

PREPARATION AUX ORAUX – ATS - CORRIGES

THERMODYNAMIQUE ET TRANSFERTS THERMIQUES

AUTOUR DU COURS DE THERMODYNAMIQUE

Exo T1 **Principes de la thermodynamique (3 fois, 2013)**

Exo T2 **Transformation isobare d'un gaz parfait (1 fois)**

$$\Delta U_{12} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_2 - T_1) = 9\,972 \text{ J} \text{ et } \Delta H_{12} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} (T_2 - T_1) = 16\,620 \text{ J}.$$

$$W_{12} = nRT_1 - nRT_2 \frac{P_1}{P_2} = -6\,648 \text{ J} \text{ et } Q_{12} = \Delta H_{12} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} (T_2 - T_1) = 16\,620 \text{ J}.$$

Exo T3 **Transformation lente, transformation rapide (1 fois, 2010)**

Transformation lente : équilibre thermique à chaque instant ; température intérieure = température extérieure (parois doathermanes) : on considère la transformation comme isotherme.

$$\Delta U \underset{G.P.}{=} C_V \Delta T \underset{isoT}{=} 0 \quad \underset{1er\ principe}{=} W + Q; \quad Q = -W = nRT \ln \frac{V_2}{V_1};$$

transformation brutale : les échanges de chaleur n'ont pas le temps de se faire : on considère la transformation comme adiabatique : $Q = 0$. $\Delta U \underset{G.P.}{=} C_V \Delta T \underset{1er\ principe}{=} W + Q = W = C_V(T_2 - T_1)$

Exo T4 **Questions Flash**

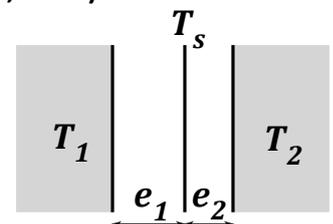
Exo T5 **Moteur ditherme (cours) (1 fois, 2011)**

Exo T6 **Réfrigérateur (1 fois, 2010)**

Exo T7 **Transferts thermiques (1 fois, 2016)**

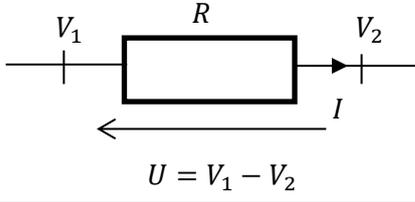
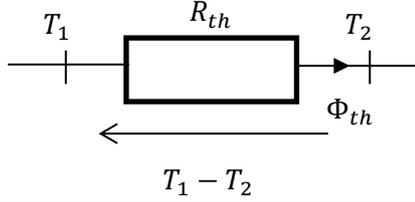
Exo T8 **Analogie entre la loi d'Ohm et la loi de Fourier (2 fois, 2021)**

Version 2 : cf exos transfert thermique : température de contact (exploiter la conservation du flux thermique en régime stationnaire)



1. Comparaison des deux lois :

	Conduction électrique	Conduction thermique
Cause : gradient de ...	potentiel V	température T
Grandeur traversant Σ	charge électrique q	Energie thermique Q
Débit = $\frac{d}{dt}$	intensité électrique $I = \frac{dq}{dt}$	puissance thermique $\Phi_{th} = \frac{\delta Q}{dt}$
Débit = flux de \vec{j} à travers Σ	débit de charge	débit d'énergie

	$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$	$\Phi_{th} = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}$
Loi locale	Loi d'Ohm $\vec{j} = -\sigma \overrightarrow{grad} V$	Loi de Fourier $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{grad} T$
Conductivité	Electrique σ	Thermique λ
Schéma	 <p style="text-align: center;">$U = V_1 - V_2$</p>	 <p style="text-align: center;">$T_1 - T_2$</p>
Résistance	Electrique $R = \frac{V_1 - V_2}{I}$	Thermique $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{th}}$

Loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{grad} T$. C'est une loi phénoménologique reliant la cause (inhomogénéité de température) et l'effet de la diffusion (vecteur densité de courant) basée sur les observations suivantes :

- le flux de chaleur croît avec la non-uniformité de la température
- le flux de chaleur va des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides

Remarques :

- **Loi phénoménologique** : elle rend compte des phénomènes observés mais n'est pas issue d'un modèle théorique à l'échelle microscopique.
- Le transfert thermique par conduction est dû à l'inhomogénéité de température : \vec{j}_{th} est nul si T uniforme
- Signe moins traduit le fait que l'énergie s'écoule des zones chaudes vers les zones froides : le courant thermique \vec{j}_{th} tend à atténuer sa cause $\overrightarrow{grad} T$. C'est une **loi de modération**.
- La direction de \vec{j}_{th} donne la direction du transfert thermique ; \vec{j}_{th} est **perpendiculaire aux surfaces isothermes**.
- L'**intensité** du transfert thermique par conduction est d'autant plus importante que les variations spatiales de la température sont importantes.
- Loi valable tant que
 - la norme du gradient de température n'est pas trop grande (écart à l'équilibre peu important) ;
 - le gradient de température ne varie trop vite dans le temps, sinon la proportionnalité entre \vec{j} et $\overrightarrow{grad} T$ n'est plus instantanée. Il y a un retard dans l'établissement du flux thermique.

La loi de Fourier est une approximation linéaire.

Analyse dimensionnelle :

$$\lambda = \frac{[j_{th}]}{[T][L^{-1}]} = \frac{[P][L^{-2}]}{[T][L^{-1}]} = [P][L^{-1}][T^{-1}] \rightarrow W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$$

$\lambda > 0$ est la conductivité thermique (en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$). Elle dépend du matériau.

Matériau	Ordre de grandeur (W.m ⁻¹ .K ⁻¹)	
Métaux	$\lambda_{Cu, Ag} \approx 400$	excellents conducteurs
Béton	$\lambda_{béton} \approx 1$	conducteur moyen
laine de verre	$\lambda_{laine\ de\ verre} \approx 0,04$	bon isolant
air (T, p usuelles)	$\lambda_{air} \approx 0,03$	bon isolant

2. Association de résistances :

	Association en série	Association en parallèle
Schéma		
Propriété	même flux thermique traversant les deux matériaux	mêmes températures extrêmes
Résistance équivalente	$R_{eq} = R_1 + R_2$	$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

3. Résistance thermique dans un barreau cylindrique :

1 Donner l'expression du profil de température

- flux thermique $\Phi_{th} = j_{th} \cdot S$ et densité de courant j_{th} constants
- loi de Fourier $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{grad} T$, on en déduit $\frac{dT}{dx} = cte$
- résolution à partir des CL

$$T = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

2 Donner l'expression du flux thermique en fonction des CL

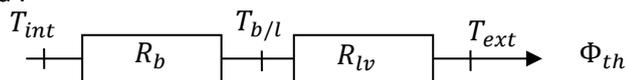
$$\Phi_{th} = j_{th} S = -\lambda \frac{dT}{dx} S = -\lambda S \frac{T_2 - T_1}{L} = \frac{\lambda S}{L} (T_1 - T_2)$$

