

PREPARATION AUX ORAUX – ATS - CORRIGES

MECANIQUE ET MECANIQUE DES FLUIDES

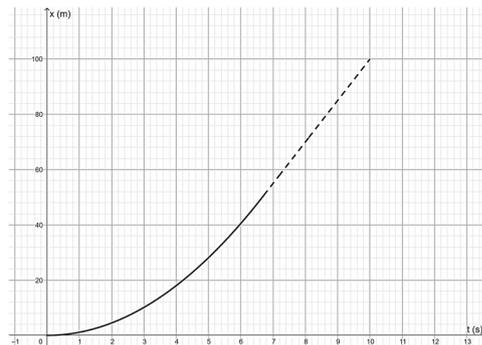
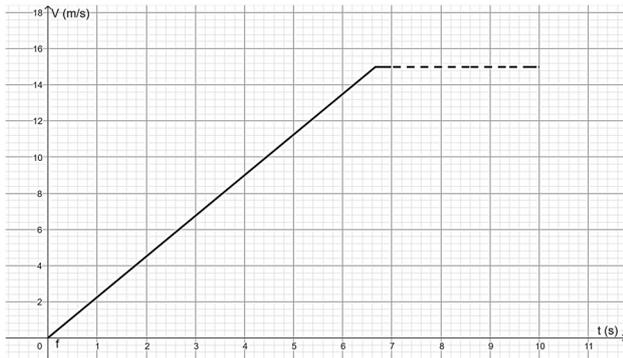
CINEMATIQUE

Exo M1 Usain Bolt

1. $x_2 = 100 \text{ m}$; $t_2 = 10 \text{ s}$; $x_1 = 50 \text{ m}$

Pour $t_0 < t < t_1$: MRUA donc $a = a_0$; $v = a_0 t$; $x = a_0 \frac{t^2}{2}$

Pour $t_1 < t < t_2$: MRU donc $a = 0$; $v = v_1$; $x = v_1(t - t_1) + x_1$



2. Vitesse maximale v_1 :

Méthode N°1 : résolution d'un système d'équation

Soit t_1 l'instant où il a parcouru $x_1 = 50 \text{ m}$ et $t_2 = 10 \text{ s}$ celui où il a parcouru $x_2 = 100 \text{ m}$.

On a alors : $v_{max} = v_1 = a_0 t_1$; $x_1 = a_0 \frac{t_1^2}{2} = v_1 \frac{t_1}{2}$ et $x_2 = v_1(t_2 - t_1) + x_1$

Soit $x_2 - x_1 = v_1(t_2 - t_1) = v_1 t_2 - v_1 t_1 = v_1 t_2 - 2x_1 \Leftrightarrow x_2 + x_1 = v_1 t_2 \Leftrightarrow v_1 = \frac{x_2 + x_1}{t_2}$

$$\text{A. N. } v_1 = \frac{100 + 50}{10} = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Méthode N°2 : résolution avec point de vue graphique

Par lecture graphique dans $v(t)$ pour $t_0 < t < t_1$: x_1 est l'aire sous la courbe : $x_1 = \frac{1}{2} v_1 t_1$

Par lecture graphique dans $v(t)$ pour $t_1 < t < t_2$: $x_2 - x_1$ est l'aire sous la courbe : $x_2 - x_1 = v_1(t_2 - t_1)$

$$x_2 - x_1 = v_1 t_2 - 2x_1 \Leftrightarrow x_2 + x_1 = v_1 t_2 \Leftrightarrow v_1 = \frac{x_2 + x_1}{t_2} = \frac{100 + 50}{10} = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

On peut aussi déterminer $t_1 = \frac{2x_1}{v_1} = \frac{100}{15} \approx 6,67 \text{ s}$ et $a_0 = \frac{v_1}{t_1} = 2,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

CHUTE LIBRE

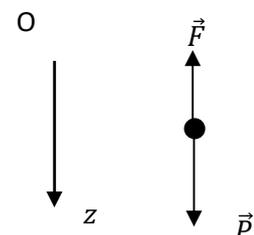
Exo M2 Parachutiste – frottement quadratique

Axe Oz vertical descendant ; Cl : $v(0) = 0$ et $z(0) = 0$

BdF : $\vec{P} = M\vec{g} = Mg\vec{u}_z$ (et $E_p = -Mgz + cte$)

PFD : $M\ddot{z} = Mg \Rightarrow \ddot{z} = g \Rightarrow \dot{z} = gt \Rightarrow z = \frac{1}{2}gt^2$

$$t = 2 \text{ s} : z = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 4 = \underline{20 \text{ m} = d_0}$$



$$\dot{z} = gt = 10 \times 2 = \underline{20 \text{ m.s}^{-1} = v_0}$$

BAME :

$$\vec{P} = M\vec{g} = Mg\vec{u}_z \text{ (et } E_p = -Mgz + cte)$$

$$\vec{F} = -kv^2 \vec{u}_z \text{ (et } P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Kv^3)$$

$$\text{PFD : } M\ddot{z} = Mg - k\dot{z}^2 \Rightarrow \ddot{z} + \frac{k}{M}\dot{z}^2 = g \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{k}{M}v^2 = g}$$

$$\text{Th Em : } E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}M\dot{z}^2 - Mgz + cte$$

$$\frac{dE_m}{dt} = M\dot{z}\ddot{z} - Mg\dot{z} \text{ or } \frac{dE_m}{dt} = P_{nc} \Rightarrow M\dot{z}\ddot{z} - Mg\dot{z} = K\dot{z}^3 \Rightarrow \ddot{z} + \frac{k}{M}\dot{z}^2 = g \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{k}{M}v^2 = g}$$

$$v_{lim} \text{ obtenue pour } \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{k}{M}v_{lim}^2 = g \Rightarrow \boxed{v_{lim} = \sqrt{\frac{Mg}{k}}}$$

$$\text{A.N. : } v_{lim} = \sqrt{100} = 10 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\vec{F} = -kv^2 \vec{u}_z \Rightarrow \vec{F}_{max} = -kv_{max} \vec{u}_z = -kv_0 \vec{u}_z$$

$$F_{max} = 200 \text{ N}$$

Méthode N°2 : Étude énergétique : adaptée si seule la vitesse est demandée pour la fin de la chute libre

Théorème de l'énergie mécanique entre le point A : position initiale du parachutiste au début de son saut et le point B : point atteint par le parachutiste après 6 secondes de chute libre

$$E_m(B) - E_m(A) = W(\vec{F}_{non\ conservative})$$

le système étant conservatif, on a $W(\vec{F}_{non\ conservative}) = 0$ soit $E_m(B) - E_m(A) = 0$

De plus, par définition de l'énergie mécanique, on a

$$E_m = E_c + E_p = E_c + E_{pp} = \frac{1}{2}mv^2 + mgz + cte$$

$$\text{D'où } E_m(A) = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgz_A + cte \stackrel{\substack{\text{vitesse} \\ \text{initiale} \\ \text{nulle}}}{=} mgz_A + cte \text{ et}$$

$$E_m(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B + cte = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_B + cte$$

$$\text{En l'exploitant } E_m(B) - E_m(A) = 0 \text{ avec } z_A - z_B = d_0 : \quad \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh = 0$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2gh}} \approx \sqrt{2 \times 10 \times 15} = \sqrt{30 \times 10} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \approx 17 \text{ m.s}^{-1}$$

Exo M3 Parachutiste – frottement fluide

Système : étudiant supposé ponctuel étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen

Repérage : axe (Oz) descendant, d'origine la position initiale de l'étudiant au début du saut.

Bilan des actions mécaniques extérieures : pour la première phase avant ouverture du parachute

$$\text{poids } \vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$$

Principe fondamental de la dynamique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} = m\vec{g}$$

En l'absence de vitesse initiale et de force autre que selon \vec{e}_z , mouvement rectiligne vertical :

$$\vec{v} = \dot{z}\vec{e}_z \text{ et } \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{z}\vec{e}_z$$

Projection sur \vec{e}_z :

$$m\ddot{z} = mg$$

Soit

$\ddot{z} = g$: Mouvement rectiligne uniformément accéléré.

En intégrant par rapport au temps, avec les conditions initiales : $v(0) = 0$ et $z(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= gt + cte \stackrel{\substack{= \\ \text{C.I.}}}{=} gt \\ z &= \frac{1}{2}gt^2 + cte \stackrel{\substack{= \\ \text{C.I.}}}{=} \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Après une chute d'une durée t_0 :

$$d_0 = \frac{1}{2}gt_0^2 = 180 \text{ m} ; \quad v_0 = gt_0 = 60 \text{ m.s}^{-1}$$

Après ouverture du parachute :

Bilan des actions mécaniques extérieures :

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z \quad (\text{et } E_p = -mgz + cte)$$

$$\vec{F} = -\lambda v \vec{u}_z \quad (\text{et } P = \vec{F} \cdot \vec{v} = -\lambda v^2)$$

Vitesse limite atteinte lorsque l'accélération devient nulle :

$$\text{PFD projeté : } m \frac{dv_{lim}}{dt} = mg - \lambda v_{lim} = 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{m} v_{lim} = g \Rightarrow \boxed{v_{lim} = \frac{mg}{\lambda}}$$

$$\text{A.N. : } v_{lim} = 100 \times \frac{10}{40} = \mathbf{25 \text{ m.s}^{-1}}$$

Force de frottement :

$$\vec{F} = -\lambda v \vec{u}_z \Rightarrow \vec{F}_{max} = -\lambda v_{max} \vec{u}_z$$

Dans le cas étudié, $v_0 > v_{lim}$: l'ouverture du parachute ralentit la chute et vient diminuer la vitesse ; la force de frottement est maximale au moment de l'ouverture.

$$\boxed{\vec{F}_{max} = -\lambda v_0 \vec{u}_z}$$

Remarque : Si le parachute est ouvert plus tôt, avec une vitesse $v'_0 < v_{lim}$, on a alors $v_{max} = v_{lim} = \frac{mg}{\lambda}$ et

$$\vec{F}_{max} = -\lambda v_{max} \vec{u}_z = -mg \vec{u}_z = -\vec{P}$$

Méthode N°1 : PFD projeté : $m \frac{dv}{dt} = mg - \lambda v \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m} v = g$

Ou encore avec le théorème de la puissance mécanique : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz + cte$

$$\frac{dE_m}{dt} = m\dot{z}\ddot{z} - mg\dot{z} \quad \text{or} \quad \frac{dE_m}{dt} = P_{nc} \Rightarrow m\dot{z}\ddot{z} - mg\dot{z} = -\lambda\dot{z}^2 \Rightarrow \ddot{z} + \frac{\lambda}{m}\dot{z} = g$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m} v = g}$$

EDL1 à coefficients constants positifs et second membre constant, soit sous forme canonique avec $\tau = \frac{m}{\lambda}$ temps caractéristique :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{lim}}{\tau}$$

Solution Générale à l'équation Homogène : $v_H(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

Solution Particulière à l'équation Complète : $v_p(t) = v_{lim}$

Solution Générale à l'équation Complète : $v(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + v_{lim}$

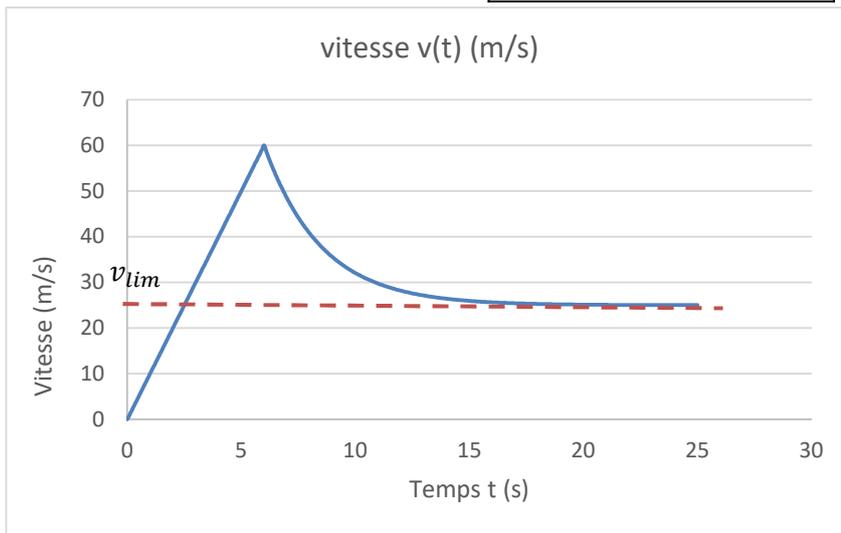
Nouvelle origine des temps, ouverture du parachute :

Constante d'intégration à l'aide des conditions initiales :

$$v(t=0) \stackrel{\substack{= \\ \text{équation} \\ \text{à } t=0}}{=} A + v_{lim} \stackrel{\substack{= \\ \text{C.I.}}}{=} v_0$$

Soit $A = v_0 - v_{lim}$

$$v = (v_0 - v_{lim})e^{-\frac{t}{\tau}} + v_{lim}$$



Exo M4 Chute libre de billes

Référentiel : terrestre, supposé galiléen

Base : cartésienne

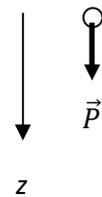
Système : bille 1

Bilan des forces : poids $\vec{P} = m\vec{g} = m g \vec{u}_z$, force conservative
telle que $E_p = -m g z + cte$

Conservation de l'énergie mécanique : $E_m(t=0) = E_m(t_f)$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - m g z_0 + cte = \frac{1}{2} m v_f^2 - m g z_f + cte \quad \text{avec } z_0 = 0, \quad z_f = h, \quad v_0 = 0$$

$$v_f = \sqrt{2 g h}$$



Système : bille 2

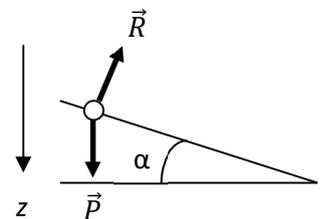
Bilan des forces : poids $\vec{P} = m\vec{g} = m g \vec{u}_z$, force conservative
telle que $E_p = -m g z + cte$

réaction du sol : $\vec{R} = R \vec{u}_y$, ne travaille pas

Conservation de l'énergie mécanique : $E_m(t=0) = E_m(t_f)$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - m g z_0 + cte = \frac{1}{2} m v_f^2 - m g z_f + cte \quad \text{avec } z_0 = 0, \quad z_f = h, \quad v_0 = 0$$

$$v_f = \sqrt{2 g h}$$



La bille arrive avec la même vitesse au sol.

Vitesses identiques car que poids conservatif dont le travail est indépendant du chemin suivi et réaction ne travaillant pas.

Frottement fluide négligé dans les 2 cas. Dans le cas du plan incliné, il y a nécessairement des frottements solides. Par ailleurs, il faut prendre en compte le fait que la bille n'est pas ponctuelle mais perd de l'énergie cinétique liée au roulement sur elle-même tel que $E_c = \frac{1}{2} J \omega^2$

$v_2 < v_1$: La boule qui roule ne peut être assimilée à un point matériel, elle possède une énergie cinétique de rotation.

Exo MK34 : jonglage (1 fois, 2021)

Les deux balles sont en MRUA avec $a_1 = a_2 = -g$ si on prend un axe vertical ascendant avec origine au sol.

Seules les conditions initiales sont différentes, soit la balle 1 qui est tout en haut : $v_{10} = 0$ et $z_{10} = h$ et soit la balle 2 qui est lancée : $v_{20} = v_0$ et $z_{20} = 0$

On a donc : $v_1 = -gt$; $z_1 = -g\frac{t^2}{2} + h$ et $v_2 = -gt + v_0$; $z_2 = -g\frac{t^2}{2} + v_0t$

Les balles se croisent pour t_c tel que $z_1(t_c) = z_2(t_c) \Rightarrow h = v_0t_c \Leftrightarrow t_c = \frac{h}{v_0}$

OSCILLATIONS DE PENDULES

Exo M5 Vitesse maximale d'un pendule simple (2 fois)

TEM : $v_{max} = \sqrt{2g\ell(1 - \cos \theta_m)}$

Version 2

Faire un schéma en faisant apparaître les données du problème. Il faut choisir un angle θ quelconque et orienter l'axe vertical.

1) Système étudié : bille considérée comme un point M.

1^{ère} méthode : méthode énergétique

Bilan des forces d'exerçant sur le système :

Poids, associé à l'énergie potentielle de pesanteur E_p

Tension du fil, qui ne travaille pas (toujours perpendiculaire au déplacement).

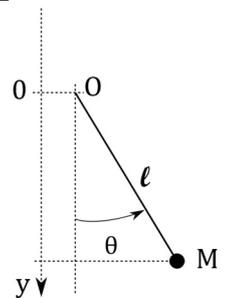
On néglige tout frottement avec l'air

Le système est donc conservatif.

Energie potentielle de pesanteur (axe Oy vertical DESCENDANT, origine de l'énergie potentielle en O (choix arbitraire)) :

$$E_p = -mgy$$

ici, y est positif ; selon le schéma définissant l'angle θ , on a : $y = +\ell \cos \theta$



Penser à vérifier la cohérence de l'expression établie à l'aide de cas particuliers tels que $\theta = 0$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$!

D'où, avec l'origine choisie : $E_p = -mg\ell \cos \theta$

D'après le théorème de l'énergie mécanique appliqué au système conservatif dans le référentiel terrestre supposé galiléen,

$E_m = cte$.

Energie mécanique initiale : $E_{m_0} = E_{c_0} + E_{p_0} = \frac{1}{2}mv_0^2 - mg\ell \cos \theta_0 \stackrel{\substack{v \text{ initiale} \\ \text{nulle}}}{=} -mg\ell \cos \theta_0$

Energie mécanique en un point quelconque caractérisé par l'angle θ : $E_m = E_c + E_p$;

le point M décrivant une trajectoire circulaire de rayon l , sa vitesse est $v = l\dot{\theta}$, et donc son énergie cinétique

$$: E_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

soit finalement $E_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta = \frac{1}{2}mv^2 - mg\ell \cos \theta$

On a montré que $E_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta + cte = cte$

On a donc d'après le théorème de la puissance mécanique, en l'absence de toute force non conservative :

$$\frac{dEm}{dt} = 0 = m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta} \sin \theta$$

Attention au calcul de la dérivée !!! il s'agit d'une dérivée par rapport au temps, avec $f(t) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 = f(\theta(t))$, soit la dérivée d'une fonction composée.

