E}}$, préciser la direction et le sens de propagation de l'onde considérée.

III.4. Montrer que cette onde vérifie l'équation de propagation déterminée à la question III.2 à condition que c, ε_0 et μ_0 soient reliées par une relation que l'on déterminera.

III.5. À l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday déterminer l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{\text{B}}$ de cette onde en fonction de E_0, c, ω, x, t et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

On rappelle l'expression du vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$ associé à une onde électromagnétique $(\overrightarrow{\text{E}}, \overrightarrow{\text{B}})$:

$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{\text{E}} \wedge \overrightarrow{\text{B}}}{\mu_0}$$

III.6. Quelle est la signification physique de ce vecteur ? Quelle est son unité ?

III.7. Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$ relatif à l'onde considérée.

III.8. On note $< \overrightarrow{\Pi} >$ la valeur moyenne de $\overrightarrow{\Pi}$ au cours du temps. Exprimer $< \overrightarrow{\Pi} >$ en fonction de c, E_0, μ_0 et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

La clé émet une onde de puissance moyenne $\mathcal{P} = 50$ mW répartie uniformément dans toutes les directions de l'espace de manière sphérique.

III.9. Déterminer à $d = 10$ m la valeur de $< \|\overrightarrow{\Pi}\| >$. En déduire l'intensité du champ électrique E_0 et l'intensité du champ magnétique B_0 de l'onde.

III.10. Comment doit-on placer une antenne constituée d'un cadre conducteur rectiligne formant un carré pour détecter le champ magnétique ? Illustrer votre réponse d'un schéma.

III.11. La fréquence de l'onde émise est $f = 400$ MHz. En déduire la valeur de sa longueur d'onde.

ATS 2012

III.1. $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ $\qquad E \to V/m$

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ $\qquad B \to T$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

III.2. $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B})$

$= -\mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \vec{\Delta}\vec{E}$
$= -\Delta \vec{E}$

$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

III.3. $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)\vec{e_z}$.

Propagation suivant $x+$

III.4. $\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \qquad (E_z = E)$

$-\left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2 \cancel{E_0} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) + \mu_0 \varepsilon_0 \cancel{E_0}\, \omega^2 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) = 0$

$-\dfrac{1}{c^2} + \mu_0 \varepsilon_0 = 0$

$\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$

III.5. $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\omega}{c} E_0 \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = -\frac{1}{c} E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{u_y} + \underbrace{\vec{cte}}_{=0}$$

III.6.7. $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

$$= \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{c} E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} \frac{E_0^2}{c} \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{u_x}$$

$W.m^{-2}$

(Propagation de l'énergie.

(Puissance instantanée traversant une surface

III 8. $\langle \vec{\Pi} \rangle = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u_x}$

III 9. $\langle \vec{\Pi} \rangle = \dfrac{P}{4\pi d^2} = \dfrac{50}{4\pi \times 10^2} = 40 \ \mu W/m^2$

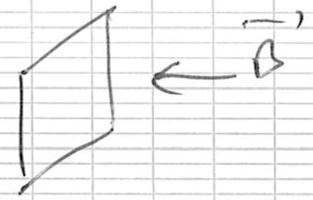
$$E_0 = \sqrt{2\mu_0 c \langle \vec{\Pi} \rangle}$$

$$= \sqrt{2 \times 4\pi . 10^{-7} \times 3.10^8 \times 40.10^{-6}}$$

$$= 0{,}17 \ V.m^{-2}$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 5{,}8.10^{-10} \ T$$

III 10



Bon flux !

III 11. $\lambda = \dfrac{c}{f} = \dfrac{3.10^8}{400.10^6} = 0{,}75 \ m$