3 En déduire la résistance thermique telle que $T_1 - T_2 = R_{th} \Phi_{th}$

$$R_{th} = \frac{L}{\lambda S} \quad (\text{K} \cdot \text{W}^{-1})$$

pour un barreau rectiligne de longueur L et section S

4. Schéma :



$$R_b = \frac{e_b}{\lambda_b S} \quad \text{et} \quad R_{lv} = \frac{e_{lv}}{\lambda_{lv} S}$$

$$\Phi_{th} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R} \quad \text{avec} \quad R = R_b + R_{lv}$$

$$\Phi_{th} = \frac{T_{int} - T_{b/l}}{R_b} \Rightarrow -\Phi_{th} \cdot R_b + T_{int} = T_{b/l}$$

$$T_{b/l} = T_{int} - \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_b + R_{lv}} \cdot R_b$$

■ DE LA MECANIQUE A LA THERMODYNAMIQUE

Exo T9 Bilan énergétique d'un freinage (1 fois)

$$\Delta E_c = -\frac{1}{2} M v_0^2 = -\frac{1}{2} 900 \left(\frac{50}{3.6}\right)^2 = -8,68 \cdot 10^4 \text{ J}$$

$$\text{Premier principe : } \Delta U + \Delta E_c = 0 \Rightarrow m c_{eau} \Delta \theta = \frac{1}{2} M v_0^2 \Rightarrow \Delta \theta = \frac{M v_0^2}{2 m c_{eau}} = \frac{-8,68 \cdot 10^4}{4,18 \cdot 10^3} = 20,8 \text{ } ^\circ\text{C.}$$

Exo T10 Utilisation d'un agitateur (1 fois)

$$\Delta U = W_{elec} + Q = P \cdot \tau = m c_v (T_2 - T_1) \Rightarrow T_2 = T_1 + \frac{P \cdot \tau}{m c_v} = 309 \text{ K et } P_2 = P_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} = 308,7 \text{ kPa}$$

■ TRANSFORMATIONS SIMPLES DE PHASES CONDENSEES

Exo T11 Pour chauffer de l'eau sur une plaque électrique (1 fois, 2017)

$$\Delta H \underset{\substack{\text{transfo} \\ \text{monobare}}}{=} Q_{transmise \text{ eau}} \underset{\substack{\text{phase} \\ \text{condensée}}}{=} m c_\ell (T_f - T_i) = \eta \times P_{elec} \times \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{\rho V c_0 (\theta_f - \theta_i)}{\eta P} = \frac{2 \times 4,2 \cdot 10^3 \times 80}{0,7 \times 1,5 \cdot 10^3} = \frac{160 \times 6}{1,5} = 160 \times 4 = 640 \text{ s} \approx 11 \text{ min}$$

■ TRANSFORMATIONS SIMPLES DE GAZ PARFAITS

Exo T12 Gaz dans une enceinte (2023)

$$P_{ext1} = P_0 + \frac{Mg}{S} = P_1$$

$$P_{ext2} = P_0 + \frac{Mg}{S} + \frac{mg}{S} = P_{ext1} + \frac{mg}{S} = P_2$$

$$\delta W = -P_{ext2} \cdot dV, \text{ d'où } W = \int \delta W = -P_{ext2} \int dV = -\left(P_{ext1} + \frac{mg}{S}\right) S(a_2 - a_1)$$

$$W = -(P_0 S + Mg + mg) \cdot (a_2 - a_1)$$

Exo T13 Gaz dans une bouteille

Version 2 (2 fois, 2021) : compression adiabatique réversible / isotherme d'un GP

- G.P. + conservation de la matière + isotherme $T_1 = T_2$: $P_1 V_1 = P_2 V_2$ soit $\frac{P_1 V_1}{V_2} = P_2$

$$W = -nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT \ln \frac{P_2}{P_1}$$

- $P_2' = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma$ et $W' = \Delta U = n C_{Vm} (T_2' - T_1)$ car $Q = 0$

3. Adiabatique réversible d'un gaz parfait toujours plus pentue que l'isotherme dans le diagramme de Clapeyron (rapport des pentes de gamma)

Exo T14 Chauffage d'un gaz (3 fois, 2022)

Système : gaz situé dans l'enceinte calorifugée. Absence de pièce mécanique mobile et enceinte calorifugée : pas de puissance mécanique reçue, seule puissance thermique reçue en provenance de la résistance, soit :

$$\mathcal{P}_{reçue} = \mathcal{P}_{Joule} = R_0 I^2. \quad \text{A.N. : } \mathcal{P}_{reçue} = 100 \text{ W.}$$

Cas isochore : bilan d'énergie interne

$$dU \underset{\substack{\text{1er principe}}}{=} \delta Q_{reçue} + \delta W_p + \delta W_i \underset{\substack{\text{isochore}}}{=} \delta Q_{reçue} = \mathcal{P}_{Joule} dt \quad \text{avec } dU \underset{\substack{\text{G.P.+1ere} \\ \text{loi de Joule}}}{=} C_v dT = \frac{3}{2} nR dT \quad \text{soit}$$

$$\frac{3}{2} nR dT = R I^2 dt \quad \text{et en intégrant à partir de l'instant } t = 0 :$$

$$\int_{T_0}^{T(t)} \frac{3}{2} nR dT = \int_{t=0}^t R_0 I^2 dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} nR (T(t) - T_0) = R_0 I^2 t$$

$$\text{Soit avec } P_0 V_0 = nR T_0$$

$$T(t) = T_0 + \frac{R_0 I^2 t}{\frac{3}{2} nR} = T_0 + \frac{T_0 R_0 I^2 t}{\frac{3}{2} P_0 V_0} = T_0 \left(1 + \frac{R_0 I^2 t}{\frac{3}{2} P_0 V_0} \right)$$

A.N. :

$$T(t = 500 \text{ s}) = T_0 \left(1 + \frac{R_0 I^2 t}{\frac{3}{2} P_0 V_0} \right) = 300 \times \left(1 + 100 \times 1 \times \frac{500}{\frac{3}{2} 10^5 \times 10^{-1}} \right) = 3 \cdot 10^2 \times \left(1 + \frac{5 \cdot 10^4}{\frac{3}{2} \times 10^4} \right) \\ = 1300 \text{ K}$$

Cas d'une enceinte déformable : Bilan d'enthalpie :

$$dH \underset{\substack{\text{isobare}}}{=} \delta Q_{reçue} + \delta W_i \underset{\substack{\text{pas de pièce} \\ \text{méca mobile}}}{=} \delta Q_{reçue} = \mathcal{P}_{Joule} dt \quad \text{avec } dH \underset{\substack{\text{G.P.+2nde} \\ \text{loi de Joule}}}{=} C_p dT = \frac{5}{2} nR dT \quad \text{soit}$$

$$\frac{5}{2} nR dT = R I^2 dt \quad \text{et en intégrant à partir de l'instant } t = 0 :$$

$$\int_{T_0}^{T(t)} \frac{5}{2} nR dT = \int_{t=0}^t R_0 I^2 dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{2} nR (T(t) - T_0) = R_0 I^2 t$$

$$\text{Soit avec } P_0 V_0 = nR T_0$$

$$T(t) = T_0 + \frac{R_0 I^2 t}{\frac{5}{2} nR} = T_0 + \frac{T_0 R_0 I^2 t}{\frac{5}{2} P_0 V_0} = T_0 \left(1 + \frac{R_0 I^2 t}{\frac{5}{2} P_0 V_0} \right)$$