On a alors $f'(t) = \frac{df}{dt} = \frac{df}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{df}{d\theta}$

$$m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta} \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \ell^2\ddot{\theta} + gl \sin \theta = 0 \end{cases}$$

La solution $\dot{\theta} = 0$ correspond à une vitesse toujours nulle, donc un système arrêté, ce qui n'a pas d'intérêt pour l'étude du mouvement.

L'équation différentielle du mouvement est donc : $\ell^2\ddot{\theta} + gl \sin \theta = 0 \Leftrightarrow$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

Pour de petites oscillations, approximation des petits angles : $\sin \theta \approx \theta$ soit $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$

2^{ème} méthode : principe fondamental de la dynamique (PFD)

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

En coordonnées polaires (Attention ! expression de l'accélération en coordonnées polaires est hors programme en ATS !) :

$$\vec{a} = -\ell \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + \ell \ddot{\theta} \vec{u}_\theta ; \quad \vec{P} = mg(\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta) ; \quad \vec{T} = -T\vec{u}_r$$

Projection du PFD sur \vec{u}_θ : $m\ell \ddot{\theta} = -mg \sin \theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$

2) Conservation de l'énergie mécanique : $Em_0 = Em = Em(v_{max}) \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mgl \cos \theta_0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgl \cos \theta = \frac{1}{2}mv_{max}^2 + Ep_{min}$$

La vitesse maximale correspondant à l'énergie cinétique maximale, et l'énergie mécanique étant constante, elle est atteinte pour une énergie potentielle $E_p = -mgl \cos \theta$ minimale, soit $E_{p,min} = -mgl$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mgl \cos \theta_0 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 + Ep_{min} \Leftrightarrow -mgl \cos \theta_0 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 - mgl$$

D'où $v_{max}^2 = 2g\ell(1 - \cos \theta_0)$ soit $v_{max} = \sqrt{2g\ell(1 - \cos \theta_0)}$

Remarque : on peut aussi déterminer l'angle maximal (ou la hauteur maximale) atteint(e) :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mgl \cos \theta_0 \stackrel{\substack{= \\ v \text{ nulle} \\ \text{quand } \theta_{max} \\ \text{atteint}}}{=} -mgl \cos \theta_{max}$$

Ou encore la vitesse pour un angle quelconque connaissant les conditions initiales : $v = \sqrt{v_0^2 + 2gl(\cos \theta - \cos \theta_0)}$.

Equation différentielle d'un oscillateur harmonique non amorti de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$, et donc de

période $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$

Comme pour toute relation ou calcul un peu complexe, il faut soigneusement vérifier la cohérence du résultat obtenu, via l'homogénéité, l'étude des signes et des cas limites.

Ici, on a bien $[gl] = [v^2]$; en prenant $\theta = \theta_0$, on retrouve $v = v_0$. Pour $\theta > \theta_0$, $\cos \theta < \cos \theta_0$, soit $v < v_0$, et réciproquement.

L'ensemble est donc bien cohérent.

Caractéristiques d'un pendule simple (1 fois)

Bilan des forces : poids, tension du fil (ne travaille pas)

$$E_p = -mg\ell \cos \theta \text{ (origine en O)}$$

$$E_m = -mg\ell \cos \theta + \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\theta}^2 \quad \text{IMPORTANT : vitesse} = |\ell \dot{\theta}|$$

$$\text{th de l'énergie mécanique} \Rightarrow mg\ell \sin \theta \dot{\theta} + m\ell^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow L\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$$

$$\text{Petites oscillations :} \Rightarrow L\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

Equa. diff d'oscillateur harmonique non amorti sous forme canonique : pulsation propre d'où : $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$

Exo M6 Punching ball (2023)

1) Le système est soumis à deux interactions conservatives, la liaison élastique et la pesanteur, donc

$$E_{p \text{ tot}} = E_{pL} + E_{pp}$$

On choisit l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur en $z = 0$.

$$E_{p \text{ tot}} = \frac{1}{2} K\theta^2 + mgz$$

Par projection pour se ramener à une unique variable : $z = mg\ell \cos \theta$

$$E_{p \text{ tot}}(\theta) = \frac{1}{2} K\theta^2 + mg\ell \cos \theta$$

2) La position $\theta_{\text{éq}} = 0$ est position d'équilibre stable si $E_{p \text{ tot}}(\theta)$ présente un minimum en $\theta = 0$.

3) Le système présente deux positions d'équilibre stable (symétriques par rapport à la verticale) et la position $\theta_{\text{éq}} = 0$ est ici une position d'équilibre instable.

Calculs

$$\frac{dE_{p \text{ tot}}}{d\theta} = K\theta - mg\ell \sin \theta$$

$$\frac{d^2 E_{p \text{ tot}}}{d\theta^2} = K - mg\ell \cos \theta$$

On constate que $\theta = 0$ est toujours position d'équilibre puisque $\frac{dE_{p \text{ tot}}}{d\theta} = 0$ en $\theta = 0$, quelle que soit la valeur de K .

Par contre, la stabilité dépend de K :

$$\left(\frac{d^2 E_{p \text{ tot}}}{d\theta^2} \right)_{\theta=0} = K - mg\ell$$

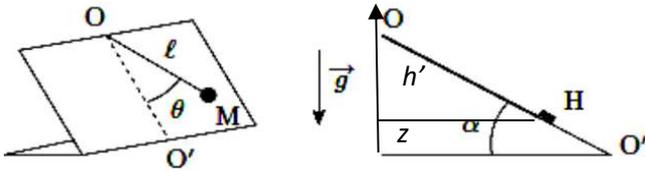
L'équilibre est stable si $\left(\frac{d^2 E_{p \text{ tot}}}{d\theta^2} \right)_{\theta=0} > 0$, donc si $K > mg\ell$

L'équilibre est instable si $\left(\frac{d^2 E_{p \text{ tot}}}{d\theta^2} \right)_{\theta=0} < 0$, donc si $K < mg\ell$

Exo M7 Pendule sur un plan incliné

Pendule sur un plan incliné (7 fois ; 2018)

BdF : poids, réaction du support et force de rappel du ressort



Une force est conservative si elle dérive d'une énergie potentielle :

à 1 dimension $F^C = -\frac{dE_p}{dx}$ ou $\vec{F}^C = -\text{grad}E_p$

Le poids est une force conservative : $P = -mg = -\frac{dE_p}{dz} \Rightarrow E_p = mgz + Cte.$

H, projeté de M sur (OO') $\frac{h'}{OH} = \sin \alpha \Rightarrow h' = OH \cdot \sin \alpha$ et $h_{max} = OO' \cdot \sin \alpha = l \sin \alpha$
 $z = h_{max} - h' = \sin \alpha (l - OH)$ et $OH = l \cos \theta$ d'où : $z = \sin \alpha (l - l \cos \theta)$

$$E_p = mg\ell \sin \alpha (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{dE_p}{d\theta} = mg\ell \sin \alpha \sin \theta ; \frac{dE_p}{d\theta} = 0 \Rightarrow \theta = 0[\pi] ; \text{stable en } \theta = 0 ; \text{instable en } \theta = \pi$$

$$E_c = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\theta}^2 \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta \sin \alpha \quad \underbrace{\quad}_{\text{système conservatif}} = Cte$$

TPM : $\frac{dE_m}{dt} \underbrace{\quad}_{\text{système conservatif}} = 0$ avec $\frac{dE_p}{dt} = +mg\ell \sin \alpha \dot{\theta} \sin \theta$ et $\frac{dE_c}{dt} = m\ell^2 \dot{\theta} \ddot{\theta}$ soit

$$\ddot{\theta} + \frac{g \sin \alpha}{\ell} \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g \sin \alpha}}$$

Remarque : Si l'énoncé n'impose pas une origine au niveau de la position d'équilibre du pendule, le paramétrage le plus simple consiste à choisir l'origine au niveau du point d'accroche du pendule, avec un axe (Oz) vertical descendant

On a alors $z = OH \sin \alpha = \ell \cos \theta \sin \alpha$

$$E_{pp} = -mgz + cte = -mg\ell \cos \theta \sin \alpha + cte$$

$$\frac{dE_p}{dt} = +mg\ell \sin \alpha \dot{\theta} \sin \theta$$

Les autres calculs et résultats sont ensuite similaires quel que soit le paramétrage.

Exo M8 Pendule buttant contre un clou (12 fois, 2022)

Système : la masse

Référentiel : terrestre, supposé galiléen

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- poids $\vec{P} = m\vec{g}$, dérivant de l'énergie potentielle de pesanteur,
- tension du fil \vec{T}

La tension du fil ne travaille pas car elle est toujours perpendiculaire au déplacement le système est donc conservatif.

Théorème de l'énergie mécanique au système conservatif entre le point A = 1 et le point 2 :

$$E_m(2) - E_m(1) = W(\vec{F}_{non\ conservative}) = 0 \text{ soit } E_m(2) - E_m(1) = 0$$

Soit z , l'axe vertical ascendant, d'origine le point le plus bas (point 2).

Energie potentielle de pesanteur :

$$E_p = mgz + cte$$

En choisissant le point le plus bas comme origine des potentiels : soit $E_p(z = 0) = 0 + cte = 0$, d'où $cte = 0$

$$E_p = mgz$$

à $t = 0$ (point A) :

$$E_p = mgz + cte = mgz = mgl(1 - \cos \theta_0)$$

Au point 2 : $E_p = 0$ et au point 1 : vitesse initiale nulle

Entre le point 1 et le point 2, l'énergie mécanique se conservant :

$$\begin{aligned} E_m(1) &= E_m(2) \\ E_{c1} + E_{p1} &= E_{c2} + E_{p2} \\ mgl(1 - \cos \theta_0) &= \frac{1}{2} m v_2^2 \\ v_2 &= \sqrt{2gl(1 - \cos \theta_0)} \end{aligned}$$

Au point 3, $E_p = mgz = mg(l - h)(1 - \cos \alpha)$

Entre le point 2 et le point 3, l'énergie mécanique se conserve à nouveau, le système restant conservatif.

En 3, $v_3 = 0$.

$$\begin{aligned} E_m(2) &= E_m(3) \\ E_{c2} + E_{p2} &= E_{c3} + E_{p3} \\ \frac{1}{2} m v_2^2 &= mg(l - h)(1 - \cos \alpha) \\ \frac{1}{2} m 2gl(1 - \cos \theta_0) &= mg(l - h)(1 - \cos \alpha) \\ \cos \alpha &= 1 - \frac{l}{(l - h)}(1 - \cos \theta_0) \end{aligned}$$

■ RESSORTS

Exo M9 Ressort horizontal (2 fois ; 2013)

Exo M10 Ressort horizontal - bis

Exo M11 Raideur d'un amortisseur (4 fois, 2023)

Sans le cric, ressort comprimé par le poids de la voiture, longueur du ressort = longueur à l'équilibre avec le cric : longueur à vide du ressort.

Système : Masse m venant comprimer l'amortisseur de la voiture modélisé par un ressort vertical de raideur k

La masse de la voiture étant répartie sur les 4 roues, on a $m = \frac{m_{voiture}}{4} = 250 \text{ kg}$.

Bilan des actions mécaniques extérieures : poids, force de rappel élastique

PFd à l'équilibre : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{T}$

Projection sur la direction verticale :

$$\ell_{\text{éq}} = \ell_0 - \frac{mg}{k}$$

d'où

$$k = \frac{mg}{\ell_{\text{éq}} - \ell_0}$$

$$k = \frac{10^3 \times 10}{4 \cdot 10^{-1}} = 2,5 \cdot 10^4 \text{ N/m ou } 2,5 \cdot 10^4 \text{ kg/s}^2$$

Exo M12 Ressort vertical sans puis avec frottement fluide

Exo M13 Ressort vertical avec frottement fluide

1. $z_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$

2. Sans frottement :

Système masse, BAME : pesanteur et force de rappel élastique ; cinématique : mouvement vertical selon l'axe (Oz) = mouvement rectiligne, on a donc $a = \ddot{z}$

par projection du PFD sur l'axe vertical, puis en mettant l'équation différentielle sous forme canonique (oscillateur harmonique non amorti) :

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}\ell_0 + g$$

Solution

$$z(t) = z_{\text{éq}} + h \cos(\omega_0 t), \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3. Avec frottement

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}\ell_0 + g$$

Solution si frottement faible : mouvement de type pseudopériodique (discriminant de l'équation caractéristique négatif)

$$z(t) = z_{\text{éq}} + h \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \left(\cos(\Omega t) + \frac{\omega_0}{2Q\Omega} \sin(\Omega t)\right) \text{ avec } \Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \text{ et } Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$$

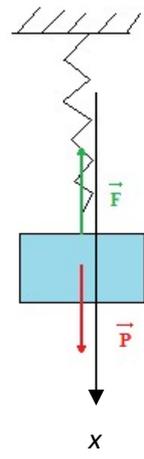
autres cas...

α grand : régime apériodique, pas d'oscillations.

autres cas...

α grand : régime apériodique, pas d'oscillations.

Version 2



Système : point M, de masse m constante

Référentiel : du labo, considéré galiléen

Cordonnées : cartésiennes avec $\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$

Bilan des forces :

Poids $\vec{P} = m \vec{g}$

Force de rappel du ressort : $\vec{F}_k = -k(l_e - l_0)\vec{u}_x = -k(x - l_0)\vec{u}_x$

Force de frottement : $\vec{F}_v = -\lambda \vec{v} = -\lambda \dot{x} \vec{u}_x$

Condition sur l'équilibre ($\vec{F}_v = \vec{0}$) :

On applique le principe fondamental de la dynamique au système de masse

constante dans le référentiel du labo, galiléen : $m\vec{a} = \sum \vec{F}$

A l'équilibre, $\vec{a} = \vec{0}$ et $\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{F}_k = \vec{0}$

On pose : $l_{eq} = x_{eq}$. Projection sur \vec{u}_x :

$$mg - k(x_{eq} - l_0) = 0 \Rightarrow x_{eq} = \frac{mg}{k} + l_0$$

Equation du mouvement :

On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse : $m\vec{a} = \sum \vec{F}$

$$\vec{P} + \vec{F}_k + \vec{F}_v = m\vec{a}$$

On projette sur \vec{u}_x :

$$mg - k(x - l_0) - \lambda \dot{x} = m \ddot{x}$$

On remplace l_0 par $x_{eq} - \frac{mg}{k}$: $mg - k(x - x_{eq} + \frac{mg}{k}) - \lambda \dot{x} = m \ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} (x - x_{eq}) = 0$$

On pose $X = x - x_{eq}$: $\ddot{X} + \frac{\lambda}{m} \dot{X} + \frac{k}{m} X = 0$

De la forme : $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\omega_0 m}{\lambda} = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$

Pour que le système oscille : régime pseudo-périodique pour $\Delta < 0$

Equation caractéristique : $x^2 + \frac{\omega_0}{Q} x + \omega_0^2 = 0$

Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 (1 - 4Q^2)$

Le système oscille si les solutions de l'équation caractéristique sont complexes :

$\Delta < 0 \Rightarrow Q > \frac{1}{2}$ donc $\frac{\sqrt{km}}{\lambda} > 1/2$ d'où $k > \frac{\lambda^2}{4m}$

$\Rightarrow r_1$ et $r_2 \in \mathbb{C}$ avec $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$

Solution des oscillations amorties :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = -\frac{\omega_0}{2Q}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \omega_p \text{ pseudo-pulsation}$$

$$X = e^{\alpha t} (A \sin \beta t + B \cos \beta t) = e^{\alpha t} (C \sin(\beta t + \varphi))$$

$$X = e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} (A \sin \omega_p t + B \cos \omega_p t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} (C \sin(\omega_p t + \varphi))$$

donc $x(t) = x_{eq} + e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} (C \sin(\omega_p t + \varphi))$

+ allure de $x(t)$.

Exo M14 Ressort vertical et Sphère plongée dans un liquide

$$\eta = \frac{2m}{3r} \sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}}$$

Version 2 (4 fois, 2017)

$$l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k};$$

$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0$ en choisissant l'origine de l'axe descendant au niveau de la position d'équilibre ;

oscillations si $\mu < 2\sqrt{km}$

Exo M15 Anneau au bout d'un ressort sur tige inclinée (1 fois, 2022)

1. $x_{eq} = l_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k}$.

2. $\ddot{x} + \frac{k}{m}(x - x_{eq}) = 0$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

3. $x(t) = (x_1 - x_{eq}) \cos \omega_0 t + x_{eq}$

Exo M16 Ressort comprimé (7 fois, 2022)

1. Système : point M. BAME : pesantier, avec axe (Oz) vertical ascendant d'origine le point O en bas de la pente, origine de l'Epp : $E_{pp} = mgz$

Soit (Ox) l'axe ascendant suivant la pente, de même origine O que l'axe (Oz)

On a donc $z = x \sin(\alpha)$ et $E_{pp} = mgx \sin(\alpha)$

Théorème de l'énergie mécanique entre le point I : position initiale et le point A : impact avec le ressort qui est alors à sa longueur à vide l_0

$$E_{mI} = E_{mA} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 + mgl_0 \sin(\alpha) = 0 + mg(D + l_0) \sin \alpha \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 = mgD \sin \alpha \Rightarrow v_A = \sqrt{2gD \sin \alpha}$$

2. **Méthode N°1** : Soit B point où le ressort est comprimé au maximum (point du demi-tour) :

BAME : pesantier : $E_{pp} = mgz$

Energie potentielle élastique : $E_{pe} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$

Théorème de l'énergie mécanique entre le point O et le point B en supposant qu'il n'y a pas de dissipation d'énergie lors de l'impact :

$$\begin{aligned} E_{mO} = E_{mB} &\Rightarrow \frac{1}{2}k(l_c - l_0)^2 + mgl_c \sin \alpha = mg(l_0 + D) \sin \alpha \\ (l_c - l_0)^2 &= \frac{2mg}{k} \sin \alpha (l_0 + D) - \frac{2mgl_c}{k} \sin \alpha = l_c^2 - 2l_0 l_c + l_0^2 \\ l_c^2 + 2\left(\frac{mg}{k} \sin \alpha - l_0\right) l_c + l_0^2 - \frac{2mg}{k} \sin \alpha (l_0 + D) &= 0 \end{aligned}$$

Remarque : PFD à l'équilibre projeté sur (Ox) : $-mg \sin \alpha - k(l_{eq} - l_0) = 0$, soit $l_{eq} = l_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k}$

On peut également poser $x_i = l_0 + D$

$$l_c^2 - 2l_{eq} l_c + l_0^2 - 2(l_{eq} - l_0)x_i = 0$$

Soit en posant $L^2 = l_0^2 - 2(l_{eq} - l_0)x_i = l_0^2 - 2(l_{eq} - l_0)(l_0 + D) = l_0^2 - (2l_{eq}l_0$

$$l_c^2 - 2l_{eq} l_c + L^2 = 0$$

$$l_c = \frac{2l_{\text{éq}} \pm \sqrt{4l_{\text{éq}}^2 - 4L^2}}{2} = l_{\text{éq}} \pm \sqrt{l_{\text{éq}}^2 - L^2}$$

Or l_c étant la distance minimale : $l_c = l_{\text{éq}} - \sqrt{l_{\text{éq}}^2 - L^2} = l_{\text{éq}} - \sqrt{\left(l_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k}\right)^2 - l_0^2 - 2 \frac{mg \sin \alpha}{k} (l_0 + D)}$

$$l_c = l_{\text{éq}} - \sqrt{\left(\frac{mg \sin \alpha}{k}\right)^2 + 2 \frac{mg \sin \alpha}{k} D} = l_{\text{éq}} - \sqrt{(l_0 - l_{\text{éq}})(l_0 - l_{\text{éq}} + 2D)}$$

$$l_c = l_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k} - \sqrt{\frac{mg \sin \alpha}{k} \left(\frac{mg \sin \alpha}{k} + 2D\right)}$$

Méthode N°2 : PFD à l'équilibre projeté sur (Ox) : $mg \sin \alpha - k(x_{\text{eq}} - l_0) = 0$ soit $x_{\text{eq}} = l_{\text{éq}} = l_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k}$

PFD projeté sur (Ox) : $mg \sin \alpha - k(x - l_0) = m\ddot{x}$

d'où $m\ddot{x} + k(x - x_{\text{eq}}) = 0 \Rightarrow \ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$ avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $X = x - x_{\text{eq}}$

$$X = x - x_{\text{eq}} = X_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{X} = \dot{x} = -\omega X_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$X(t)$ sera minimum pour $\cos(\omega t + \varphi) = -1$ et donc $X_{\text{mini}} = l_c - x_{\text{eq}} = -X_m \Rightarrow$

$$l_c = x_{\text{eq}} - X_m = l_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k} - X_m$$

C.I. : en prenant comme instant $t = 0$ le moment du premier impact au point A, avec $x(t = 0) = l_0$ et

$$\dot{x}(t = 0) = v_A = \sqrt{2gD \sin \alpha}$$

$$l_0 - x_{\text{eq}} = X_m \cdot \cos(\varphi)$$

$$v_A = -\omega X_m \cdot \sin(\varphi)$$

$$X_m^2 (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = X_m^2 = (l_0 - x_{\text{eq}})^2 + \left(\frac{v_A}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{mg \sin \alpha}{k}\right)^2 + \frac{2mgD \sin \alpha}{k}$$

$$l_c = x_{\text{eq}} - X_m = l_{\text{éq}} - \sqrt{(l_0 - l_{\text{éq}})^2 + 2(l_0 - l_{\text{éq}})D} = l_{\text{éq}} - \sqrt{(l_0 - l_{\text{éq}})(l_0 - l_{\text{éq}} + 2D)}$$

$$l_c = l_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k} - \sqrt{\left(l_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k}\right)^2 + \frac{2mgD \sin \alpha}{k}}$$

Exo M17 Flipper (2018)

1. $E_m = cte = \frac{1}{2} k (\Delta l_1)^2 = mgL \sin \alpha \Rightarrow$

$$\Delta l_1 = \sqrt{\frac{2mgL \sin \alpha}{k}} = \sqrt{\frac{2 \times 8 \cdot 10^{-2} \times 10 \times 1,6 \times 0,2}{320}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 10^{-2} \times 3,2}{3,2 \cdot 10^2}} = \sqrt{16 \cdot 10^{-4}} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$= 4 \text{ cm}$$

2. $\Delta l_2 = \Delta l_1 / 4 \Rightarrow E_{m2} = \frac{E_{m1}}{16} \Rightarrow$ la bille monte seulement à 10 cm.

$$E_m = cte = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} k (\Delta l_2)^2$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Delta l_2 = \sqrt{\frac{320}{8 \cdot 10^{-2}}} \times 4 \cdot 10^{-2} = \sqrt{40 \cdot 10^2} \times 4 \cdot 10^{-2} = 2\sqrt{10} \times 0,4 \approx 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Flipper bis (2018)

Exo M18 Ressort sur plan incliné

$\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg \sin \alpha}{k}$; ℓ_{min} et ℓ_{max} solutions de $\frac{1}{2} k(\ell - \ell_0)^2 - mg\ell \sin \alpha = \frac{1}{2} k(\ell_i - \ell_0)^2 - mg\ell_i \sin \alpha + \frac{1}{2} m v_i^2$;

pour $v_i = 0$, on obtient ℓ_i et $2\ell_0 + 2 \frac{mg \sin \alpha}{k} = \ell_i$.

Ressort sur plan incliné – bis (2 fois, 2008)

Exo M19 Molécule de dioxyde de carbone (5 fois ; 2021)

Système : atome de carbone supposé ponctuel

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Tensions exercées par chacun des ressorts
- Poids

Le mouvement étant horizontal, l'énergie potentielle de pesanteur est constante, que l'on pourra choisir nulle.

$$E_p = \frac{1}{2} k_1(\ell_1 - \ell_{01})^2 + \frac{1}{2} k_2(\ell_2 - \ell_{02})^2$$

Avec $\ell_1 = \ell_{01} + x$ et $\ell_2 = \ell_{02} - x$, et $k_1 = k_2 = k$:

$$E_p = \frac{1}{2} k [(\ell_1 - \ell_{01})^2 + (\ell_2 - \ell_{02})^2] = \frac{1}{2} k [x^2 + (-x)^2] = k x^2$$

$$E_m = E_p + E_c = k x^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

Conservation de E_m (théorème de l'énergie mécanique en l'absence de travail de forces non conservatives) entre l'état initial et l'état correspondant à l'amplitude maximale, associé à une vitesse nulle

$$k x_{max}^2 = k x_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$x_{max} = \sqrt{x_0^2 + \frac{m v_0^2}{2k}}$$

Exo M20 Deux ressorts horizontaux (1 fois, 2017)

$$E_p = \frac{1}{2} k_1(\ell_1 - \ell_{01})^2 + \frac{1}{2} k_2(\ell_2 - \ell_{02})^2 = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) x^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) x^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

Conservation de E_m

$$\frac{1}{2} (k_1 + k_2) x_{max}^2 = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) x_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$x_{max} = \sqrt{x_0^2 + \frac{m v_0^2}{k_1 + k_2}}$$

Exo M21 Deux ressorts verticaux (3 fois, 2010)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

Deux ressorts verticaux – bis (2008)

$$L_{1,2} = a \pm \frac{mg}{2k}; T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k \left(1 - \frac{l_0}{a}\right)}}$$

Exo M22 Equation différentielle (2014)

Exo M23 Régime critique

OSCILLATIONS FORCÉES

Exo M24 Résonance

$$Z_m = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega\mu}{m}\right)^2}}$$

BONUS : évolution avec ω ? résonance ?

Système : masse m

Référentiel : du labo, considéré galiléen

Bilan des forces :

$$\text{Poids } \vec{P} = m \vec{g} = +mg\vec{u}_x$$

Force de rappel du ressort : $\vec{F}_k = -k(l - l_0)\vec{u}_x = -k(x + l_{eq} - l_0)\vec{u}_x = -kl_e\vec{u}_x$ avec $l_e = l - l_0$,
 élongation du ressort

$$\text{Force de frottement : } \vec{F}_v = -\lambda\vec{v}$$

$$\text{Poussée d'Archimède : } \vec{\Pi} = -\rho_{liq}V\vec{g}$$

$$\text{Force : } \vec{F} = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$$

Condition sur l'équilibre ($\vec{F} = \vec{0}$ et $\vec{F}_v = \vec{0}$) :

On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse : $m\vec{a} = \sum \vec{F}$

A l'équilibre, $\vec{a} = \vec{0}$: $\vec{P} + \vec{F}_k + \vec{\Pi} = \vec{0}$ et $x = 0$.

Projection sur \vec{u}_x :

$$mg - k(l_{eq} - l_0) - \rho_{liq}Vg = 0 \Rightarrow l_{eq} = \frac{mg}{k} - \frac{\rho_{liq}Vg}{k} + l_0$$

Equation différentielle du système :

On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse : $m\vec{a} = \sum \vec{F}$

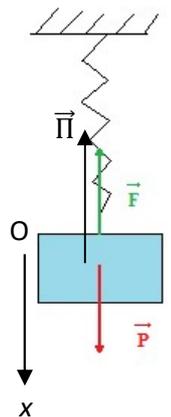
$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{F}_k + \vec{F}_v + \vec{F} = m\vec{a}$$

On projette sur \vec{u}_x :

$$\begin{aligned} mg - \rho_{liq}Vg - k(x + l_{eq} - l_0) - \lambda \dot{x} + F_0 \cos(\omega t) &= m \ddot{x} \\ mg - \rho_{liq}Vg - k \left(x + \frac{mg}{k} - \frac{\rho_{liq}Vg}{k} \right) - \lambda \dot{x} + F_0 \cos(\omega t) &= m \ddot{x} \\ \ddot{x} + \frac{\lambda}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x &= \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

De la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m}$$



Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\omega_0 m}{\lambda} = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$

Résolution de cette équation différentielle

On s'intéresse au régime forcé (solution particulière de l'équation différentielle) puisque la solution générale de l'équation homogène associée tend vers 0.

$x(t)$ est de la même forme que le régime forcé, donc $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

Résolution par la méthode des complexes :

$$\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{X}_m e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{X}_m = X_m e^{j\varphi} \text{ et } \underline{f}(t) = F_0 e^{j\omega t}$$

$$\text{Alors : } \dot{\underline{x}} = j\omega \underline{X}_m e^{j\omega t} = j\omega \underline{x} \text{ et } \ddot{\underline{x}} = j^2 \omega^2 \underline{X}_m e^{j\omega t} = -\omega^2 \underline{x}$$

Détermination de l'amplitude complexe :

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x &= \frac{f(t)}{m} \Leftrightarrow \underline{\ddot{x}} + \frac{\omega_0}{Q} \underline{\dot{x}} + \omega_0^2 \underline{x} = \frac{\underline{f}(t)}{m} \\ \Leftrightarrow -\omega^2 \underline{x} + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} &= \frac{F}{m} e^{j\omega t} \Leftrightarrow \left(-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right) \underline{x} = \frac{F}{m} e^{j\omega t} \\ \Leftrightarrow \underline{X}_m e^{j\omega t} &= \frac{\frac{F}{m}}{-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2} e^{j\omega t} \Leftrightarrow \underline{X}_m = \frac{\frac{F}{m}}{-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \end{aligned}$$

On multiplie par $\frac{1}{\omega_0^2}$ en haut et en bas :

$$\underline{X}_m = \frac{\frac{F}{m\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

Module : $|\underline{X}_m| = X_m$

$$|\underline{X}_m| = X_m = \frac{\frac{F}{m\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}} = \frac{A}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}} \text{ avec } u = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Phase :

$$\varphi = -\arg\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)$$

Résonance en amplitude :

Il existe une résonance en amplitude si l'amplitude X_m passe par un maximum pour une certaine valeur de $u_r = \frac{\omega_r}{\omega_0}$ avec ω_r : pulsation de résonance.

X_m est maximum si $\sqrt{(1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}$ est minimum, c'est-à-dire si $g(u) = (1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}$ est minimum.

$$\begin{aligned} \frac{dg}{du} &= 2(1 - u^2)(-2u) + \frac{2u}{Q^2} = 0 \Leftrightarrow 2u \left(-2(1 - u^2) + \frac{1}{Q^2}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow u &= 0 \text{ ou } -2(1 - u^2) + \frac{1}{Q^2} = 0 \end{aligned}$$

On examine le 2^{ème} terme :

$$-2(1 - u^2) + \frac{1}{Q^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - u^2 = \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow u^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow u = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Cette solution ne donne des valeurs réelles que pour

$$1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow 1 < 2Q^2 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,71$$

Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a 2 solutions possibles : $\omega = 0$ ou $\omega = \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$, avec :

$$X_m(0) = A$$

$$X_m(\omega_r) = \frac{A}{\sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)\right)^2 + \frac{1 - \frac{1}{2Q^2}}{Q^2}}} = \frac{A}{\sqrt{\left(\frac{1}{2Q^2}\right)^2 + \frac{1 - \frac{1}{2Q^2}}{Q^2}}} = \frac{A Q}{\sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1 - \frac{1}{2Q^2}}} = \frac{A Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} > A$$

Questions : sur la résonance, les différents types d'amortissements, poussée d'Archimède et d'autres questions de cours pour combler les 5 ou 6 minutes restantes

Exo M25 Oscillations forcées et résonance (MA 2010)

Exo M26 Oscillateur sans résonance ¶ (1 fois, 2009)

On définit $X = x - \ell_0$

$$m\ddot{X} + kX = 0 ; m\ddot{X} + \lambda\dot{X} + kX = 0 ; m\ddot{X} + \lambda\dot{X} + kX = K \cos(\omega t) ;$$

$$\text{amplitude } A \text{ des oscillations forcées} = A = \frac{K}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\omega\lambda)^2}}$$

¶ Pas de résonance si $2km < \lambda^2$

DYNAMIQUE

Exo M27 Soufflerie (2010)

$$[k] = kg \cdot m^{-3}$$

$$\text{PFS donne : } \tan \alpha \sim \alpha = \frac{f}{mg} = \frac{k\pi a^2 v^2}{mg} \Rightarrow k = \frac{mg \tan \alpha}{\pi a^2 v^2} = \frac{4\rho a g \alpha}{3v^2} = 0,25 kg \cdot m^{-3}.$$

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{k\pi a^2}} = \sqrt{\frac{4\rho a g}{3k}} = \sqrt{\frac{v_0^2}{\tan \theta}} = 77 m \cdot s^{-1} = 278 km \cdot h^{-1}$$

$$t = \sqrt{2 \frac{h}{g}} \text{ et } v(h) = v_{libre} = g \sqrt{2 \frac{h}{g}} = \sqrt{2gh} = 6,3 m \cdot s^{-1}$$

$$\text{Fraction du poids sur la force de frottement : } \frac{f}{mg} = \frac{3kv_{libre}^2}{4\rho a g} = 0,7\%$$

$$\frac{f}{mg} \times 100 = \frac{2hg}{v_0^2} \tan \theta \times 100 = 0,66\%$$

ÉNERGIE

Exo M28 Equilibre du pendule simple (2018)

Seulement énergie potentielle de pesanteur ;

$$E_p = -mgz \text{ si } Oz \text{ orienté vers le bas et origine de } E_p \text{ en } O, \text{ point de fixation ; } E_p = -mg\ell \cos \theta \text{ si } \ell = OM ;$$

courbe

Extremum de E_p en $\theta = 0$ ou π , donc équilibre en $\theta = 0$ ou π ;

Minimum de E_p en $\theta = 0$, donc équilibre stable en $\theta = 0$;

Minimum de E_p en $\theta = \pi$, donc équilibre instable en $\theta = \pi$.

Exo M29 Voiture (12 fois ; 2022)

Système : voiture

Référentiel : terrestre, galiléen

Bilan des forces : poids (force conservative)

réaction du support (ne travaille pas)

force de frottements

Distance parcourue :

Théorème de l'énergie mécanique entre A et C : $\Delta E_m = W_{nc}$

$$E_m(C) - E_m(A) = W_{nc} \text{ avec } E_m(A) = mgh \text{ et } E_m(C) = 0 \text{ et } W_{nc} = -f(d + D)$$

$$-mgh = -f(d + D) \Rightarrow D = \frac{mgh}{f} - d = \frac{mgd \sin \alpha}{f} - d$$

$$D = \frac{800 \times 10 \times 100 \times \frac{1}{2}}{1000} - 100 = 400 - 100 = \underline{300 \text{ m}}$$

Equations différentielles :

De A à B, axe Ox suivant l'axe de plus grande pente avec pour Bdf :

$$\text{poids } \vec{P} = mg(\sin \alpha \vec{u}_x - \cos \alpha \vec{u}_y)$$

$$\text{réaction du support : } \vec{R} = R\vec{u}_y$$

$$\text{force de frottements : } \vec{F} = -f\vec{u}_x$$

$$\text{PFD : } m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}$$

$$\text{Projection sur Ox : } m\ddot{x} = mg \sin \alpha - f \Rightarrow \ddot{x} = g \sin \alpha - \frac{f}{m} \Rightarrow \dot{x} = \left(g \sin \alpha - \frac{f}{m}\right) t \text{ et}$$

$$x = \frac{1}{2} \left(g \sin \alpha - \frac{f}{m}\right) t^2$$

De B à C, axe Ox suivant l'horizontale avec pour Bdf :

$$\text{poids } \vec{P} = -mg \vec{u}_y$$

$$\text{réaction du support : } \vec{R} = R\vec{u}_y$$

$$\text{force de frottements : } \vec{F} = -f\vec{u}_x$$

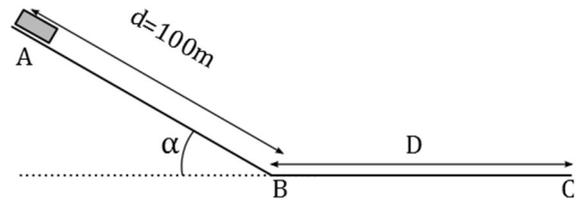
$$\text{PFD : } m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}$$

$$\text{Projection sur Ox : } m\ddot{x} = -f \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{f}{m} \Rightarrow \dot{x} = -\frac{f}{m} t' + v_B \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \frac{f}{m} t'^2 + v_B t' + d$$

Avec vitesse en B : théorème de l'énergie mécanique : $\Delta E_m = W_{nc}$

$$E_m(B) - E_m(A) = W_{nc} \text{ avec } E_m(A) = mgh \text{ et } E_m(B) = \frac{1}{2} m v_B^2 \text{ et } W_{nc} = -fd$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - mgh = -fd \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh - 2\frac{fd}{m}} = \sqrt{2gd \sin \alpha - 2\frac{fd}{m}}$$



$$v_B = \sqrt{2 \times 10 \times 100 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1000 \times 100}{800}} = \sqrt{1000 - \frac{1}{4} \times 1000} = \sqrt{1000 - 250}$$

$$v_B = \sqrt{750} = 27,4 \text{ m/s}$$

Si la pente remonte :

Théorème de l'énergie mécanique entre A et D' : $\Delta E_m = W_{nc}$

$$E_m(D') - E_m(A) = W_{nc} \text{ avec } E_m(A) = mgh \text{ et } E_m(D') = mgh' \text{ et } W_{nc} = -f(d + D')$$

$$mgh' - mgh = -f(d + D') \Rightarrow mg D' \sin \frac{\alpha}{2} - mgd \sin \alpha = -f(d + D')$$

$$\Rightarrow D' = \frac{m g d \sin \alpha - f d}{m g \sin \frac{\alpha}{2} + f}$$

$$D' = \frac{800 \times 10 \times 100 \times \frac{1}{2} - 1000 \times 100}{800 \times 10 \times \sin 15 + 1000} = \underline{97,7 \text{ m}}$$

Une fois la distance D' parcourue, la voiture effectue des oscillations dans la « cuvette » jusqu'à se stabiliser en B.