A.N. :

$$T(t = 500 \text{ s}) = T_0 \left(1 + \frac{R_0 I^2 t}{\frac{5}{2} P_0 V_0} \right) = 300 \times \left(1 + 100 \times 1 \times \frac{500}{\frac{5}{2} 10^5 \times 10^{-1}} \right) = 3 \cdot 10^2 \times \left(1 + \frac{5 \cdot 10^4}{\frac{5}{2} \times 10^4} \right) \\ = 900 \text{ K}$$

Version 2 : Chauffage d'un gaz parfait

$$h_0 = \frac{nR T_0}{S P_0} = 25 \text{ cm.}$$

$$\text{Piston bloqué} \rightarrow \text{isochore} \begin{cases} W = 0 \\ Q_V = \Delta U = \frac{nR}{\gamma-1} \Delta T = 47,8 \text{ J} \\ \Delta U = 47,8 \text{ J} \end{cases}$$

$$\text{Piston libre} \rightarrow \text{monobare} \begin{cases} W' = -P_0(V_1 - V_0) = nR(T_0 - T_1) = -19,1 \text{ J} \\ Q'_p = \Delta H' = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \Delta T = 66,9 \text{ J} \\ \Delta U' = 47,8 \text{ J} = \Delta U \end{cases}$$

L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température et la variation de température est identique donc $\Delta U' = \Delta U$.

Exo T15 Transformation lente d'un gaz parfait (1 fois, 2022)

Version 2 : Compression isotherme d'un gaz parfait (2 fois ; 2010)

Cas 1 : piston en équilibre $m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. A l'équilibre : $\vec{a} = \vec{0}$. $-P_0 \cdot S + P_1 \cdot S = 0 \Rightarrow P_0 = P_1$

Cas 2 : piston + masse m en équilibre : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. A l'équilibre : $\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow P_0 = P_1 + \frac{mg}{S}$

$$x = \frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{mg}{P_1 \cdot S}$$

$$W_{12} \stackrel{\substack{\text{EQS+G.P.} \\ \text{+ isotherme}}}{=} -nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT_1 \ln \frac{P_2}{P_1}$$

$$= nRT_1 \ln x; \quad \Delta U_{12} \stackrel{\substack{\text{G.P.:1ère loi} \\ \text{de Joule+isotherme}}}{=} 0 \stackrel{\substack{\text{1er} \\ \text{principe}}}{=} W_{12} + Q_{12}; \quad Q_{12} = -W_{12}$$

$$\Delta S_{12} \geq S_e \stackrel{\substack{\text{1 source} \\ \text{de chaleur}}}{=} \frac{Q_{12}}{T_1} \text{ avec égalité si réversible, inégalité si irréversible.}$$

Exo T16 Détente adiabatique d'un gaz parfait (2010)

$$T_i^\gamma P_i^{1-\gamma} = T_f^\gamma P_f^{1-\gamma} \Rightarrow T_f = T_i \left(\frac{P_i}{P_f} \right)^{\frac{1}{\gamma} - 1} = 204 \text{ K} = -69^\circ\text{C}$$

L'adiabatique a toujours une pente plus importante que l'isotherme pour un GP dans le diagramme de Clapeyron (cf. relation de Reech : rapport de γ entre les deux pentes)

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \text{ avec } \gamma = \frac{nR}{C_v} + 1;$$

$$W \stackrel{\substack{\text{1er principe} \\ \text{+ adiabatique}}}{=} \Delta U \stackrel{\substack{\text{1ere loi de Joule}}}{=} C_v(T_2 - T_1) = C_v T_1 \left(\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right).$$

Exo T17 Compression adiabatique brutale d'un gaz parfait (1 fois, 2013)

$$EI(P_0, V_i, T_i) \rightarrow EF(P_1, V_1, T_1); C_v = \frac{5}{2}nR; C_p = \frac{7}{2}nR; \gamma = \frac{7}{5}$$

$$\text{Eq mécanique du piston : } PFS : -Mg - P_0S + P_1S = 0 \Rightarrow P_1 = \frac{Mg}{S} + P_0$$

$$\text{Tr brutale, considérée adiabatique } (Q = 0). \text{ Loi GP : } V_i = \frac{nRT_i}{P_0} \text{ et } V_1 = \frac{nRT_1}{P_1}$$

$$W = -P_{ext}(V_1 - V_i) = -P_1(V_1 - V_i) = nR \left(T_i \frac{P_1}{P_0} - T_1 \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} T_1 = T_i \left(-\frac{1}{\gamma} + \frac{P_1}{P_0} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \right) = T_i \left(\frac{2P_1}{7P_0} - \frac{5}{7} \right)$$

$$W = \Delta U = C_v(T_1 - T_i) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_i)$$

Exo T18 Détente adiabatique brutale d'un gaz parfait (2 fois, 2011)

$$P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S} \Rightarrow M = \frac{P_1 - P_0}{g} \cdot \frac{V_1}{h} = 4 \text{ kg.}$$

$$\Delta U_{12} \underset{\substack{\text{G.P.} \\ \text{1er principe}}}{=} C_V(T_2 - T_1) \underset{\substack{\text{1er principe}}}{=} Q_{12} + W_{12}; \text{ transformation adiabatique : } Q_{12} = 0; W \underset{\substack{\text{transfo} \\ \text{monobare}}}{=} -P_{ext}(V_2 - V_1)$$

V_1)

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} nR(T_2 - T_1) = 0 - P_0(V_2 - V_1) \quad (\text{transformation brutale monobare : } P_0 = P_{ext}).$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} nR(T_2 - T_1) = -nRT_2 + P_0 \frac{nRT_1}{P_1}$$

$$\Rightarrow T_2 = \left(\frac{3}{5} + \frac{2P_0}{5P_1} \right) T_1 = 280 \text{ K et } V_2 = \frac{nRT_2}{P_2}$$

Exo T19 Compression adiabatique brutale puis variation de température

Exo T20 Bouteille d'oxygène avec légère fuite – détente atmosphérique 1 monobare

- Détente isotherme réversible : G.P. + isotherme + système fermé $\Rightarrow PV = nRT = \text{cte}$ soit $V_1 = V_0 \frac{P_0}{P_1} = 2000 \text{ L}$

$$2. \Delta U \underset{\substack{\text{G.P.} \\ \text{1ere loi} \\ \text{de Joule}}}{=} nC_V \Delta T \underset{\substack{\text{isoT} \\ \text{1er principe}}}{=} 0 \underset{\substack{\text{1er principe}}}{=} W + Q \Rightarrow$$

$$W = -Q \underset{\substack{\text{déf} \\ \text{monobare}}}{=} - \int P_{ext} dV \underset{\substack{\text{monobare}}}{=} - P_{ext} \int dV = -P_{ext}(V_1 - V_0) = -P_{atm}(V_1 - V_0)$$

A.N. : $W = -10^5(2000 - 20) \cdot 10^{-3} = -10^5 \times 1,98 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} \text{ J} = -1,98 \cdot 10^5 \text{ J} = -198 \text{ kJ}$

$W < 0$ car détente et $Q > 0$ car il faut fournir de l'énergie thermique pour maintenir l'agitation thermique des molécules constante alors que celles-ci ont un plus grand volume à leur disposition.