La voiture reste stable si son énergie potentielle est minimale.

Exo M30 Skieur (18 fois ; 2022)

Système : étudiant supposé ponctuel étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- poids \vec{P} (dérivant de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = +mgz + cte$, avec z altitude, origine au point B au niveau du sol)
- réaction du support \vec{R}_N (supposée normale au support en négligeant les frottements solides), ne travaille pas, étant toujours normale au déplacement

1. Étude énergétique :

Théorème de l'énergie mécanique entre le point A : position initiale du skieur en haut de la piste et le point B : skieur en bas de la piste :

$$E_m(B) - E_m(A) = W(\vec{F}_{non\ conservative})$$

le système étant conservatif, on a $W(\vec{F}_{non\ conservative}) = 0$ soit $E_m(B) - E_m(A) = 0$

De plus, par définition de l'énergie mécanique, on a

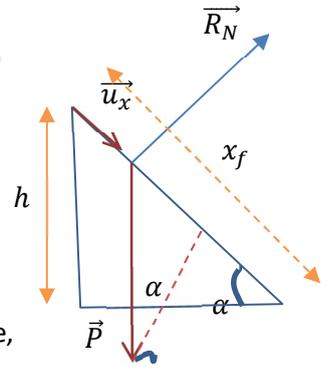
$$E_m = E_c + E_p = E_c + E_{pp} = \frac{1}{2}mv^2 + mgz + cte$$

D'où $E_m(A) = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A + cte \stackrel{\substack{\text{vitesse} \\ \text{initiale} \\ \text{nulle}}}{=} mgz_A + cte$ et

$$E_m(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B + cte = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgz_B + cte$$

En l'exploitant $E_m(B) - E_m(A) = 0$ avec $z_A - z_B = h$: $\frac{1}{2}mv_f^2 - mgh = 0$

$$v_f = \sqrt{2gh} \approx \sqrt{2 \times 10 \times 15} = \sqrt{30 \times 10} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \approx 17 \text{ m.s}^{-1}$$



b. Principe fondamental de la dynamique

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N$$

projection sur le vecteur unitaire \vec{u}_x associé à l'axe (Ox) correspondant à la pente, dans la direction du mouvement :

$$m\ddot{x} = \vec{P} \cdot \vec{u}_x + \vec{R}_N \cdot \vec{u}_x = mg \sin \alpha + 0$$

Soit $\ddot{x} = g \sin \alpha$;

En intégrant par rapport au temps en exploitant la condition initiale (vitesse initiale nulle) :

$$\dot{x} = gt \sin \alpha + K \quad \text{C.I.: } \dot{x}(t=0)=0 \quad (2) ;$$

En intégrant à nouveau par rapport au temps, en choisissant la position initiale comme origine de l'axe (Ox)

$$x = \frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha + K' \quad \text{C.I.: } x(t=0)=0 \Rightarrow K' = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha \quad (2) ; \text{ en exploitant } x_f = \frac{h}{\sin \alpha} \text{ dans (2) : expression } x(t) :$$

$$t_f = \sqrt{\frac{2x_f}{g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2h_0}{g \sin^2 \alpha}}$$

En exploitant dans (1) : expression $v(t)$: $v_f = gt_f \sin \alpha = \sqrt{2gh_0}$

Méthode inutilement compliquée si on ne cherche pas les expressions à tout instant

c. Travail de la force de frottement :

$$W(\vec{F}) = \int_A^B -F\vec{u}_x \cdot d\vec{OM} = \int_A^B -F dx = -Fx_f = -F \frac{h}{\sin \alpha}$$

d. Système : étudiant supposé ponctuel étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- poids \vec{P} (dérivant de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = +mgz + cte$, avec z altitude)
- réaction normale du support \vec{R}_N
- Force de frottement solide $\vec{F} = -F\vec{u}_x$, non conservative

Étude énergétique :

Théorème de l'énergie mécanique entre le point A : position initiale du skieur en haut de la piste et le point B : skieur en bas de la piste :

$$E_m(B) - E_m(A) = W(\vec{F}_{non\ conservative}) = \int_A^B -F\vec{u}_x \cdot d\vec{OM} = -F \frac{h}{\sin \alpha}$$

Avec $E_m(A) = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A + cte \stackrel{\text{vitesse initiale nulle}}{=} mgz_A + cte$ et

$$E_m(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B + cte = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgz_B + cte$$

En l'exploitant le TEM : $E_m(B) - E_m(A) = -F \frac{h}{\sin \alpha}$ avec $z_A - z_B = h$: $\frac{1}{2}mv_f^2 - mgh = -F \frac{h}{\sin \alpha}$

soit

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgh - F \frac{h}{\sin \alpha} = h \left(mg - \frac{F}{\sin \alpha} \right)$$

D'où

$$v_f = \sqrt{2h \left(g - \frac{F}{m \sin(\alpha)} \right)}$$

d. Equation du mouvement : TEM entre le point A et un point M quelconque :

$$E_m(M) - E_m(A) = W(\vec{F}_{non\ conservative}) = \int_A^M -F \vec{u}_x \cdot d\vec{OM} = -Fx$$

Avec $E_m(A) = \frac{1}{2} m v_A^2 + mgz_A + cte \underset{\substack{\text{vitesse} \\ \text{initiale} \\ \text{nulle}}}{=} mgz_A + cte = mgh + cte$ et

$$E_m(M) = \frac{1}{2} m v^2 + mgz + cte \quad \text{avec}$$

$$\sin \alpha = \frac{h-z}{x} \text{ soit } x \sin \alpha = h - z \text{ et } z = h - x \sin \alpha \text{ et Mouvement rectiligne selon l'axe } (Ox): v = \dot{x}$$

$$E_m(M) = \frac{1}{2} m v^2 + mgz + cte = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} mg(h - x \sin \alpha) + cte \quad *$$

D'où TEM :

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + mg(h - x \sin \alpha) - mgh = -Fx$$

En dérivant par rapport au temps :

$$\begin{aligned} m \dot{x} \ddot{x} - mg \dot{x} \sin(\alpha) &= -F \dot{x} \\ \dot{x}(m \ddot{x} - mg \sin(\alpha) + F) &= 0 \end{aligned}$$

En étudiant le mouvement avec $\dot{x} \neq 0$:

Equation du mouvement : $m \ddot{x} - mg \sin(\alpha) + F = 0$ Soit

$$\ddot{x} = g \sin(\alpha) - \frac{F}{m}$$

Version 2

a. Étude énergétique : $v_f = \sqrt{2gh_0} \approx 17 \text{ m.s}^{-1}$

b. RFD sur Ox , direction du mouvement :

$$\ddot{x} = -g \sin \alpha ; \dot{x} = gt \sin \alpha ; x = \frac{1}{2} gt^2 \sin \alpha ; x_f = \frac{h_0}{\sin \alpha} \Rightarrow t_f = \sqrt{\frac{2x_f}{g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2h_0}{g \sin^2 \alpha}} \Rightarrow v_f = gt_f \sin \alpha = \sqrt{2gh_0}$$

c. $W = -\frac{Fh_0}{\sin \alpha}$

d. Étude énergétique : $v_f = \sqrt{2h_0 \left(g - \frac{F}{m \sin \alpha} \right)}$

Exo M31 Toboggan (14 fois ; 2022)

Version 1

$$v_{max} = v_B = \sqrt{2gh}; h_1 = h;$$

Frottement faible, donc l'enfant dépasse C

$$W_{frott} = -F \cdot (AB + BC) = -F \cdot \left(\frac{h}{\sin \alpha} + \frac{1}{2} \pi R \right) \text{ si schéma de gauche}$$

$$\Delta E_m = W_{frott} \Rightarrow mgh_2 - mgh = -F \cdot \left(\frac{h}{\sin \alpha} + \frac{1}{2} \pi R \right) \Rightarrow h_2 = h - \frac{F}{mg} \cdot \left(\frac{h}{\sin \alpha} + \frac{1}{2} \pi R \right)$$

OU

$$\Delta E_m = W_{nc} \Leftrightarrow mgh_2 - mgH = -F \cdot \ell \Rightarrow h_2 = H - \frac{F \cdot \ell}{mg} \text{ avec } \ell \text{ distance parcourue sur le toboggan}$$

Exo M32 Saut à la perche (6 fois ; 2018)

Conservation de l'énergie mécanique : A fin de la course juste avant de commencer à s'élever, pris comme origine de l'altitude, B au point le plus haut, en supposant que la vitesse est alors nulle.

$$E_m(B) - E_m(A) = 0 \text{ avec } E_m(B) = mgh \text{ et } E_m(A) = \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - mgh = 0 \Rightarrow h = \frac{1}{2g}v_A^2$$

$$\text{A.N. : } h = \frac{1}{2g}v_A^2 = \frac{10 \times 10}{2 \times 10} = 5 \text{ m}$$

Commentaires : modèle très grossier !!

- 1) hypothèse système ponctuel or solide déformable ; variation d'altitude de 5 m, mais à partir de quelle origine ? le centre de gravité de l'homme ? comment intervient la hauteur de la perche ? de plus, le perchiste peut donner une impulsion au moment de lâcher la perche
- 2) hypothèse vitesse finale nulle alors que seule la vitesse par rapport à l'axe vertical est nulle
- 3) on néglige tout frottement et toute dissipation d'énergie notamment dans le planté de la perche au sol

Exo M34 Fusée (2 fois, 2022)

Version 1 :

Force de poussée : $F = 10\,000 \text{ kN}$

Masse de la fusée : $m = 200 \text{ tonnes}$

Masse de la terre : $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, rayon de la terre : $R_T = 6400 \text{ km}$

Constante de gravitation : $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ USI}$

Système : fusée

Référentiel terrestre : $v_i = 0$, trajectoire rectiligne. Force de gravitation, force de poussée.

1. $W = F \cdot d = 10^7 \times 50 \cdot 10^3 = 50 \cdot 10^{10} \text{ J}$.

2. Hyp : $g = g_0 = cte = 9,8 \approx 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

$$\Delta E_m = W \Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_1 = W \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2W}{m} - 2gh_1}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2 \times 50 \cdot 10^{10}}{200 \cdot 10^3} - 2 \times 10 \times 50 \cdot 10^3} = \sqrt{5 \cdot 10^6 - 10^6} = \sqrt{4 \cdot 10^6} = 2 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

En effet, à 50 km, $g = G \frac{M_T}{(R_T+h)^2} = 9,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Remarque : a priori, il faut prendre $g = cte$, mais si ce n'était pas le cas, on aurait :

Si g dépend de l'altitude, on prend en compte l'attraction terrestre avec $E_p = -G \frac{mM_T}{r}$

$$\Delta E_m = W \Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 - G \frac{mM_T}{(R_T+h)} + G \frac{mM_T}{R_T} = W \Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 + G \frac{mM_T h}{R_T(R_T+h)} = W$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2W}{m} - 2G \frac{M_T h}{R_T(R_T+h)}} = 2,4 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

3. Hyp : $g = g_0 = cte = 9,8 \approx 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

$$\Delta E_m = 0 \Rightarrow mgh_2 - \frac{1}{2}mv_f^2 - mgh_1 = 0 \Rightarrow h_2 = h_1 + \frac{v_f^2}{2g}$$

$$h_2 = 50 \cdot 10^3 + \frac{(2 \cdot 10^3)^2}{2 \times 10} = 50 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^5 = 250 \cdot 10^3 \text{ m} = 250 \text{ km}$$

Remarque : à cette altitude, $g \approx 9,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Remarque : a priori, il faut prendre $g = \text{cte}$, mais ce n'est pas tout à fait rigoureux. Si $g \neq \text{cte}$, on aurait :

Si g dépend de l'altitude, on prend en compte l'attraction terrestre avec $E_p = -G \frac{mM_T}{r}$

$$\Delta E_m = 0 \Rightarrow -G \frac{mM_T}{(R_T + h_2)} - \frac{1}{2} m v_f^2 + G \frac{mM_T}{(R_T + h_1)} = 0$$

$$\Rightarrow h_2 = \frac{1}{-\frac{v_f^2}{2GM_T} + \frac{1}{R_T + h_1}} - R_T = 375 \cdot 10^3 \text{ m} = 375 \text{ km}$$

4. Etude du réacteur : axe z vertical descendant et axe horizontal x , réacteur soumis à $\vec{P} = mg\vec{u}_z$

Enoncé mal posé :

Si le réacteur a une vitesse initiale verticale nulle par rapport à la terre :

Conditions initiales : $\dot{z}(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_{max}$; $z(0) = 0$ et $x(0) = 0$

PFD : $\ddot{z} = g$ et $\ddot{x} = 0$, d'où $\dot{z} = gt$ et $\dot{x} = v_{max}$, soit $z = \frac{1}{2}gt^2$ et $x = v_{max} \cdot t$

Au sol, $z(t_1) = h_1$, d'où $t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$ et $x(t_1) = v_{max}t_1 = v_{max}\sqrt{\frac{2h_1}{g}}$

$$x(t_1) = 5 \sqrt{\frac{2 \times 50 \cdot 10^3}{10}} = 5\sqrt{10^4} = 5 \cdot 10^2 = 500 \text{ m}$$

Si le réacteur a une vitesse initiale verticale nulle par rapport à la fusée :

Conditions initiales : $\dot{z}(0) = -v_f$ et $\dot{x}(0) = v_{max}$; $z(0) = 0$ et $x(0) = 0$

PFD : $\ddot{z} = g$ et $\ddot{x} = 0$, d'où $\dot{z} = gt - v_f$ et $\dot{x} = v_{max}$, soit $z = \frac{1}{2}gt^2 - v_f t$ et $x = v_{max} \cdot t$

Au sol, $z(t_1) = h_1$, soit $\frac{1}{2}gt_1^2 - v_f t_1 - h_1 = 0$ d'où $\Delta = v_f^2 + 2gh_1$

d'où $t_1 = \frac{v_f + \sqrt{v_f^2 + 2gh_1}}{g}$ et $x(t_1) = v_{max}t_1 = v_{max} \times \frac{v_f + \sqrt{v_f^2 + 2gh_1}}{g}$

$$x(t_1) = 5 \times \frac{2 \cdot 10^3 + \sqrt{(2 \cdot 10^3)^2 + 2 \times 10 \times 50 \cdot 10^3}}{10} \approx 2100 \text{ m}$$

Version 2

1. force de poussée F constante supposée non conservative et verticale dirigée vers le haut :

$W = \int \vec{F} \cdot \overrightarrow{dOM} = Fh_1 = 10 \times 10^6 \times 50 \times 10^3 = 5 \times 10^{11} \text{ J}$ (hypothèse ascension verticale : $\overrightarrow{dOM} = dz \vec{u}_z$)

2. Bilan des actions mécaniques extérieures sur le système fusée :

pesanteur, d'énergie potentielle $E_{pp} = mgz + \text{cte}$ avec z l'altitude en considérant g uniforme et la masse constante malgré la consommation de carburant.

force de poussée F constante supposée non conservative et verticale dirigée vers le haut.

D'après le théorème de l'énergie mécanique entre le point de décollage à $t = 0$ et le point A1 à la verticale à $h_1 = 50 \text{ km}$: $E_{m_1} - E_{m_0} = W = Fh_1$ avec $E_{m_1} = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 + \text{cte}$ $E_{m_0} = 0 + 0 + \text{cte}$ (vitesse et altitude initiales nulles)

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = W = Fh_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2W}{m} - 2gh_1} = \sqrt{\frac{2Fh_1}{m} - 2gh_1} = \sqrt{2h_1\left(\frac{F}{m} - g\right)}$$

$$\text{A.N. : } v_1 = \sqrt{\frac{2 \times 5 \times 10^{11}}{200 \times 10^3} - 2 \times 10 \times 50 \times 10^3} = \sqrt{5 \times 10^6 - 10^6} = 2 \times 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

3. En considérant g uniforme, en l'absence de force de poussée donc de force non conservative, d'après le théorème de l'énergie mécanique entre le point A1 à $h_1 = 50 \text{ km}$ et le point A2 à la hauteur maximale h_2 , et en supposant la vitesse nulle au point de hauteur maximale (cas idéal d'un mouvement purement vertical) :

$$Em_2 - Em_1 = 0 \Leftrightarrow 0 + mgh_2 - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1\right) = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = W = Fh_1$$

$$0 + mgh_2 = W = Fh_1 \Rightarrow h_2 = \frac{W}{mg} = \frac{5 \times 10^{11}}{200 \times 10^3 \times 10} = \frac{5}{2} \times 10^5 = 2,5 \times 10^5 \text{ m} \approx 250 \text{ km}$$

4. Sans vitesse initiale... par rapport à la fusée.

Système étudié : point M de masse m supposée constante correspondant au réacteur

référentiel d'étude : Référentiel terrestre considéré comme galiléen

Choix de l'origine O : point de départ de M (point A1 où le réacteur se fait larguer)

Choix des 3 axes : Ox et Oy horizontaux avec Oy tel que le vecteur vitesse initiale appartienne au plan (Oy, Oz) , Oz vertical ascendant donc de sens opposé à celui du vecteur \vec{g} .

Etude cinématique : Choix des coordonnées cartésiennes et de la base cartésienne associée.

$$\overrightarrow{OM} = x \overrightarrow{u}_x + y \overrightarrow{u}_y + z \overrightarrow{u}_z \quad \overrightarrow{v(M)}_R = \dot{x} \overrightarrow{u}_x + \dot{y} \overrightarrow{u}_y + \dot{z} \overrightarrow{u}_z \quad \overrightarrow{a(M)}_R = \ddot{x} \overrightarrow{u}_x + \ddot{y} \overrightarrow{u}_y + \ddot{z} \overrightarrow{u}_z$$

Bilan des forces : M ne subit que son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg \overrightarrow{u}_z$

Projection du PFD

$m g \overrightarrow{u}_z$	$m \vec{a}$
0	$m \ddot{x}$
0	$m \ddot{y}$
$-mg$	$m \ddot{z}$

En intégrant par rapport au temps :

$$\dot{z} = -gt + \dot{z}_0 \text{ et } z = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{z}_0 t + z_0$$

$$\dot{y} = \dot{y}_0 \text{ et } y = \dot{y}_0 t + y_0$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 \text{ et } x = \dot{x}_0 t + x_0$$

Conditions initiales : $z_0 = h_1$ $y_0 = x_0 = 0$ et $\dot{z}_0 = v_1$, $\dot{y}_0 = v_{max}$ et $\dot{x}_0 = 0$

$$\text{D'où } z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_1 t + h_1 \text{ et } y = v_{max} t$$

Soit t_{chute} la durée de la chute, la distance parcourue est alors $D = y(t_{chute}) = v_{max} t_{chute}$ avec

$$z(t_{chute}) = 0 = -\frac{1}{2}gt_{chute}^2 + v_1 t_{chute} + h_1 \text{ et } t_{chute} \neq 0 \text{ et } t_{chute} > 0, \text{ soit}$$

$$t_{chute} = \frac{v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + 4 \times \frac{1}{2} g h_1}}{g} \quad \text{avec } \sqrt{v_1^2 + 4 \times \frac{1}{2} g h_1} > v_1 \text{ soit pour avoir } t_{chute} > 0 :$$

$$t_{chute} = \frac{v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gh_1}}{g}$$

$$\text{Finalement } D = y(t_{chute}) = v_{max} t_{chute} = v_{max} \frac{v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gh_1}}{g}$$

$$\text{A.N. : } D = 5 \times \frac{2 \cdot 10^3 + \sqrt{4 \cdot 10^6 + 2 \times 10 \times 250 \cdot 10^3}}{10} = 5 \times \frac{2 \cdot 10^3 + \sqrt{4 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^6}}{10} = 5 \times \frac{2 \cdot 10^3 + \sqrt{9 \cdot 10^6}}{10} = 5 \times \frac{5 \cdot 10^3}{10} =$$

2,5 km

La méthode simplifiée donnait le bon ordre de grandeur

Remarque : si on ne tient pas compte de la vitesse verticale initiale (énoncé original peu clair) :

Etude du réacteur : axe z vertical descendant et axe horizontal y,

réacteur soumis à $\vec{P} = mg\vec{u}_z$

PFD : $\ddot{z} = g$ et $\ddot{y} = 0$, d'où $\dot{z} = gt$ et $\dot{y} = v_{max}$, soit $z = \frac{1}{2}gt^2$ et $y = v_{max} \cdot t$

Au sol, $z(t_1) = h_1$, d'où $t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$ et $x(t_1) = v_{max}t_1 = v_{max}\sqrt{\frac{2h_1}{g}}$

$$x(t_1) = 5 \sqrt{\frac{2 \times 50 \cdot 10^3}{10}} = 5\sqrt{10^4} = 5 \cdot 10^2 \text{ m}$$

Exo M34 Jonglage : voir premiers exos

Exo M35 Saut à l'élastique

Version 2 : Saut à l'élastique 2

Axe Oz vertical descendant, origine au niveau du point A sur le pont. Origine des E_p de pesanteur en $z = 0$.

Systeme : sauteur, considéré comme un point matériel de masse m

Référentiel : terrestre, supposé galiléen

Base : axe Oz vertical descendant

Etude cinématique : mouvement rectiligne selon (Oz) tel que $d\vec{OM} = dz \vec{u}_z$,

$$\vec{OM} = z \vec{u}_z, \quad \vec{v} = \dot{z} \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{a} = \ddot{z} \vec{u}_z$$

Phase 1 : Lors de la première phase du saut ($0 \leq x \leq l_0$), l'élastique n'est pas tendu. Le sauteur est en chute libre.

poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$, dérive d'une $E_p = -mgz + cte = -mgz$

Conservation de l'énergie.

Phase 2 : Ensuite ($x > l_0$), l'élastique se tend et en plus de son poids le sauteur est soumis à la force de rappel élastique. Il effectue des oscillations. Dès que $x \leq l_0$, retour à la phase 1.

poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$, dérive d'une $E_p = -mgz + cte = -mgz$

Force de rappel élastique $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{ext} = -k(l - l_0)\vec{u}_z$, dérive d'une $E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$

Conservation de l'énergie.

Conservation de l'énergie mécanique pour la phase 1 : $E_m(x=0) = E_m(x=l_0)$

$$0 = -mgl_0 + \frac{1}{2}mv_{l_0}^2 \Rightarrow v_{l_0} = \sqrt{2gl_0} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Conservation de l'énergie mécanique : $E_m(x=0) = E_m(x=L_{max})$

$$0 = \frac{1}{2}mv_{L_{max}}^2 - mgx_{L_{max}} + \frac{1}{2}k(x_{L_{max}} - l_0)^2 \text{ or } v_{L_{max}} = 0 \text{ et } x_{L_{max}} = L$$

$$0 = -mgL + \frac{1}{2}k(L - l_0)^2 = -mgL + \frac{1}{2}kL^2 + \frac{1}{2}kl_0^2 - kLl_0$$

$$0 = -mgL + \frac{1}{2}kL^2 + \frac{1}{2}kl_0^2 - kLl_0$$

$$\frac{1}{2}k L^2 - L(kl_0 + mg) + \frac{1}{2}kl_0^2 = 0$$

$$L^2 - 2L\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right) + l_0^2 = 0$$

On obtient une équation du deuxième degré en L .

$$\Delta = 4\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)^2 - 4l_0^2 = 4l_0^2 + 4\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + 8l_0\frac{mg}{k} - 4l_0^2 = 4\frac{mg}{k}\left(\frac{mg}{k} + 2l_0\right) > 0$$

$$L = l_0 + \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\frac{mg}{k}\left(\frac{mg}{k} + 2l_0\right)}$$

$$L = 20 + \frac{60 \times 10}{60} \pm \sqrt{\frac{60 \times 10}{60}\left(\frac{60 \times 10}{60} + 2 \times 20\right)}$$

$$L = 30 \pm \sqrt{500} = 30 \pm 22,4$$

$$L_1 = 7,6 \text{ m et } L_2 = 52,4 \text{ m}$$

On trouve 2 réponses, $L_1 = 7,0 \text{ m}$ et $L_2 = 52,4 \text{ m}$.. On retient $L_2 = 52,4 \text{ m} > l_0$

Le pont doit avoir une hauteur minimale de 52,4 m.

On applique le principe fondamental de la dynamique au sauteur dans le référentiel terrestre galiléen :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} \Rightarrow m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} \Rightarrow m \ddot{z} \vec{u}_z = m g \vec{u}_z - k(z - l_0) \vec{u}_z$$

Projection sur Oz :

$$m \ddot{z} = m g - k(z - l_0) \Rightarrow \boxed{\ddot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{kl_0}{m}}$$

Le mouvement est de type oscillatoire.

L'équation différentielle peut s'écrire $\ddot{z} + \omega_0^2 z = g + \frac{kl_0}{m}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

On en déduit **la période propre** du système :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Application numérique :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{60}{20}} = 2\pi\sqrt{3} = 10,8 \text{ s}$$

En toute rigueur, cette relation n'est valable que dans un potentiel harmonique. Elle n'est donc applicable ici que lorsque le sauteur oscille en dessous de L .

Phase 1 : On applique le principe fondamental de la dynamique au sauteur dans le référentiel terrestre galiléen :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} \Rightarrow m\vec{a} = \vec{P} \Rightarrow m \ddot{z} \vec{u}_x = m g \vec{u}_x$$

Projection sur Oz : $\ddot{z} = g$

On intègre l'accélération par-rapport au temps pour avoir la vitesse :

$$\dot{z} = \int \ddot{z} dt = \int g dt = gt + cte \text{ or } \dot{z}(0) = v_0 = 0 \text{ donc } cte = 0 \Rightarrow \dot{z} = gt$$

On intègre la vitesse par-rapport au temps pour avoir la position :

$$z = \int \dot{z} dt = \int gt dt = \frac{1}{2}gt^2 + cte \text{ or } z(0) = 0 \text{ donc } cte = 0 \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{2}gt^2}$$

Durée de la chute libre :

$$l_0 = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2l_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 20}{10}} = 2 \text{ s}$$

L'élastique commence à remonter lorsque la chute libre est passée et qu'un quart de période a eu lieu :

$$t = t_1 + \frac{T_0}{4} = 2 + 2,7 = \underline{4,7 \text{ s}}$$

Version 2 (2 fois, 2021)

1. 1^e phase (AB) : poids seul

2^e phase (BC) : poids et force élastique

Pas de force non conservative, donc conservation de E_m

2. Axe Oz descendant, origine au niveau du pont, en A.

$$E_m(A) = 0 = E_m(C) = -mgz_{max} + \frac{1}{2}k(z_{max} - \ell_0)^2 \Rightarrow z_{max} = \ell_0 + \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right)^2 - \ell_0^2}$$

$$\ell_0 + \frac{mg}{k} = z_{\acute{e}q} = 80 + \frac{75 \times 10}{150} = 85 \text{ m} \Rightarrow z_{max} = 85 + \sqrt{85^2 - 80^2} \approx 85 + 29 = \mathbf{114 \text{ m}}$$

3. vitesse max quand E_m est minimale, donc en $z_{\acute{e}q} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$.

$$E_m(A) = 0 = E_m(z_{\acute{e}q}) = -mgz_{\acute{e}q} + \frac{1}{2}k(z_{\acute{e}q} - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

$$+\frac{1}{2}mv_{max}^2 = mgz_{\acute{e}q} - \frac{1}{2}k(z_{\acute{e}q} - \ell_0)^2 = mg\left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right) - \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 = mg\left(\ell_0 + \frac{mg}{2k}\right)$$

$$v_{max}^2 = 2g\left(\ell_0 + \frac{mg}{2k}\right) \Rightarrow v_{max} = \sqrt{g\left(2\ell_0 + \frac{mg}{k}\right)} = \sqrt{10 \times (160 + 5)} \approx 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

4. L'élastique rétrécit et tire l'étudiant jusque $z = \ell_0$, puis chute libre de l'étudiant (montée puis descente), etc.

Fois,

Exo M36 Positions d'équilibre d'un oscillateur de Landau (8 fois, 2015)

$$1) \vec{F} = k\overline{MM_0} = k(\overline{MA} + \overline{AM_0}) = k(-\ell + \ell_0)\vec{e}_\ell = -k\left(\sqrt{x^2 + a^2} - \ell_0\right)(\sin\alpha \vec{e}_x - \cos\alpha \vec{e}_y)$$

$$\vec{F} = -k\left(\sqrt{x^2 + a^2} - \ell_0\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \vec{e}_x - \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} \vec{e}_y\right)$$

$$2) \delta W = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -k\left(\sqrt{x^2 + a^2} - \ell_0\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \cdot dx\right)$$

3) Position d'équilibre : $\left(x - \frac{x\ell_0}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) = 0$, donc $x = 0$ s'il n'existe pas d'autres positions de x pour lesquelles $\ell_0 = \sqrt{x^2 + a^2}$

1) Système : point M ; soumis à son poids, la tension du ressort et la réaction de l'axe (Ox) (orthogonale à l'axe en l'absence de frottements).

Si $a < L_0$: lorsque le point M se trouve en O à la verticale du point A, le ressort est comprimé. Il n'y a alors aucune force selon l'axe (Ox), et ce point O correspond à une position d'équilibre.

Si on écarte un peu M du point O, le ressort comprimé va avoir tendance à éloigner M de O, qui est donc une position d'équilibre instable.

De plus, il va alors exister deux positions de M, symétriques par rapport à O, telles que $AM = L_0$. Dans ce cas, il n'y a pas d'action du ressort, et aucune force selon (Ox) : il s'agit donc de deux autres positions d'équilibre. En écartant un peu de ces positions, le ressort sera soit comprimé, soit étiré, et aura tendance à ramener M vers la position où il est à sa longueur à vide : ce sont des positions d'équilibre stable.

Au contraire, si $a > L_0$, le ressort est toujours étiré et la seule position où il n'y a pas de forces selon l'axe (Ox) est le point O, qui correspondra à une position d'équilibre stable. En effet, en déplaçant légèrement M à proximité de O, le ressort étiré va ramener M vers O.

2) On étudie le point matériel M de masse m dans le référentiel terrestre galiléen.

Les forces subies par M(m) sont

- le poids d'énergie potentielle de pesanteur associée E_{pp} constante, l'altitude du point M étant constante.

On peut par exemple la choisir nulle : $E_{pp} = 0$

Ce choix d'origine des potentiels n'influence aucun des résultats ci-dessous car seules les dérivées première et seconde de l'énergie potentielle sont exploitées.

- la réaction normale du support, qui ne travaille pas, les déplacements ayant lieu sans frottements, à laquelle on peut donc associer une énergie potentielle nulle.

- la force de rappel du ressort d'énergie potentielle associée $E_{pe}(x) = \frac{1}{2}k(L - L_0)^2$ avec $L = \sqrt{x^2 + a^2}$

L'énergie potentielle globale est l'énergie potentielle élastique et a l'expression suivante :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k(L - L_0)^2 + cte = \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + a^2} - L_0)^2 + cte.$$

3) On peut utiliser la discussion de la première question, ou en reprendre une basée sur l'expression de l'énergie potentielle obtenue. Si $a < L_0$, alors deux positions de M, symétriques par rapport à O sont telles que $AM = L_0$. Dans ce cas, l'énergie potentielle élastique est nulle, et il y aura donc deux minima d'énergie potentielle totale. Au contraire, si $a > L_0$, le ressort est toujours étiré et l'énergie potentielle élastique jamais nulle. Ce raisonnement qualitatif se retrouve bien sûr sur l'expression mathématique de E_p .

Ainsi on peut identifier la courbe en pointillés violets (la plus haute) au cas $a_4 = 3L_0$. La courbe en points verts (la plus basse en $x = 0$) ne fait apparaître qu'un seul minimum, mais son énergie potentielle est nulle : elle correspond au cas limite $a_3 = L_0$. Enfin, il reste à identifier les 2 dernières courbes, ce qui peut se faire à partir de la valeur de l'énergie potentielle en $x = 0$.

Elle est plus élevée sur la courbe bleue en trait plein que sur la courbe rouge (tirets), signe que le ressort est davantage comprimé. On en déduit que la courbe bleue est celle du cas $a_1 = \frac{L_0}{10}$ alors que la courbe rouge correspond à $a_2 = \frac{L_0}{3}$.

4) Point d'équilibre stable : $\frac{dE_p}{dx}\Big|_{x=x_{eq}} = 0$ et $\frac{d^2E_p}{dx^2}\Big|_{x=x_{eq}} > 0$.

Point d'équilibre instable : $\frac{dE_p}{dx}\Big|_{x=x_{eq}} = 0$ et $\frac{d^2E_p}{dx^2}\Big|_{x=x_{eq}} < 0$.

$$\frac{dE_p}{dx} = kx \left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) \quad \text{et}$$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} = k \left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) + kx^2 \frac{L_0}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = k \left(1 - \frac{L_0 a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\right)$$

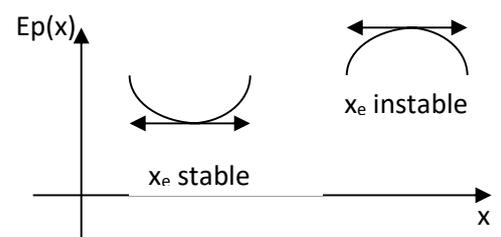
Donc $\frac{dE_p}{dx} = 0$ pour $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{L_0^2 - a^2}$ si $a < L_0$

$\frac{dE_p}{dx} = 0$ pour $x = 0$ uniquement si $a > L_0$

De plus, $\frac{d^2E_p}{dx^2}\Big|_{x=\sqrt{L_0^2 - a^2}} = k \left(1 - \frac{a^2}{L_0^2}\right) > 0$ si $a < L_0$ et $\frac{d^2E_p}{dx^2}\Big|_{x=0} = k \left(1 - \frac{L_0}{a}\right) > 0$ si $a > L_0$ et < 0

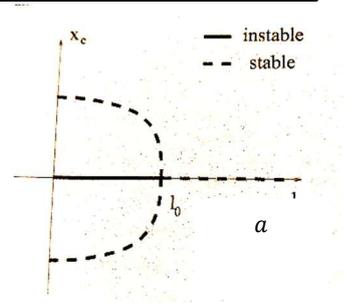
si $a < L_0$

Si $a < L_0$, $x = 0$ est position d'équilibre instable et $x = \pm\sqrt{L_0^2 - a^2}$ sont deux positions d'équilibre stables.