Remarque : attention, on ne peut utiliser $\Delta H \underset{\substack{\text{G.P.} \\ \text{2nde loi} \\ \text{de Joule}}}{=} nC_p \Delta T \underset{\substack{\text{isoT} \\ \text{1er principe}}}{=} 0 \underset{\substack{\text{1er principe} \\ \text{+monobare}}}{=} Q$

Car cette relation $\Delta H \underset{\substack{\text{1er principe} \\ \text{+monobare}}}{=} Q$ nécessite une hypothèse supplémentaire : équilibre avec la pression extérieure à l'état initial et à l'état final, or ici la pression initiale n'est pas égale à la pression extérieure.

- Méthode N°1 : Séparation des variables

$$dp = -\alpha (p - p_{atm}) dt \Leftrightarrow \frac{dp}{p - p_{atm}} = -\alpha dt \Leftrightarrow \int_{P_0}^{P_1} \frac{dp}{p - p_{atm}} = -\alpha \int_{t=0}^{t_1} dt$$

Soit $[\ln(p - p_{atm})]_{P_0}^{P_1} = -\alpha \Delta t$ et $\ln\left(\frac{P_1 - p_{atm}}{P_0 - p_{atm}}\right) = -\alpha \Delta t$

$$\Delta t = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{P_0 - P_{atm}}{P_1 - P_{atm}}\right)$$

Méthode N°2 :

$$\frac{dp}{dt} + \alpha p = \alpha P_{atm} \Rightarrow P(t) \underset{\substack{\text{SGEH+SPEC} \\ \text{C.I.C.I}}}{=} A e^{-\alpha t} + P_{atm} \underset{\substack{\text{C.I.C.I}}}{=} (P_0 - P_{atm}) e^{-\alpha t} + P_{atm}$$

avec $P(t=0) \underset{\substack{\text{C.I.} \\ \text{à } t=0}}{=} P_0 \underset{\substack{\text{expression} \\ \text{à } t=0}}{=} A + P_{atm}$

$$P(t_1) = P_1 = (P_0 - P_{atm})e^{-at_1} + P_{atm}$$

$$\Rightarrow \Delta t = t_1 = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{P_0 - P_{atm}}{P_1 - P_{atm}} \right)$$

A.N. $\Delta t = \frac{1}{4.10^{-4}} \ln \left(\frac{100-1}{2-1} \right) = 2,5.10^3 \ln(100) = 2,5.10^3 \times 2 \times \ln(10) \approx 10^4 \text{s} \approx 3 \text{h}$

Exo T21 Transformation polytropique (2 fois, 2010)

1. $\Delta H = \Delta U + \Delta(PV) = C_p \Delta T = C_v \Delta T + nR \Delta T \Rightarrow C_p - C_v = nR$; on obtient alors $C_{pm} = \frac{\gamma R}{\gamma-1}$; $C_{vm} = \frac{R}{\gamma-1}$;

2. **b)** Transformation quasi-statique : $\delta W = -P \cdot dV$

Méthode 1 : on a $PV^k = cte = P_1 V_1^k = P_2 V_2^k$

$$W = - \int P \cdot dV = - \int \frac{P_1 V_1^k}{V^k} \cdot dV = -P_1 V_1^k \int V^{-k} \cdot dV = -P_1 V_1^k \left[\frac{V^{-k+1}}{-k+1} \right]_{V_1}^{V_2}$$

$$W = - \frac{P_1 V_1^k}{1-k} (V_2^{-k+1} - V_1^{-k+1}) = \frac{P_1 V_1^k}{k-1} (V_2^{-k+1} - V_1^{-k+1}) = \frac{P_1 V_1^k V_2^{-k+1} - P_1 V_1^k V_2^{-k+1} V_1^{-k+1}}{k-1}$$

$$= \frac{P_2 V_2^k V_2^{-k+1} - P_1 V_1^k}{k-1} = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{k-1}$$

Méthode 2 :

Or $PV^k = cte \Rightarrow \ln P + k \ln V = \ln cte \Rightarrow \frac{dP}{P} + k \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow V dP = -k P dV$

Comme $d(PV) = P dV + V dP = (1-k) P dV \Rightarrow P dV = \frac{d(PV)}{1-k}$

$\delta W = -P \cdot dV = \frac{d(PV)}{k-1}$ par intégration : $W = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{k-1}$

; $\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1} (T_2 - T_1) = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\gamma-1}$.

$Q_{12} = \Delta U_{12} - W_{12} = \frac{(k-\gamma)(p_2 V_2 - p_1 V_1)}{(\gamma-1)(k-1)} = C(T_2 - T_1)$ avec $C = nR \left(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{k-1} \right) = nR \left(\frac{k-\gamma}{(\gamma-1)(k-1)} \right)$.

C est homogène à une capacité thermique.

$k = \gamma$: $C = 0$, il n'y a pas d'échange thermique, la transformation est adiabatique.

$k = 0$: $C = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}$, la relation polytropique s'écrit $P = Cte$, la transformation est isobare.

$k \rightarrow \infty$: $C = \frac{nR}{\gamma-1} = C_v$, la relation polytropique s'écrit $V = Cte$, la transformation est isochore.

$k = 1$: $C \rightarrow \infty$, la relation polytropique s'écrit $PV = Cte$, soit $T = Cte$, la transformation est isotherme. $C \rightarrow \infty$ signifie que le système peut emmagasiner tout transfert thermique sans changer de température.

GAZ PARFAIT : COMPARAISON DE DEUX CHEMINS DIFFERENTS

Exo T22 Remplir une bouteille : chemin isotherme ou adiabatique réversible (5 fois, 2023)

$P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma$ et $W = \Delta U = nC_{vm}(T_2 - T_1)$ car $Q = 0$

Allure diagramme de Clapeyron : cf. cours THM 3

$P'_2 = P_1 \frac{V_1}{V'_2}$ et $Q' = -W' = +nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$ car $\Delta U' = 0$.