Si $a > L_0$, $x = 0$ est position d'équilibre stable

- 5) Pour $a = L_0$, le système bifurque vers d'autres positions d'équilibre que $x = 0$. L'allure du tracé rappelle une fourche d'où le nom " bifurcation fourche".
- 6) On passe de 3 positions d'équilibre à une seule en fonction de la valeur de la distance a ; de plus, la position d'équilibre existant dans tous les cas de figure change de stabilité. C'est pourquoi on parle de brisure de symétrie.



Exo M37 Freinage d'un palet

Référentiel : terrestre, supposé galiléen

Système : le palet

Etude cinématique : $\vec{OM} = x \vec{u}_x \quad \vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x \quad \vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x$

Bilan des forces :

pois, réaction du support. Ces deux forces sont perpendiculaires au déplacement, donc elles ne travaillent pas.

Force de frottement $\vec{F}_f = -f m g d \vec{u}_x \quad \boxed{W = \int \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -f m g d}$

AN : $W = -0,4 \times 10 \times 10 \times 1 = -40 J$

Vitesse du palet au bout de la bande rugueuse : $\Delta E_m = W_{Fnc} = W$

$$\Delta E_m = E_{c,fin} - E_{c,ini} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = W$$

$$v_f = \sqrt{v_0^2 + 2 \frac{W}{m}} = \sqrt{8^2 - 2 \frac{40}{10}} = \sqrt{64 - 8} = \sqrt{56} = 7,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Le palet traverse la bande si $v_f \geq 0$. Cas le plus défavorable : $v_f = 0$

Théorème de l'énergie cinétique :

$$E_{c,fin} - E_{c,ini} = W$$

$$0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -f m g d$$

$$v_0 = \sqrt{2 f g d}$$

Pour cela, il faut que sa vitesse initiale soit supérieure à $\sqrt{2 f g d}$

En dehors d'une bande rugueuse, le système est pseudo-isolé et a un mouvement rectiligne uniforme.

Au bout de la 2^{ème} bande rugueuse : $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2 \frac{W}{m}} = \sqrt{v_0^2 + 2 \times 2 \frac{W}{m}} = \sqrt{56 - 8} = \sqrt{48}$

Au bout de la n^{ème} bande rugueuse : $v_n = \sqrt{v_0^2 + 2 n \frac{W}{m}}$

On veut $v_n = 0 \Rightarrow v_0^2 + 2 n \frac{W}{m} = 0 \Rightarrow n = -\frac{m v_0^2}{2 W} = \frac{10 \times 8^2}{2 \times 40} = \frac{640}{80} = \frac{64}{8} = 8$

Il faut 8 bandes rugueuses pour que le palet s'arrête.

Graphe $v^2(x)$: pente négative constante sur les bandes rugueuses, horizontale entre deux bandes

Graphe $v(x)$: courbe décroissante, concavité vers le bas, sur les bandes rugueuses, horizontale entre deux bandes

Exo M38 Mouvement dans une cavité à fond parabolique (7 fois ; 2022)

$$E_m = mgax^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 (1 + 4a^2x^2)$$

si $ax \ll 1$, alors $\ddot{x} + 2ga x = 0$ et $T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{2ga}}$

$$\begin{aligned} d\overline{OM} &= dx \overline{u}_x + dy \overline{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{d\overline{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt} \overline{u}_x + \frac{dy}{dt} \overline{u}_y \Rightarrow v^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \\ \text{or } \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt} = 2ax \times \frac{dx}{dt} \Rightarrow v^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(2ax \times \frac{dx}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 (1 + 4a^2x^2) \\ E_c &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 (1 + 4a^2x^2) \end{aligned}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 (1 + 4a^2x^2) \text{ avec } \dot{y} = 2ax\dot{x}$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 (1 + 4a^2x^2) + m g y = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 (1 + 4a^2x^2) + m g a x^2$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{m}{2} [2\dot{x}\ddot{x}(1 + 4a^2x^2) + \dot{x}^2(8a^2x\dot{x})] + m g a 2x\dot{x} \quad \text{or} \quad \frac{dE_m}{dt} = 0, \text{ d'où}$$

$$\ddot{x}(1 + 4a^2x^2) + 4a^2\dot{x}^2 x + 2gax = 0$$

Hypothèse : $2ax \ll 1 \Rightarrow 4a^2x^2 \ll 1$

$$E_c = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 (1 + 4a^2x^2) \approx \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} \dot{x}^2$$

Conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{m}{2} 2\dot{x}\ddot{x} + 2m g a x \dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2g a x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{2g a}$$

Exo M39 Atome d'hydrogène

1) r_0 : au niveau du point d'inflexion mais pas facile à situer ; ou aux 2/3 de $E_p(0)$.

$$E_p(r_0) = -2 \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} ; E_p(0) = -3 \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} ; \text{ donc } E_p(r_0) = \frac{2}{3} E_p(0)$$

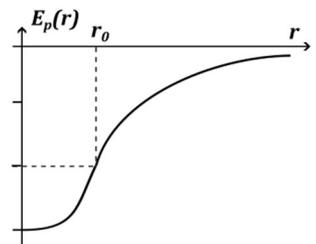
2) Minimum d'énergie potentielle en $r = 0$ donc équilibre stable en $r = 0$.

3) Interaction conservative, donc $E_m = cte = E_m(t = 0) = E_p(r_0)$

Amplitude = r_0

Vitesse :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2 + E_p(r) &= E_p(r_0) \\ \frac{1}{2} m v^2 &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} \left(\frac{r_0^2}{r_0^2} - 3 \right) - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} \left(\frac{r^2}{r_0^2} - 3 \right) = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) \\ v &= \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0 m} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)} \end{aligned}$$



3') électron dans un puits de potentiel, il ne pourra pas dépasser r_0 , donc **amplitude max = r_0** ;

TEM en prenant l'expression de $E_p(r \leq r_0)$

$$\text{Mouvement radial, } E_c = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = m \dot{r} \ddot{r} + \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} \frac{2r}{r_0^2} \dot{r} = m \dot{r} \left(\ddot{r} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^3 m} r \right)$$

Oscillations sinusoïdales de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^3 m}}$

Vitesse maximale = $r_0 \omega_0$

4) Énergie d'ionisation $E_i = E_p(r \rightarrow \infty) - E_p(r_0) = -E_p(r_0) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = E_i$

4) $E_{ion} = E_p(\infty) - E_p(0) = 0 + \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0}$

Remarque : la modélisation proposée suggère que l'électron peut se superposer au noyau et qu'il y aura des oscillations entre r_0 et $-r_0$ pour les conditions initiales proposées.

Exo M40 Pistolet à air comprimé (2 fois, 2022)

$$W = \int_i^f \vec{F}_{pr} \cdot d\vec{M} = \int_i^f F_{pr} dl = F_{pr} \int_i^f dl = F_{pr} L = (p - p_{atm}) \frac{\pi d^2}{4} L = W$$

A.N. : $W = 5 \times 10^5 \times \frac{\pi \times 10^{-4}}{4} \times 0,2 = \frac{\pi \times 10}{4} = \pi \times 2,5 = 8 J = W$

TEM : $\Delta E_m = W \Rightarrow mgh = W \Rightarrow h = \frac{W}{mg}$

A.N. : $h = \frac{8}{0,08 \times 10} = 10 m = h$

Exo M41 Distance minimale

ONDES MECANIQUES

Exo M42 Corde de guitare (2 fois ; 2017)

★ **Système** : brin élémentaire dl de corde situé entre x et $x+dx$, de masse $dm = \mu dl$

$$\cos \alpha = \frac{dx}{dl} = 1 \Rightarrow dl = dx \Rightarrow dm = \mu dx$$

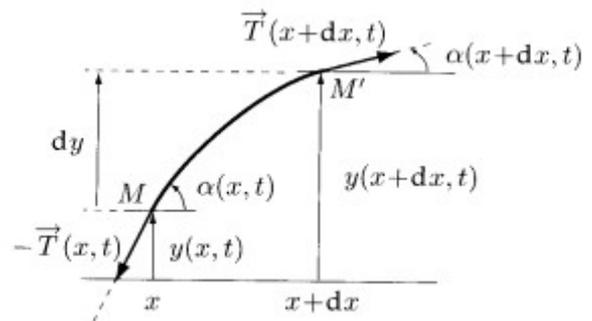
Référentiel du laboratoire, supposé galiléen

Base cartésienne

Etude cinématique : $\vec{OM} = y \vec{u}_y \quad \vec{v} = \frac{\partial y}{\partial t} \vec{u}_y \quad \vec{a} =$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y$$

Bilan des forces : poids négligé
Tension du fil



Tension du fil située à droite de M' : $\vec{T}(x + dx, t)$	Tension du fil situé à gauche de M : $\vec{T}(x, t)$
$\vec{T}(x + dx, t) = \begin{pmatrix} T(x + dx, t) \cos(\alpha(x + dx, t)) \\ T(x + dx, t) \sin(\alpha(x + dx, t)) \end{pmatrix}$	$\vec{T}(x, t) = \begin{pmatrix} -T(x, t) \cos(\alpha(x, t)) \\ -T(x, t) \sin(\alpha(x, t)) \end{pmatrix}$
$\vec{T}(x + dx, t) = \begin{pmatrix} T(x + dx, t) \\ T(x + dx, t) \alpha(x + dx, t) \end{pmatrix}$	$\vec{T}(x, t) = \begin{pmatrix} -T(x, t) \\ -T(x, t) \alpha(x, t) \end{pmatrix}$

PF (référentiel galiléen, système de masse constante) : $dm \vec{a} = \vec{T}(x + dx, t) + \vec{T}(x, t)$

Projection sur Ox :

$$0 = T(x + dx, t) - T(x, t) \\ T(x + dx, t) = T(x, t) \Rightarrow T(x, t) = cte = T_0$$

La tension ne dépend pas de l'abscisse x . Elle est la même en tout point de la corde : **la tension du fil est uniforme (indépendante de x)**. On la note T_0

Projection sur Oy :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x+dx, t)\alpha(x+dx, t) - T(x, t)\alpha(x, t)$$

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0\alpha(x+dx, t) - T_0\alpha(x, t) = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \quad \text{car } \alpha(x+dx, t) - \alpha(x, t) = \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$$

$$\text{Or, } \tan \alpha \approx \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec } c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} : \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Analyse dimensionnelle pour retrouver l'expression de c :

$$\begin{cases} [\mu] = M \cdot L^{-1} \\ [L] = L \\ [F] = M \cdot L \cdot T^{-2} \end{cases} \quad \text{et } [c] = L \cdot T^{-1} = \mu^\alpha \cdot L^\beta \cdot F^\gamma = (M \cdot L^{-1})^\alpha \cdot (L)^\beta \cdot (M \cdot L \cdot T^{-2})^\gamma \quad \text{d'où } \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 1 \\ -2\gamma = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = 0 \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{d'où } c = \mu^{-\frac{1}{2}} \cdot L^0 \cdot F^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \text{La vitesse déterminée est correcte, il n'y a pas de facteur numérique}$$

sans dimension qui échapperait à l'analyse dimensionnelle.

2. $f_n = n f_1$ avec $f_1 = \frac{c}{2L}$
3. $L \downarrow \Rightarrow f_1 \uparrow$: le son devient aigu quand la corde est moins longue
4. $\mu \uparrow \Rightarrow c \downarrow \Rightarrow f_1 \downarrow$: le son devient plus grave quand la corde est plus épaisse

Remarque : Corde de Melde :

$$y(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad y(L, t) = 0 \quad \forall t$$

Recherche des OS solutions :

$$y(x, t) = A \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t + \psi)$$

$$\text{CL : en } x = 0 \quad y(0, t) = A \cos \varphi \cos(\omega t + \psi) = 0$$

$$\text{en } x = L \quad y(L, t) = A \cos(kL + \varphi) \cos(\omega t + \psi) = 0$$

$$A \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$A \cos(kL + \varphi) = A \cos\left(kL + \frac{\pi}{2}\right) = -A \sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*$$

$$k = n \frac{\pi}{L} \quad \text{et} \quad \omega = kc = n \frac{\pi c}{L}$$

$$\boxed{y_n(x, t) = A_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t + \psi_n\right)}$$

Le mode $n = 1$ s'appelle le mode fondamental, de pulsation fondamentale $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$.

Le mode n s'appelle la $n^{\text{ième}}$ harmonique, de pulsation propre $\omega_n = n \frac{\pi c}{L}$.

$$k = n \frac{\pi}{L} \quad \text{et} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow L = n \frac{\lambda}{2}$$

La longueur de la corde est un multiple entier de la demi longueur d'onde.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = n \frac{c}{2L}$$

Les fréquences sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale $f_0 = \frac{c}{2L} = \frac{c}{\lambda}$

Harmoniques : $f_n = n f_1$ où n est un entier positif.

Plus L est grand, plus f_0 est petite (donc le son émis plus grave) : les cordes d'un violoncelle sont plus longue que celles d'un violon.

Exo M43 Didgeridoo

1. $s(t, x) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \Psi)$

L'onde doit présenter un nœud en $x = 0$ et un ventre (une amplitude maximale) en $x = \ell$.

$$x = 0 \Rightarrow s(t, 0) = 0, \forall t \Rightarrow \cos(\Psi) = 0 \Rightarrow \Psi = \pm \pi/2$$

$$x = \ell \Rightarrow |\cos(k\ell + \Psi)| = 1 \Rightarrow |\cos(k\ell \pm \pi/2)| = 1 \Rightarrow |\sin(k\ell)| = 1 \Rightarrow k\ell = \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

Or $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, donc $\frac{2\pi}{\lambda} \ell = \frac{2n+1}{2} \pi$

Les longueurs d'onde possibles sont donc : $\lambda_n = \frac{4\ell}{2n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$

2. Les fréquences possibles sont : $f_n = \frac{c}{\lambda_n} = (2n + 1) \frac{c}{4\ell}$

soit, en fonction de la fréquence du mode fondamental $f_n = (2n + 1) f_0$ avec $f_0 = \frac{c}{4\ell}$

Les harmoniques possibles pour le didgeridoo sont donc des harmoniques impaires : $3f_0, 5f_0$, etc.

3. $s(t, x) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \Psi)$

L'onde doit présenter un ventre en $x = 0$ et en $x = \ell$.

$$x = 0 \Rightarrow |\cos(\Psi)| = 1 \Rightarrow \Psi = \pm \pi$$

$$x = \ell \Rightarrow |\cos(k\ell + \Psi)| = 1 \Rightarrow |\cos(k\ell \pm \pi)| = 1 \Rightarrow k\ell = n\pi \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

Or $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, donc $\frac{2\pi}{\lambda} \ell = n\pi$

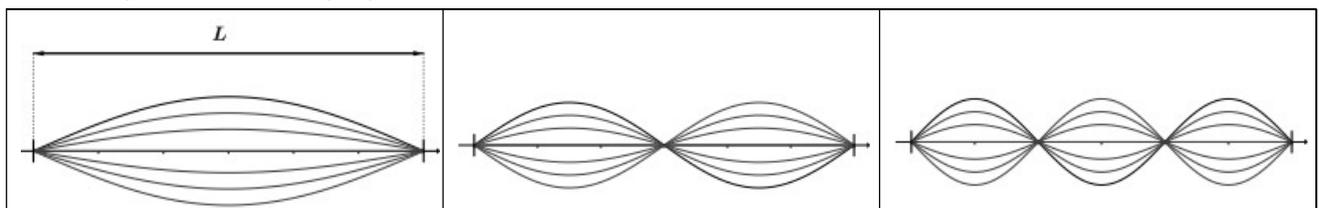
Les longueurs d'onde possibles sont donc : $\lambda_n = \frac{2\ell}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}$

Les fréquences possibles sont : $f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n \frac{c}{2\ell}$

soit, en fonction de la fréquence du mode fondamental $f_n = n f_0$ avec $f_0 = \frac{c}{2\ell}$

Exo M44 Corde de Melde

1. 3 premiers modes propres :



2. OPPH se propageant suivant les x croissants.

3. Nœud en $x = 0$, d'où $y_i(x = 0, t) + y_r(x = 0, t) = 0$

$$a \cos(\omega t) + a \cos(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \pi$$

4. Superposition des deux ondes :

$$y = a \cos(\omega t - kx) + a \cos(\omega t + kx + \pi) = a \cos(\omega t - kx) - a \cos(\omega t + kx)$$

Or, $\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin a \sin b$, d'où $y = a \sin \omega t \sin kx$: OS

5. Position des nœuds :

$$\sin(kx) = 0 \Rightarrow kx_n = n\pi \quad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_n = n \frac{\pi}{k} \quad \text{or} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow x_n = n \frac{\lambda}{2}$$

Position des ventres :

$$\sin(kx) = \pm 1 \Rightarrow kx_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_n = \frac{\pi}{2k} + n \frac{\pi}{k} \quad \text{or} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow x_n = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2}$$

STATIQUE DES LIQUIDES

Exo MF1 Statique (2016, 2 fois)

$$P = P_{atm} + \rho g h_A = 10^5 + 10^3 \times 10 \times 50 = 6.10^5 \text{ Pa}$$

Exo MF2 Presse hydraulique

$$\text{Pression en A : } P_A = \frac{m g}{s}$$

$$\text{Pression en B : } P_B = \frac{M g}{S}$$

Relation de l'hydrostatique (axe Oz ascendant) : $dP = -\rho g dz$

$$(P_B - P_A) = -\rho g (z_B - z_A) = \rho g h$$

$$\frac{M g}{S} - \frac{m g}{s} = \rho g h$$

$$m = \frac{s}{g} \left(\frac{M g}{S} - \rho g h \right) = \boxed{\frac{s}{S} M - \rho h s = m}$$

$$m = \frac{4}{40} \times 4000 - 750 \times 1 \times 40.10^{-2} \times l = 400 - 300.l$$

Exo MF3 Cylindre immergé (3 fois ; 2017)

$$\text{On a } d = \frac{\rho}{\rho_0}$$

1. Système : glaçon, étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen

Bilan des actions mécaniques extérieures : poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et poussée d'Archimède $\vec{\pi} = -m_{\text{fluide déplacé}} \vec{g}$