L'adiabatique est plus pentue que l'isotherme car $\gamma > 1$

Le travail est l'aire sous la courbe dans le diagramme de Clapeyron donc plus important pour l'isotherme

Version 2

$$P_2 = P_1 \frac{V_1}{V_2}; W = -P_1 V_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right); P_2' = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma; W' = \Delta U = C_v(T_2' - T_1) = \frac{P_2' V_2 - P_1 V_1}{\gamma - 1}; \text{ en valeur absolue, } |W| > |W'|$$

Exo T23 Transformation isotherme comparée à isobare + isochore (10 fois, 2018)

chemin 1 :

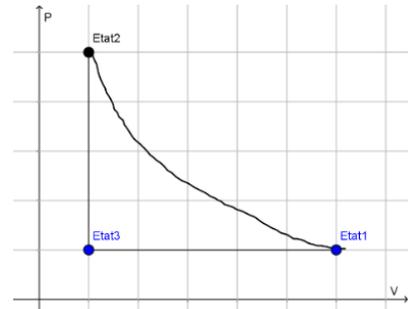
$$W_{isoth} = - \int P_{ext} dV \stackrel{\substack{\text{réversible donc} \\ \text{EQSMR}}}{=} - \int P dV \stackrel{\substack{\text{G.P.}}}{=} - \int \frac{nRT}{V} dV \stackrel{\substack{\text{isot}}}{=} = -nRT_0 \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) \stackrel{\substack{\text{G.P.}}}{=} -p_0 V_0 \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right);$$

$$\Delta U_a \stackrel{\substack{\text{G.P.}}}{=} nC_v \Delta T \stackrel{\substack{\text{isot}}}{=} 0 \stackrel{\substack{\text{1er} \\ \text{principe}}}{=} Q_{isoth} + W_{isoth}; \quad Q_{isoth} = -W_{isoth} =$$

$$p_0 V_0 \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$$

Compression : $\frac{V_1}{V_0} < 1$ soit $W_{isoth} > 0$: il faut bien fournir un travail au système gaz pour le comprimer ;

on a donc $Q_{isoth} = -W_{isoth} < 0$: pour rester à la même température (même agitation thermique) dans un volume plus petit, le système doit céder de la chaleur au milieu extérieur.



chemin 2 : $W_{isobare+isochore} = W_{isobare} + W_{isochore}$ avec $W_{isochore} = - \int P_{ext} dV \stackrel{\substack{\text{G.P.}}}{=} 0$ et $V=cte$

$$W_{isobare} = - \int P_{ext} dV \stackrel{\substack{\text{G.P.}}}{=} -p_0 \int dV = -p_0(V_1 - V_0) \quad \text{d'où}$$

$$W_{isobare+isochore} = -p_0(V_1 - V_0) + 0 = p_0(V_0 - V_1);$$

$$Q_{isobare+isochore} = Q_{isobare} + Q_{isochore} \text{ avec } \Delta U_{isob} \stackrel{\substack{\text{1er principe} \\ \text{+ isochore}}}{=} Q_{isochore} \stackrel{\substack{\text{G.P.}}}{=} nC_v \Delta T = C_v(T_0 - T_{inter})$$

$$\text{Et avec } \Delta H_{isob} \stackrel{\substack{\text{1er principe} \\ \text{+ isobare}}}{=} Q_{isobare} \stackrel{\substack{\text{G.P.}}}{=} nC_p \Delta T = C_p(T_{inter} - T_0)$$

$$Q_{isobare+isochore} = C_p(T_{inter} - T_0) + C_v(T_0 - T_{inter}) = (C_p - C_v)(T_{inter} - T_0) = nR(T_{inter} - T_0)$$

Relation de Mayer

$$Q_{isobare+isochore} = nRT_{inter} - nRT_0 = p_0 V_1 - p_0 V_0 = p_0(V_1 - V_0)$$

$\Delta U = W + Q = 0$ indépendante du chemin suivi

Version 2 (2 fois, 2016)

$$W = p_0(V_0 - V_1)$$

$$Q = p_0(V_1 - V_0) \text{ (nécessite de connaître la relation de Mayer)}$$

$$\Delta U = 0$$

Exo T24 Transformation adiabatique réversible comparée à isobare + isochore

$$\Delta U_{AB} = C_v(T_B - T_A); W_{AB1} = \Delta U_{AB}; W_{AB2} = -p_A(V_B - V_A); \Delta S_{AB} = 0; \left(\sum \frac{Q_i}{T_i}\right)_1 = 0; \left(\sum \frac{Q_i}{T_i}\right)_2 = ? < 0$$

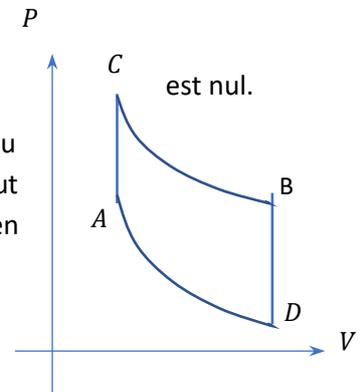
Exo T25 Variation de l'ordre de 2 transformations isochore – isotherme (TV / VT) (4 fois, 2022)

1. Allure dans le diagramme de Clapeyron avec $P_B > P_A$

Les transformations AC et BD sont isochores, le travail des forces de pression associé

Les transformations CB et AD sont des détentes, avec $W = -\int P_{ext}dV$: le travail est du signe opposé à la variation de volume ; il est donc positif pour une compression (il faut effectivement fournir un travail pour comprimer) et négatif pour une détente (c'est en réalité le système qui cède du travail au milieu extérieur lors d'une détente).

On a donc $W < 0$



$$2. \quad \Delta U_1 \underset{\substack{\text{G.P.} \\ \text{1ère loi} \\ \text{de Joule}}}{=} n \frac{R}{\gamma-1} (T_B - T_A) \underset{\text{1er principe}}{=} W_1 + Q_1;$$

$$W_1 = -\int P_{ext}dV \underset{\substack{\text{réversible donc} \\ \text{EQSMR}}}{=} -\int PdV \underset{\text{G.P.}}{=} -\int \frac{nRT}{V}dV \underset{\text{isoT}}{=} -nRT_B \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

$$Q_1 \underset{\text{1er principe}}{=} \Delta U_1 - W_1 = n \frac{R}{\gamma-1} (T_B - T_A) + nRT_B \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

$$\Delta U_1 = 0,5 \times \frac{8,31}{0,4} \times (480 - 360) = \frac{5}{4} \times (4 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^3) = 1,25 \cdot 10^3 \text{ J} = 1,25 \text{ kJ};$$

$$W_1 = -0,5 \times 8,31 \times 480 \times \ln(7,5) = -2 \cdot 10^3 \times 2 = -4 \cdot 10^3 \text{ J} = -4 \text{ kJ}; Q_1 = 1,25 + 4 = 5,5 \text{ kJ}$$

$$3. \text{ De la même manière } \Delta U_2 \underset{\substack{\text{G.P.} \\ \text{1ère loi} \\ \text{de Joule}}}{=} n \frac{R}{\gamma-1} (T_B - T_A);$$

$$W_2 = -\int P_{ext}dV \underset{\substack{\text{réversible donc} \\ \text{EQSMR}}}{=} -\int PdV \underset{\text{G.P.}}{=} -\int \frac{nRT}{V}dV \underset{\text{isoT}}{=} -nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right);$$

$$Q_2 \underset{\text{1er principe}}{=} \Delta U_2 - W_2 = n \frac{R}{\gamma-1} (T_B - T_A) + nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

$$\Delta U_2 = 1,25 \text{ kJ};$$

$$W_2 = -0,5 \times 8,31 \times 360 \times \ln(7,5) = -0,5 \times 3 \cdot 10^3 \times 2 = -3 \cdot 10^3 \text{ J} = -3 \text{ kJ};$$

$$Q_2 = 1,25 + 3 = 4,5 \text{ kJ}$$

4. Dans les deux cas, $W_{AB} < 0$ car il s'agit d'une détente (le volume augmente) ; en valeur absolue, $|W_1| > |W_2|$ car la première détente a lieu à une pression plus élevée, l'étape isochore ayant eu lieu en premier et ayant préalablement élevé la température.

Version 2

Allure dans le diagramme de Clapeyron avec $P_B > P_A$

$$2. \quad \Delta U_1 = n \frac{R}{\gamma-1} (T_B - T_A); W_1 = -nRT_B \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right); Q_1 = nC_{vm}(T_B - T_A) + nRT_B \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

$$\Delta U_1 = 0,5 \times \frac{8,31}{0,4} \times (480 - 360) = \frac{5}{4} \times (4 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^3) = 1,25 \cdot 10^3 \text{ J} = 1,25 \text{ kJ} ;$$

$$W_1 = -0,5 \times 8,31 \times 480 \times \ln(7,5) = -2 \cdot 10^3 \times 2 = -4 \cdot 10^3 \text{ J} = -4 \text{ kJ} ; Q_1 = 1,25 + 4 = 5,5 \text{ kJ}$$

$$3. \quad \Delta U_2 = n \frac{R}{\gamma-1} (T_B - T_A) ; W_2 = -nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) ; Q_2 = nC_{vm}(T_B - T_A) + nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

$$\Delta U_2 = 1,25 \text{ kJ} ;$$

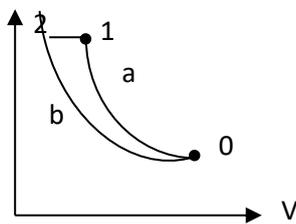
$$W_2 = -0,5 \times 8,31 \times 360 \times \ln(7,5) = -0,5 \times 3 \cdot 10^3 \times 2 = -3 \cdot 10^3 \text{ J} = -3 \text{ kJ} ;$$

$$Q_2 = 1,25 + 3 = 4,5 \text{ kJ}$$

$$4. \quad W_{AB} < 0 \text{ car le volume augmente ; en valeur absolue, } |W_1| > |W_2|$$

■ TRANSFORMATIONS AVEC BILANS ENTROPIQUES

Exo T26 Transformation adiabatique réversible comparée à isotherme + isobare (1 fois, 2010)



$$a : W_a = \Delta U_a = \frac{nRT_0}{\gamma-1} \left(\left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - 1 \right) \text{ et } Q_a = 0$$

$$b : \Delta U_b = \Delta U_a$$

$$W_b = -nRT_0 \ln \frac{V_2}{V_0} - P_1(V_1 - V_2) = nRT_0 \ln \frac{P_1}{P_0} - nRT_0 \left(\left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - 1 \right)$$

$$Q_b = -nRT_0 \ln \frac{P_1}{P_0} + \Delta H_{2-1} = -nRT_0 \ln \frac{P_1}{P_0} + \frac{\gamma n R T_0}{\gamma-1} \left(\left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - 1 \right)$$

Exo T27 Compression brutale (6 fois, 2013)

$$W = nRT(x-1) ; Q = -W ; \Delta U = 0 ; \Delta S = -nR \ln(x) ; \Delta S > Q/T ; \text{transfo irréversible car brutale.}$$

Exo T28 Cylindre à parois adiabatiques (1 fois, 2006)

$$p_1 = p_0 + \frac{Mg}{s} = 1,08 \cdot 10^6 \text{ Pa} ; T_1 = T_0 \frac{(\gamma-1)\frac{p_1}{p_0} + 1}{\gamma} = 1055 \text{ K} ;$$

$$p_2 = p_0 ; T_2 = T_1 \frac{(\gamma-1)\frac{p_0}{p_1} + 1}{\gamma} = 782 \text{ K} ;$$

Exo T29 Étude entropique d'un transfert thermique (8 fois, 2015)

$$\Delta S = \frac{5}{2} \frac{p_A V_A}{T_A} \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) ;$$

$$Q = \frac{5}{2} \frac{p_A V_A}{T_A} (T_B - T_A) ;$$

$\Delta S - \frac{Q}{T_B} = 6,7 \text{ mJ} \cdot \text{K}^{-1} > 0$: transformation irréversible ; échange thermique entre corps à des températures différentes (existence d'une inhomogénéité d'un paramètre intensif).

Exo T30 Détente dans le vide (5 fois, 2011)

$$\Delta U = 0 ; T_2 = T_1 ; p_2 = p_1/11 ; \Delta S = nR \ln 11 ; \text{second ppe OK !}$$

Version 2

$$n = \frac{P_1 V_1}{RT} \text{ et } m = M \cdot n \Rightarrow m = \frac{P_1 V_1}{RT} (M_C + 2M_O) = \frac{8.10^5 \times 2.10^{-3}}{8,314 \times 300} (12 + 2 \times 16) = 28,2 \text{ g}$$

Conservation du volume : $V_f = 2 \cdot V_1 = 4 \text{ L}$

Système isolé : $Q = 0$ et parois indéformables : $W = 0$. $\Delta U = 0 = C_v \cdot \Delta T \Rightarrow \Delta T = 0$

La transformation est isotherme : $T_f = T_1 = 300 \text{ K}$

Conservation de la quantité de matière : $n_f = n_1 \Rightarrow P_f V_f = P_1 V_1 \Rightarrow P_f = \frac{P_1 V_1}{V_f} = \frac{8.2}{4} = 4 \text{ bar}$

La transformation est irréversible (Détente de Joule Gay-Lussac).