Où la masse totale de l'iceberg est $m = \rho V = \rho sh$ et la masse de fluide déplacé par l'iceberg, en négligeant la poussée d'Archimède exercée par l'air devant celle exercée par l'eau : $m_{\text{fluide déplacé}} = m_{f,l,d} = \rho_0 s z_0$

$$\text{A l'équilibre : } \vec{\pi} + \vec{P} = \vec{0} ; \text{ en projetant sur l'axe } (Oz) : -\rho_0 s z_0 g + \rho shg = 0 \Rightarrow \boxed{z_0 = \frac{\rho h}{\rho_0}}$$

$$2. \vec{\pi} + \vec{P} + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow -\rho_0 s h g + \rho shg + F = 0 \Rightarrow F = shg(\rho_0 - \rho)$$

3. Si le cylindre est plongé d'une profondeur z : $\vec{\pi} + \vec{P} = m\vec{a}$

$$-\rho_0 s z g + \rho shg = \rho sh\ddot{z} \Rightarrow \ddot{z} + \frac{\rho_0 g}{\rho h} z = g : \text{équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation}$$

$$\text{propre telle que } \omega_0^2 = \frac{\rho_0 g}{\rho h} \text{ soit } \omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho h}} = \frac{2\pi}{T} : \quad \text{oscillations de période } T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho h}{\rho_0 g}}$$

Exo MF4 Iceberg

$$\text{Équilibre : } -\rho_{\text{eau}}S(H-h)\vec{g} + \rho_{\text{glace}}SH\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow -\rho_{\text{eau}}(H-h) + \rho_{\text{glace}}H = 0 \Rightarrow H = h \frac{\rho_{\text{eau}}}{\rho_{\text{eau}} - \rho_{\text{glace}}} = 10h$$

Pourcentage de volume immergé : 90 %

$$p_{\text{sup}} = p_{\text{atm}} ; p_{\text{inf}} = p_{\text{atm}} + \rho_{\text{eau}}g(H-h) = p_{\text{atm}} + \rho_{\text{eau}}gh \left(\frac{\rho_{\text{eau}}}{\rho_{\text{eau}} - \rho_{\text{glace}}} - 1 \right) = p_{\text{atm}} + \rho_{\text{eau}}gh \frac{\rho_{\text{glace}}}{\rho_{\text{eau}} - \rho_{\text{glace}}}$$

Iceberg (2 fois ; 2018)

$$P_s = P_{\text{atm}} \text{ et } P_i = P_{\text{atm}} + \rho_e gh.$$

Attention avec \vec{u}_z vers le bas :

$$\text{Poussée d'Archimède due à l'eau : } \vec{\pi}_{\text{eau}} = -\rho_e g V_{\text{im}} \vec{u}_z = -\rho_e gh H^2 \vec{u}_z ;$$

$$\text{poussée d'Archimède due à l'air : } \vec{\pi}_{\text{air}} = -\rho_{\text{air}} V_{\text{em}} \vec{u}_z \text{ négligée ;}$$

$$\text{poids de l'iceberg : } \vec{P} = +\rho_g g V_{\text{tot}} \vec{u}_z = +\rho_g g H^3 \vec{u}_z$$

$$\text{Équilibre : } \rho_e gh = \rho_g g H \Rightarrow \text{proportion immergée de cet iceberg à l'équilibre : } \frac{h}{H} = \frac{\rho_g}{\rho_e} = 91,7 \%$$

Etude des oscillations de l'iceberg pour une perturbation verticale.

Si l'iceberg est plongée d'une profondeur z alors il sera soumis à une force d'Archimède supplémentaire :

$$\vec{\pi}' = -\rho_e H^2 z g \vec{u}_z$$

$$\text{PFD : } -\rho_e H^2 z g + \rho_g g H^3 = \rho_g H^3 \ddot{z} \Rightarrow \ddot{z} + \frac{\rho_e g}{\rho_g H} z = g$$

$$\text{de la forme } \ddot{z} + \omega_0^2 z = g \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_e g}{\rho_g H}}$$

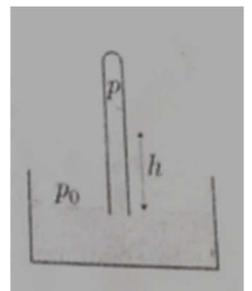
$$\text{Le mouvement sera donc sinusoïdal avec une période } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_g H}{\rho_e g}}$$

Exo MF5 Baromètre (2018)

$$dP = -\rho g dz \text{ et } \rho = \text{cte} \Rightarrow \int_{P_A}^{P_B} dP = - \int_{z_A}^{z_B} \rho g dz \Rightarrow (P_B - P_A) = -\rho g (z_B - z_A)$$

$$\text{A } (P_A = P_0 ; z_A = 0) ; \text{ B } (P_B = 0 \text{ (vide)} ; z_B = h) : -P_0 = -\rho g h \Rightarrow h = \frac{P_0}{\rho g} =$$

$$\frac{10^5}{10 \cdot 10^3 \times 10} = 1 \text{ m}$$



STATIQUE DES GAZ

Exo MF6 Atmosphère isotherme (3 fois, 2022)

1. Équivalent volumique des forces de pression : $-\overrightarrow{grad}(P)$

Équilibre : $-\overrightarrow{grad}(P) + \mu\vec{g} = \vec{0}$

$-\frac{dP}{dz} - \mu g = 0$ si axe vertical ascendant et P ne dépend que de z .

d'où $dP = -\mu g dz$

2. $\mu = \frac{MP}{RT}$ en assimilant l'air à un gaz parfait et en supposant l'atmosphère isotherme.

d'où $\frac{dP}{dz} + \frac{Mg}{RT} P = 0$ ou $\frac{dP}{dz} + \frac{1}{H} P = 0$ en définissant $H = \frac{RT}{Mg}$

On obtient finalement $P(z) = P_{sol} \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$

3. Courbe (en traçant la tangente à l'origine)

Exo MF7 Ballon (1 fois, 2008)

$V_{m1} = 8,26 \text{ L.mol}^{-1}$; $n_1 = 1,21 \text{ kmol}$; $P_{\text{int}} = 2,88 \text{ bar}$; $P_{\text{int}} - P_{\text{atm}} = 2,08 \text{ bar}$; $\Delta t = \frac{1}{\alpha} + \ln \frac{P_{\text{int}} - P_{\text{atm}}}{P_2 - P_{\text{atm}}} = 1\text{h}31\text{min}$; $n_2 = 841 \text{ mol}$

Exo MF8 Altitude plafond d'un ballon sonde (2023)

1. $m_{He} = \frac{P_{He} V M_{He}}{RT_0} = 0,5 \text{ g}$.

2. PFS : $-m_{He}g - mg + \rho_{air} V g = 0 \Rightarrow P_1 = \frac{RT_0}{M_{air}} \left(\frac{m+m_{He}}{V} \right) = 0,70 \text{ bar}$.

3. $z_1 = H \ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right) = 3 \text{ km}$.

DYNAMIQUE DES FLUIDES

Exo MF9 Vaisseau sanguin

1) Écoulement stationnaire et incompressible :

$$D_v \stackrel{\substack{\text{stationnaire} \\ \text{+ incompressible}}}{=} cte = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S} \stackrel{\substack{\text{écoulement uniforme} \\ \text{section droite}}}{=} v_A S_A = v_B S_B$$

$$D_v = v_A \pi r_A^2 = v_B \pi r_B^2 = v_A \pi \frac{r^2}{16} = \frac{\pi}{16} r^2 v_A = \pi r^2 v_B$$

On a donc $v_B = \frac{D_v}{\pi r^2}$ A.N. : $v_B = \frac{125 \cdot 10^{-6}}{\pi \cdot 1^{-4}} = \frac{125 \cdot 10^{-2}}{\pi} = 0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$\frac{\pi}{16} r^2 v_A = \pi r^2 v_B$ d'où $v_A = 16 v_B = \frac{D_v}{\pi r^2}$: A.N. : $v_A = 6,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

2) Effet Venturi :

Écoulement PSI, Relation de Bernoulli en supposant l'absence de pertes de charge et en l'absence d'éléments actifs :

$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B$$

En considérant $z_A = z_B$:

$$P_B = P_A + \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2)$$

A.N. : $P_B = 101.10^3 + \frac{1}{2} \times 10^3 \times (6,4^2 - 0,4^2) = \left(101 + \frac{1}{2} \times (6,4^2 - 0,4^2)\right) \cdot 10^3 \text{Pa} = 121 \text{ kPa} < 130 \text{ kPa}$

Pas de danger

Exo MF10 Mesure de la vitesse d'un écoulement

Dans les tubes piézométriques, en régime stationnaire, absence d'écoulement :

Relation fondamentale de la statique des fluides incompressibles :

$$P_A = P_{atm} + \rho g h_A \text{ et } P_B = P_{atm} + \rho g h_B$$

Pour le fluide en écoulement, **Relation de Bernoulli** : (hypothèse écoulement PSIH : Parfait, stationnaire, incompressible et homogène, en l'absence de pertes de charge ou d'éléments actifs)

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B$$

Or la ligne de courant passant par A et B étant horizontale : $z_B = z_A$;

Le point B constitue un point d'arrêt (cf. cours : sonde de Pitot) : $v_B = 0$;

Au niveau du point A, l'écoulement n'étant pas perturbé, il a la vitesse du reste de l'écoulement loin du dispositif de mesure :

$$v_A = v \quad \text{d'où}$$

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v^2 = P_B$$

$$3. \quad v^2 = \frac{2(P_B - P_A)}{\rho} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{2g(h_B - h_A)}$$

A.N. $v = 0,63 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Exo MF11 Débitmètres

Dispositif N°1 :

Bernoulli entre M loin du tube à l'horizontal de A et A' à la surface en haut du tube coudé :

$$P_M + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g(z_A = 0) = P_0 + \rho g h_A$$

Tube en U en B (statique des fluides incompressibles) : $P_M = P_0 + \rho g h_B$

$$P_0 + \rho g h_B + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g(z_A = 0) = P_0 + \rho g h_A \quad \text{soit } \frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g \Delta h \quad \text{et } v = \sqrt{2g \Delta h}$$

Dispositif N°2 : Débitmètre venturi

1. Equation de continuité : $v_A \cdot S_A = v_B \cdot S_B$ d'où $v_B = \left(\frac{D}{d}\right)^2 v_A$.

3. relation fondamentale de la statique des fluides incompressibles (RFSI) : $P_A - P_{A'} = \rho_{eau} g(z_{A'} - z_A) = P_A - P_0$.

4. RFSI : $P_B - P_{B'} = \rho_{eau} g(z_{B'} - z_B) = P_B - P_0$. Avec $z_A = z_B$

5. En faisant la différence des 2 relations précédentes, on obtient :

$$P_A - P_B = (\rho_{eau})g(z_{A'} - z_{B'}) = \rho_{eau}g\Delta h$$

$$\text{Bernoulli : } P_A + \frac{1}{2} \rho_{eau} v_A^2 + \rho_{eau} g z_A = P_B + \frac{1}{2} \rho_{eau} v_B^2 + \rho_{eau} g z_B, \text{ or } z_B = z_A \text{ et } v_B = \left(\frac{D}{d}\right)^2 v_A$$

$$\text{d'où } P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho_{eau} v_A^2 \left(\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1 \right) = \rho_{eau} g \Delta h \Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\left(\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1\right)}}$$

$$D_v = v_A S_A = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\left(\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1\right)}}$$

Dispositif N°3 : Débitmètre venturi bis vertical

$$1. \text{ Equation de continuité : } v_A \cdot S_A = v_B \cdot S_B \text{ d'où } v_B = \left(\frac{D}{d}\right)^2 v_A.$$

$$3. \text{ RFH : } P_A - P_{A'} = \rho_{eau} g (z_{A'} - z_A) = P_A - P_0.$$

$$4. \text{ RFH : } P_B - P_{B'} = \rho_{eau} g (z_{B'} - z_B) = P_B - P_0. \quad \text{Avec } z_B - z_A = h_0 \text{ et } z_{B'} - z_{A'} = \Delta h$$

5. En faisant la différence des 2 relations précédentes, on obtient :

$$P_A - P_B = (\rho_{eau}) g (z_{A'} - z_{B'} + z_B - z_A) = \rho_{eau} g (h_0 - \Delta h)$$

$$1. \text{ Bernoulli : } P_A + \frac{1}{2} \rho_{eau} v_A^2 + \rho_{eau} g z_A = P_B + \frac{1}{2} \rho_{eau} v_B^2 + \rho_{eau} g z_B, \text{ or } z_B = z_A \text{ et } v_B = \left(\frac{D}{d}\right)^2 v_A$$

$$\text{d'où } P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho_{eau} v_A^2 \left(\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1 \right) = \rho_{eau} g (h_0 - \Delta h) \Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{2g(h_0 - \Delta h)}{\left(\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1\right)}}$$

$$2. D_v = v_A S_A = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\left(\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1\right)}}$$

Exo MF12 Écoulement depuis un récipient

1. Écoulement PSI, le long d'une ligne de courant
2. $v_s = \sqrt{2gh}$ (cf TD Torricelli)
3. $P(z) = P_0 + \rho g(h - z)$
4. Écoulement réel : $P(z) = P_0 + \rho g(h - z) - \Delta P_c$
5. $P_s = P_0 + \rho gh$

Version 2 : vidange d'un réservoir

On suppose que l'écoulement est parfait, homogène et incompressible.

On notera v_l la vitesse du fluide au niveau de la surface libre et v_s la vitesse de sortie du fluide au niveau de l'orifice bas.

Conservation du débit volumique : $v_l S = v_s s$.

L'écoulement n'est pas stationnaire puisque le réservoir se vide au fil du temps. Cependant, sur une durée courte par rapport à la durée totale de vidange, pour un orifice suffisamment petit ($s \ll S$), on aura $v_l \ll v_s$: l'écoulement à la surface est lent, on peut donc admettre que s'installe un **régime quasi-stationnaire** et que nous sommes dans les conditions d'application de la relation de Bernoulli.

L'application de la relation de Bernoulli sur une ligne de courant AB ainsi que l'exploitation des conditions aux limites permet d'établir la vitesse de sortie :

On considère une ligne de courant joignant la surface du liquide en *A* et le trou en *B*. Le long de cette ligne, on applique la relation de Bernoulli (en définissant un axe *Oz* vertical ascendant) :

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B$$

$$\text{C.L. : } p_A = p_B = p_0 \text{ soit } p_0 + \frac{1}{2} \rho v_l^2 + \rho g z = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_s^2 + 0 \approx p_0 + 0 + \rho g z$$

Formule de Torricelli pour la vitesse de vidange : $v_B = \sqrt{2gz}$ et $D_v = s\sqrt{2gz}$

Volume d'eau dV sortant du réservoir pendant dt : $dV = D_v dt = S[z(t) - z(t + dt)] = -Sdz$ soit

$$s\sqrt{2gz} = -S \frac{dz}{dt}$$

Par séparation des variables, en intégrant sur la hauteur totale H et sur la durée totale T

$$\int_H^0 \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{s}{S} \sqrt{2g} \int_0^T dt$$

soit $T = \frac{S}{s} \sqrt{\frac{2H}{g}}$

Exo MF13 Siphon

1. Mêmes hypothèses et de calcul que pour la formule de Torricelli (cours) en supposant que le siphon ne se désamorçait pas : $v_S = \sqrt{2gH}$ et $D_v = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gH}$;

AN : $v_S = \sqrt{2 \times 10 \times 3} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15} \approx 7,8 \text{ m.s}^{-1}$; $D_v = \frac{\pi \times 10^{-4}}{2} \sqrt{15} \approx 6.10^{-4} \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$;

2. $p_M = p_{atm} - \rho g(h + H)$; $p_M > 0 \Rightarrow h < \frac{p_{atm}}{\rho g} - H$;

AN : $h < \frac{10^5}{10^3 \times 10} - 3 = 7 \text{ m}$.

Version 3 (ALD)

En exploitant la relation fondamentale de la statique des fluides (axe ascendant) :

$$dP = -\rho g dz \Rightarrow P(z) - P_0 = -\rho g z \Rightarrow P(z) = P_0 - \rho g z$$

Relation de Bernoulli (écoulement supposé PSIH : parfait, stationnaire, incompressible et homogène, en l'absence de pertes de charge et d'éléments actifs)

Méthode 1 :

Entre A et B : $P_A + \rho g z_A + \frac{\rho v_A^2}{2} = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z_B + P_B$

Écoulement stationnaire et incompressible : il y a conservation du débit volumique, soit

$$D_v = S_A v_A = S_B v_B \quad v_A = \frac{S_B v_B}{S_A} \ll v_B \quad \text{car } S_A \gg S_B$$

On considère donc la vitesse au niveau de la surface libre négligeable : $v_A = 0$

$$P_A + \rho g z_A = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z_B + P_B$$

or $P_B = P_A = P_0$ et $z_A = 0$ et $z_B = -H$
 $\Rightarrow v = \sqrt{-2 g z_B} = \sqrt{2 g H}$

Entre A et M : $P_A + \rho g z_A = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z + P(z) \Rightarrow P(z) = P_0 - \rho g z - \frac{\rho v^2}{2}$

$$P(z) = P_0 - \rho g z - \rho g H$$

Méthode 2 :

OU entre M et B : avec $v_B = v_M = v$ (conservation du débit volumique), $P_B = P_0$ et $z_B = -H$

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g z + P(z) = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g (-H) + P_0 \Rightarrow P(z) = P_0 - \rho g z - \rho g H$$

$$P_0 - \rho g z = 0 \Rightarrow z = \frac{P_0}{\rho g} = \frac{10^5}{10^3 \times 10} = 10 \text{ m}$$

Exo MF14 Château d'eau (2 fois ; 2017)

Version 1 : Ecoulement supposé Parfait, Stationnaire, Incompressible et Homogène :

1. Relation de Bernoulli entre C et A (surface libre) :

$$P_A + \frac{\rho v_A^2}{2} + \rho g z_A = \frac{\rho v_C^2}{2} + \rho g z_C + P_C$$

Les points A et C étant en contact avec l'atmosphère, on a $P_A = P_C = P_{atm}$ d'où

$$\frac{\rho v_A^2}{2} = \frac{\rho v_C^2}{2} + \rho g (z_C - z_A)$$

écoulement stationnaire et incompressible : conservation de D_v entre A, B et C, avec vitesse uniforme sur section droite : $D_v = v_C S_C = v_A S_A + v_B S_B = (v_A + v_B) \frac{\pi d^2}{4}$

Hyp : $S_C \gg S_A = S_B = \frac{\pi d^2}{4}$ soit $v_C \ll v_A$, et v_B

D'où $v_A = \sqrt{2g(z_C - z_A)}$ et $D_{vA} = v_A S_A = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2g(z_C - z_A)}$

2. Relation de Bernoulli entre C et B (surface libre) : de la même manière,

$$v_B = \sqrt{2g(z_C - z_B)} \quad \text{et} \quad D_{vB} = v_B S_B = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2g(z_C - z_B)}$$

$D_{vA} > D_{vB}$.