Exo T31 Bilan entropique d'un transfert thermique

$$\Delta S = n C_m \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) ; \frac{Q}{T_c} = \frac{n C_m (T_f - T_i)}{T_c} ; \text{vérifier que } \Delta S > \frac{Q}{T_c}.$$

CHANGEMENTS D'ETAT ET REACTIONS CHIMIQUES

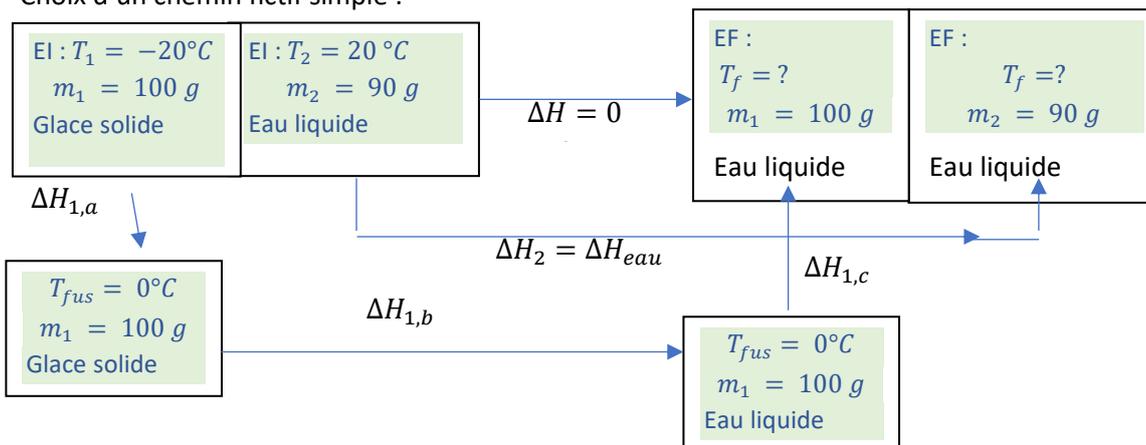
Exo T32 Mélange eau liquide + glace

Système : {glaces + eau} supposé calorifugé, les échanges thermiques étant négligés. Par ailleurs, en l'absence de données sur la capacité thermique du verre, on la suppose négligeable devant les autres capacités thermiques mises en jeu.

$$\Delta H \stackrel{\text{H fonction d'état extensive}}{=} \Delta H_{\text{glaces}} + \Delta H_{\text{eau}} \stackrel{\text{1er principe monobare}}{=} Q_p \stackrel{\text{adiabatique}}{=} 0$$

Hypothèse : état final eau liquide seule (toute la glace a fondu).

Choix d'un chemin fictif simple :



En l'absence de données, on néglige la variation d'enthalpie du verre devant celles de la glace et de l'eau.

$$\text{Soit } \Delta H \stackrel{\text{H fonction d'état extensive}}{=} \Delta H_{\text{glace}} + \Delta H_{\text{eau}} = \Delta H_{1,a} + \Delta H_{1,b} + \Delta H_{1,c} + \Delta H_2$$

$$\Delta H_{1,a} \stackrel{\text{eau solide PCI}}{=} m_1 c_g (T_{\text{fus}} - T_1) ; \quad \Delta H_{1,b} \stackrel{\text{transition de phase isoT isoP}}{=} m_1 \Delta_{\text{fus}} h ;$$

$$\Delta H_{1,c} \underset{\substack{\text{eau liquide} \\ \text{PCII}}}{=} m_1 c_e (T_f - T_{fus})$$

$$\Delta H_{eau} = \Delta H_2 \underset{\substack{\text{eau liquide} \\ \text{PCII}}}{=} m_2 c_e (T_f - T_2)$$

Dans le bilan enthalpique, on a donc :

$$\Delta H \underset{\substack{\text{PCII+} \\ \text{Changement} \\ \text{d'état}}}{=} m_1 c_g (T_{fus} - T_1) + m_1 l_{fus} + m_1 C_l (T_f - T_{fus}) + m_2 C_l (T_f - T_2) \underset{\text{adiabatique}}{=} 0$$

D'où

$$T_f = - \frac{m_1 c_g (T_{fus} - T_1) + m_1 l_{fus} - m_1 C_l T_{fus} - m_2 C_l T_2}{m_1 C_l + m_2 C_l}$$

$$T_f = - \frac{0,9 \times 4,0 \times 20 + 0,1 \times 2,0 \times (-20) - 0,1 \times 330}{1 \times 4,0} = \frac{72 - 4 - 33}{4} = \frac{35}{4} \approx 9^\circ\text{C}$$

Hypothèse validée, la température finale obtenue étant cohérente avec du liquide seul (il faut une température comprise entre 0°C et 100°C à pression atmosphérique).

Exo T33 Une soupe trop chaude (1 fois, 2023)

1) système {eau + soupe} : Évolutions rapides, échanges thermiques avec l'extérieur (sopièrre, air extérieur) négligeables : transformation adiabatique. De plus, l'eau et la soupe sont des PCII.

2) Système {eau + soupe}

$$\Delta H \underset{\substack{\text{1er principe} \\ \text{monobare}}}{=} Q \underset{\text{adiabatique}}{=} 0 \underset{\substack{\text{H fonction} \\ \text{d'état extensive}}}{=} \Delta H_{soupe} + \Delta H_{eau}$$

$$\Delta H \underset{\text{PCII}}{=} \mu_{soupe} V_{soupe} c_{soupe} (T_f - T_1) + m_{eau} c_{eau} (T_f - T_2)$$

$$c_{soupe} \approx c_{eau} \quad \mu_{soupe} \approx \mu_{eau}$$

$$0 = \mu_{eau} V_{soupe} (T_f - T_1) + m_{eau} (T_f - T_2)$$

$$m_{eau} = \mu_{eau} V_{soupe} \frac{T_1 - T_f}{T_f - T_2}$$

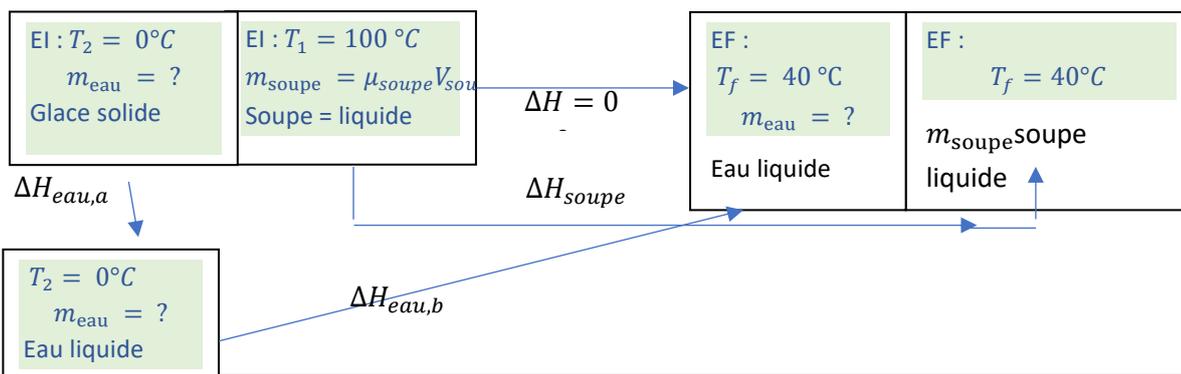
$$\text{A. N.:} \quad m_{eau} = 10^3 \times 0,5 \times 10^{-3} \times \frac{60}{40} = \mathbf{0,75 \text{ kg}}$$

3) Système {eau + soupe} : de la même manière :

$$\Delta H \underset{\substack{\text{1er principe} \\ \text{monobare}}}{=} Q \underset{\text{adiabatique}}{=} 0 \underset{\substack{\text{H fonction} \\ \text{d'état extensive}}}{=} \Delta H_{soupe} + \Delta H_{eau}$$