1. Les pertes de charge régulières correspondent à la dissipation d'énergie

Pour des écoulements réels en conduite, il y a une dissipation d'énergie mécanique du fluide en raison des frottements liés à la viscosité du fluide sur les parois du tuyau, ce qui implique, pour une conduite de section constante, une chute de pression dans le sens de l'écoulement, correspondant aux pertes de charge régulières, en l'absence de toute singularité (coude, vanne, variation de section, etc.)

Les pertes de charge régulières dépendent de deux paramètres principaux : la nature de l'écoulement (plus ou moins turbulent), ainsi que les propriétés de la paroi (et notamment sa rugosité). Pour un écoulement donné, elles ont une valeur constante par unité de longueur. On définit donc en général les pertes de charge linéiques par unité de longueur.

2. Soit $\Delta P_c / \ell$ la perte de charge régulière par unité de longueur (en Pa/m) : D'après la relation de Bernoulli généralisée entre les points C et A, en tenant compte des pertes de charge sur le segment de longueur L :

$$L \times \frac{\Delta P_c}{\ell} = (P_C - P_A) + \frac{1}{2} \rho (v_C^2 - v_A'^2) + \rho g (z_C - z_A)$$

$$L \frac{\Delta P_c}{\ell} = -\frac{1}{2} \rho v_A'^2 + \rho g (z_C - z_A)$$

$$v_A'^2 = 2g(z_C - z_A) - \frac{2}{\rho} L \frac{\Delta P_c}{\ell}$$

$$v_A' = \sqrt{2g(z_C - z_A) - \frac{2}{\rho} L \frac{\Delta P_c}{\ell}} < v_A$$

3. Bernoulli généralisé entre C et A en tenant compte des pertes de charge et de la pompe (attention signes et homogénéité !!)

$$(P_A - P_C) + \frac{1}{2} \rho (v_A^2 - v_C^2) + \rho g (z_A - z_C) = \frac{1}{D_{vA}} P_{pompe} - L \frac{\Delta P_c}{\ell}$$

pour retrouver v_A , il faut que

$$\frac{1}{D_{vA}} P_{pompe} - L \frac{\Delta P_c}{\ell} = 0$$

$$P_{pompe} = D v A L \frac{\Delta P_c}{\ell}$$

Exo MF15 Alimentation en eau

1. Réservoir, canalisations et robinet au rez-de-chaussée : conduite horizontale.

Hypothèses : écoulement PSIH (parfait, stationnaire, incompressible et homogène), avec par

Relation de Bernoulli sur la ligne de courant horizontale entre A et B, tels que A : dans la conduite, B : au robinet.

$$P_{conduite} + \frac{1}{2} \rho v_{conduite}^2 + \rho g z_0 = P_0 + \frac{1}{2} \rho v_{robinet}^2 + \rho g z_0$$

En exploitant la conservation du débit volumique : $S_{robinet} \ll S_{conduite} \Rightarrow v_{robinet} \gg v_{conduite}$

$$P_{conduite} = P_0 + \frac{1}{2} \rho v_{robinet}^2 \text{ soit } v_{robinet} = \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_{conduite} - P_0)}$$

$$\text{A.N. : } v_{robinet} = \sqrt{\frac{2}{10^3} \times 4 \cdot 10^5} = \sqrt{8 \cdot 10^2} = 10\sqrt{8} \approx 28 \text{ m/s}$$

2. Idem : Bernoulli entre A et C avec C au 1^{er} étage tel que $z_C = h = 4 \text{ m}$

$$P_{conduite} + \frac{1}{2} \rho v_{conduite}^2 + \rho g z_0 = P_0 + \frac{1}{2} \rho v_C^2 + \rho g z_C$$

Avec $v_{robinet} \gg v_{conduite}$ et $z_C - z_0 = h$

$$P = P_0 + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v_C^2 \text{ donc } v_C = \sqrt{\frac{2}{\rho} (P - P_0 - \rho g h)}$$

$$\text{A.N. : } v_C = \sqrt{\frac{2}{10^3} \times 4 \cdot 10^5 - 2 \times 10 \times 4} = \sqrt{8 \cdot 10^2 - 80} = \sqrt{7,2 \times 100} \approx 27 \text{ m.s}^{-1} \text{ pour } h = 4 \text{ m}$$

Idem $v = 25,3 \text{ m.s}^{-1}$ pour $h' = 8 \text{ m}$

$$h_{max} = \frac{P - P_0}{\rho g} = 40 \text{ m.}$$

Exo MF16 Pompage (1 fois, 2016)

$$puiss = D v \rho g h = 1 \text{ kW}$$

Exo MF17 Jet d'eau (2 fois, 2021)

1. Bernoulli entre B et C : $(P_C - P_B) + \frac{1}{2} \rho (v_C^2 - v_B^2) + \rho g (z_C - z_B) = 0$ avec $v_B \approx 0$; $z_C = z_B$

$$\Rightarrow \Delta P = P_B - P_C = \frac{1}{2} \rho v_C^2 = \frac{1}{2} \rho v^2 = 0,5 \text{ bar}$$

2. Bernoulli entre C et D le sommet du jet d'eau :

$$(P_D - P_C) + \frac{1}{2} \rho (v_D^2 - v^2) + \rho g h = 0 \text{ avec } P_D = P_C = P_{atm} \text{ et } v_D \approx 0 \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = 5 \text{ m}$$

3. Bernoulli entre A et C :

$$(P_C - P_A) + \frac{1}{2} \rho (v^2 - v_A^2) + \rho g (z_C - z_A) = 0 \text{ avec } v_A \approx 0 ; z_C = D ; z_A = H ; P_A = P_C = P_{atm}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g (D - H) = \rho g h + \rho g (D - H) = 0 \Rightarrow H = D + h = 6 \text{ m}$$

$$4. D_v = \frac{\pi d^2}{4} v^2 \approx 0,8 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$$

Exo MF18 Jet d'eau du lac Léman

1. Hypothèse écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène

Relation de Bernoulli entre A (surface du jet au niveau du lac) et B (situé à la hauteur h au niveau du point le plus haut) :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B, \text{ or } P_B = P_A = P_{atm}; z_A = 0; z_B = h; v_B = 0 \text{ d'où } \frac{1}{2}\rho v_A^2 = \rho g h$$

$$v_A = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 10 \times 150} = 54,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. L'écoulement étant stationnaire et incompressible, il y a conservation du débit : $v_A \cdot S_A = v_C \cdot S_C$ d'où

$$v_C = \frac{S_A}{S_C} v_A = \frac{d_A^2}{d_C^2} v_A = \left(\frac{0,1}{1}\right)^2 \times 54,8 = 0,548 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3. Relation de Bernoulli entre A (surface de du jet) et C (tuyau d'amené tel que $v_C \ll v_A$), situés à la même altitude

$$p + \frac{1}{2}\rho v_C^2 = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_A^2$$

$$p = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_A^2 - \frac{1}{2}\rho v_C^2 \approx p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_A^2 \approx 10^5 + 1,50 \cdot 10^6 \text{ Pa} \approx 15 \text{ bar}$$

4. $D_v = v_A \cdot S_A = v_A \cdot \frac{\pi d_A^2}{4} = 54,8 \cdot \frac{\pi (0,1)^2}{4} = 0,43 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}.$

5. Bernoulli généralisé en présence d'un élément actif (attention signes et homogénéité !):

$$P = D_v \cdot \rho g h = 0,43 \times 10^3 \times 10 \times 150 = 645 \text{ kW}.$$

6. Dans le cas du mercure et dans les mêmes conditions, en appliquant la relation de Bernoulli entre a et B comme à la question 1. :

$$\frac{1}{2}\rho_{Hg} v_A^2 = \rho_{Hg} g h'$$

Soit
$$h' = \frac{v_A^2}{2g} = h$$

La hauteur du jet d'eau n'est pas modifiée si l'on remplace l'eau par du mercure en ayant la même vitesse d'éjection de l'eau donc le même débit, en revanche l'obtention de ce débit de sortie va nécessiter davantage de puissance fournie par la pompe :

$$P' = D_v \cdot \rho' g h = \frac{\rho'}{\rho} P$$

Exo MF19 Jet d'eau du Lac Léman (bis) (9 fois)

$$v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2500} = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ à la base du jet}$$

$$V = v \left(\frac{d}{D}\right)^2 = \frac{50}{100} \approx 0,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ dans la conduite}$$

$$D_v = v \pi \frac{d^2}{4} = 50 \times \pi \frac{10^{-2}}{4} \approx 0,4 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$p = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{1}{2}\rho V^2 \approx p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v^2 \approx 10^5 + 1,25 \cdot 10^6 \text{ Pa} \approx 14 \text{ bar}$$

Exo MF20 Jet d'eau du lac Léman, ter (2018)

$$D_v = v \cdot S = v \cdot \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow v = \frac{4 D_v}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0,5}{\pi (10,7 \times 10^{-2})^2} = 55 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Relation de Bernoulli entre A (surface de du jet : $P_A = P_{atm}, z_A = 0, v_A = v$) et B (point haut du jet $P_B = P_{atm}, v_B = 0, z_B = h$) :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B \Rightarrow \frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g h \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} \approx 150 \text{ m}$$

Exo MF21 Système de pompage (3 fois ; 2021)

Hypothèses : écoulement PSII, $v_A = v_E = 0$ et $v_C = v_D = v$

E

Relation de Bernoulli entre le lac A et C :

$$P_A + \frac{\rho v_A^2}{2} + \rho g z_A = \frac{\rho v_C^2}{2} + \rho g z_C + P_C$$

$$P_0 = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + P_C \Rightarrow P_C = P_0 - \frac{\rho v^2}{2} - \rho g h$$

Relation de Bernoulli entre D et le réservoir E :

$$P_D + \frac{\rho v_D^2}{2} + \rho g z_D = \frac{\rho v_E^2}{2} + \rho g z_E + P_E$$

$$P_D + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = \rho g (h + H) + P_0 \Rightarrow P_D = \rho g H + P_0 - \frac{\rho v^2}{2}$$

D'où :

$$P_C - P_D = P_0 - \frac{\rho v^2}{2} - \rho g h - \left(\rho g H + P_0 - \frac{\rho v^2}{2} \right) = -\rho g (h + H)$$

Relation de Bernoulli entre C et D :

$$D_m \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + g h + \frac{P_D}{\rho} \right) - \left(\frac{1}{2} v^2 + g h + \frac{P_C}{\rho} \right) \right] = \mathcal{P}$$

$$\frac{D_m}{\rho} (P_D - P_C) = \mathcal{P} \Rightarrow D_v (P_D - P_C) = \mathcal{P} \Rightarrow D_v = \frac{\mathcal{P}}{P_D - P_C}$$

Vitesse dans la canalisation : $D_v = v \cdot S \Rightarrow v = \frac{D_v}{S}$

Exo MF22 Pompe alimentant un château d'eau (3 fois, 2022)

1. $Q_v = v \cdot S = v \pi R^2 = 0,03 \text{ m}^3/\text{s}$.
2. $P_u = Q_v \rho h = 600 \text{ W}$
3. $P_a = 1,2 \text{ kW}$

Exo MF23 Echouage d'un bateau (2017)

On travaille dans le référentiel du bateau, a priori galiléen (le bateau a un mouvement rectiligne uniforme par rapport à la Terre), l'eau a un écoulement que l'on peut considérer comme parfait, stationnaire, incompressible. Quand le paquebot arrive dans le détroit, la section de l'écoulement diminue.

Si on applique le théorème de Bernoulli entre un point en amont (canal large) (A) et un point dans le détroit

(B), on a $P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B$

Pas de variation d'altitude ; Conservation du débit volumique : $S_B < S_A \Rightarrow v_B > v_A$ d'où $P_B < P_A$

La pression étant plus faible dans l'écoulement, le bateau s'enfonce, son tirant d'eau augmente et entraîne l'échouage possible. C'est l'effet Venturi, appelé ici « surenfacement ».

ONDES MECANIQUES

Exo M45 Onde réfléchie (2023)

$$1) y_i(x, t) = A \cos\left(2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) ; y_r(x, t) = A \cos\left(2\pi f\left(t + \frac{x}{c}\right) + \varphi\right)$$

$$2) y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad \forall t$$

3) $y(x, t) = A \cos(2\pi f t + \psi) \cos\left(2\pi f \frac{x}{c} + \varphi\right)$, onde stationnaire

4) Compte tenu des conditions aux limites

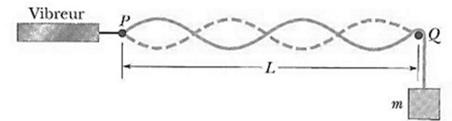
$$y(x, t) = A \cos(2\pi f t + \psi) \sin\left(2\pi f \frac{x}{c}\right)$$

et

$$2\pi f \frac{L}{c} = n\pi$$

Modes propres : $f_n = n f_1 = n \frac{c}{2L}$

1, 2, 3 ventres pour les modes 1, 2, 3.



REVISIONS COMPLEMENTAIRES NE FAISANT PAS PARTIE DES SUJETS D'ORAUX

Exo M46 Analyse spectrale

Décomposition de Fourier ; $f_n = n f$;

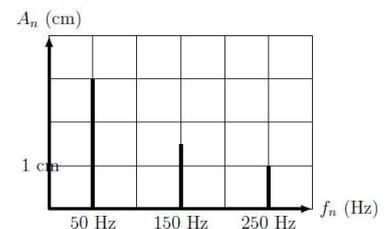
Harmonique de rang 2 : $A_2 \cos(4\pi f t + \varphi_2)$;

$T = 0,02 \text{ s}$, donc $f = 50 \text{ Hz}$;

Courbe A : harmonique 3 amplitude = 1,5

Courbe B : harmonique 5 amplitude = 1

Courbe C : fondamental amplitude = 3



Exo M47 Onde mécanique sur une corde

1. $x(z, t) = 5 \cdot 10^{-3} \sin(40\pi z - \pi t)$ et $c = \frac{\lambda}{T} = 2,5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$

2.

$$\begin{cases} [\mu] = M \cdot L^{-1} \\ [L] = L \quad \text{et} \quad [c] = L \cdot T^{-1} = \mu^\alpha \cdot L^\beta \cdot F^\gamma = (M \cdot L^{-1})^\alpha \cdot (L)^\beta \cdot (M \cdot L \cdot T^{-2})^\gamma \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 1 \\ -2\gamma = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = 0 \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ d'où } c = \mu^{-\frac{1}{2}} \cdot F^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Exo M48 Corde vibrante

$f_1 = 105 \text{ Hz}$; $c = 2L f_1 = 158 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Exo M49 Corde de Melde

Valeurs compatibles, $f_1 = 9,5 \text{ Hz}$ et $f_n = n f_1$ où n est le nombre de fuseaux.

$c = 2L f_1 = 22 \text{ m/s}$. $T = Mg = 0,25 \text{ N}$; $\mu = \frac{T}{c^2} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}$

Exo M50 Onde stationnaire

1. $y(0, t) = 0$ et $y(L, t) = 0 \quad \forall t$

2. $y(x, t) = A \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t + \psi)$

CL : en $x = 0 \quad y(0, t) = A \cos \varphi \cos(\omega t + \psi) = 0$

$$\text{en } x = L \quad y(L, t) = A \cos(kL + \varphi) \cos(\omega t + \psi) = 0 \quad A \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$A \cos(kL + \varphi) = A \cos\left(kL + \frac{\pi}{2}\right) = -A \sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n L = n\pi \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \quad \text{et} \quad \omega_n = k_n c = n \frac{\pi c}{L}$$

$$y_n(x, t) = A_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t + \psi_n\right)$$

3. Recherche des nœuds : $\sin(k_n x_N) = 0 \Rightarrow k_n x_N = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

$$x_N = n \frac{\pi}{k_n} \quad \text{or} \quad k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} \Rightarrow x_N = n \frac{\lambda_n}{2}$$

4. Recherche des ventres : $\sin(k_n x_V) = \pm 1 \Rightarrow k_n x_V = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

Amplitude des ventres : $y_V(x_V, t) = A_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x_V\right)$

5. Phénomène de résonance pour les fréquences propres de la corde : $\omega_n = k_n c = n \frac{\pi c}{L}$ soit $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \frac{c}{2L}$.

6. Harmonique observé : $n = 4$ car 4 fuseaux et 5 nœuds (avec les nœuds des extrémités).

7. $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}$ d'où $m = \frac{\mu c^2}{g} = \frac{\mu}{g} \cdot \frac{4L^2 f_n^2}{n^2} = \frac{\mu c^2}{g} = \frac{1,6 \cdot 10^{-3}}{10} \cdot \frac{4 \cdot 1,2^2 \cdot 120^2}{4^2} = 0,829 \text{ kg}$

Exo MF24 Ecoulement de Couette plan

Exo MF25 Turbine avec pertes

$$v_2 = \frac{4D_v}{\pi d^2} = 5,09 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\text{Bernoulli généralisé : } (P_2 - P_1) + \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (z_2 - z_1) = \frac{P_{\text{utile}}}{D_v} - \Delta P_c = \frac{P_a}{\eta D_v} - \rho \cdot J_{12}$$

$$\text{Or } P_2 = P_1, v_1 = 0 \text{ donc } P_a = \rho \eta D_v \left[\frac{1}{2} v_2^2 + g(z_2 - z_1) + J_{12} \right] = -3 \text{ MW}.$$