E.I. de l'eau : solide à $T_2 = 0^\circ\text{C} = T_{fusion}$, E.F. de l'eau : liquide à T_f

Choix d'un chemin fictif simple :



$$0 = \mu_{soupe} V_{soupe} c_{soupe} (T_f - T_1) + m_{eau} (\ell_{fusion} + c_{eau} (T_f - T_2))$$

$$0 = \mu_{eau} V_{soupe} c_{eau} (T_f - T_1) + m_{eau} (\ell_{fusion} + c_{eau} (T_f - T_2))$$

$$m_{eau} = \mu_{eau} V_{soupe} \frac{c_{eau} (T_1 - T_f)}{\ell_{fusion} + c_{eau} (T_f - T_2)}$$

$$m_{eau} = 10^3 \times 0,5 \times 10^{-3} \times \frac{4,2 \times 60}{330 + 4,2 \times 40} = \frac{30 \times 4,2}{330 + 16,8} = \frac{12,6}{330 + 16,8} = \frac{12,6}{337} \approx 3,7 \times 10^{-2} \text{ kg} = \mathbf{37 \text{ g}}$$

Comment établir l'équation différentielle (donnée dans le sujet) :

système : la soupe, qui échange avec l'air ambiant

Premier principe entre t et t+dt : $dU = \delta Q = \phi dt$ où ϕ = puissance thermique = flux de chaleur reçue par le système

$$CdT \stackrel{\substack{\text{par définition} \\ R \text{ thermique}}}{=} -\frac{1}{R} (T - T_{ext}) dt$$

$$C \frac{dT}{dt} + \frac{1}{R} (T - T_{ext}) = 0$$

4) Solution générale

$$T = T_{ext} + A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

C.I.C.I. : $T(t = 0) = T_1$ initialement soit $T = T_{ext} + (T_1 - T_{ext}) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$

5) cours

Exo T34 Vaporisation de l'eau (1 fois, 2010)

EI ($m_L = 1 \text{ kg}$, $V_L = 1 \text{ L}$, P_{atm} , $T_0 = 100^\circ\text{C}$) \rightarrow EF ($m_V = 1 \text{ kg}$, $V_V = 1,67 \text{ m}^3$, P_{atm} , $T_0 = 100^\circ\text{C}$)

$$\Delta H = m_L \cdot l_v = 2,25 \cdot 10^6 \text{ J}, \text{ pour la transformation isobare : } Q = \Delta H = 2,25 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$W = -P_{ext}(V_V - V_L) \text{ avec } P_{atm} = P_{ext} \text{ or } V_L \ll V_V \Rightarrow W = -P_{atm} V_V = -1,69 \cdot 10^5 \text{ J}$$

$$1^{\text{er}} \text{ ppe : } \Delta U = Q + W = 2,08 \cdot 10^5 \text{ J}$$

$$\Delta H = Q ; \Delta S = \frac{m l_v}{T_{373}}$$

Exo T35 Mélange diphasé (1 fois, 2012)

diagramme, transfo AB verticale

$s_B = s_A$ entre s_v et s_ℓ pour la pression de 0,05 bar, donc mélange diphasé

$$T_B = 306 \text{ K} ; x_v = \frac{s_B - s_\ell}{s_v - s_\ell} = \frac{7,35 - 0,50}{8,45 - 0,50} = \frac{6,85}{7,95} = 86 \% ; h_B = 2227 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Exo T36 Système diphasé (1 fois, 2015)

a. Si équilibre liquide-vapeur, alors $p = 1 \text{ atm} \approx 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et

$$n_{vap} = \frac{pV}{RT} = \frac{10^5 \times 10^{-3}}{8,31 \times 373} \approx \frac{10^2}{8 \times 4 \cdot 10^2} \approx \frac{1}{32} \text{ mol (exactement : } 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ mol)}$$

Or le nombre de mol d'eau est $n_{eau} = \frac{m}{M} = \frac{1}{18} \text{ mol}$

Donc $n_{vap} < n_{eau}$: seule une partie de l'eau est vaporisée, il y a bien équilibre liquide-vapeur.

b. $x_{vap} = \frac{n_{vap}}{n_{eau}} \approx \frac{18}{32} \approx 18 \times 0,03 \approx 0,54$ (exactement : 0,59)

c. $\Delta H = x_{vap} m \Delta_{vap} h$

$$\Delta U = \Delta H - p_f V_f + p_i V_i$$

$$p_i V_i \ll p_f V_f$$

$$\Delta U = \Delta H - p_f V_f = x_{vap} m \Delta_{vap} h - pV$$

d. pression constante (dès que changement d'état), donc $\Delta H = Q$. démo : ...

Exo THM.88. Combustion de l'éthanol et Élévation de température (3 fois, 2022)

État final : 3 mol de $H_2O_{(g)}$ et 2 mol de $CO_2_{(g)}$;

ΔH (tout) = $Q = 0$ (calcul classique de température de flamme)

$$T_f - T_i = \frac{-\Delta_r H^0}{2 C_{pm}(CO_2) + 3 C_{pm}(H_2O)} = \frac{1600 \cdot 10^3}{5 \times 36} = \frac{1600}{180} \times 10^3 = \frac{80}{9} \times 10^3 \approx 9 \cdot 10^3 \text{ K}$$

Avec N_2

$$T_f - T_i = \frac{-\Delta_r H^0}{2 C_{pm}(CO_2) + 3 C_{pm}(H_2O) + 12 C_{pm}(N_2)} = \frac{1600 \cdot 10^3}{5 \times 36 + 12 \times 30} = \frac{1600}{180 + 360} \times 10^3 = \frac{80}{27} \times 10^3 \approx 3 \cdot 10^3 \text{ K}$$

CYCLES THERMODYNAMIQUES

Exo T37 Cycle pTV

a. $T_1 = \frac{p_1 V_1}{R} = \frac{p_0 V_0}{R}$;

c. $W > 0$: cycle récepteur

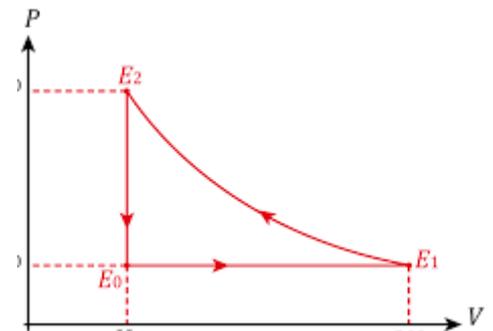
$$W_{01} = -p_0(V_1 - V_0) = -p_0 V_0 ; W_{12} = +p_0 V_0 \ln 2 ; W_{20} = 0 ;$$

$$Q_{01} = \Delta H_{0 \rightarrow 1} = C_p(T_1 - T_0) = \frac{\gamma}{\gamma-1} (p_0 V_1 - p_0 V_0) = \frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 V_0 ;$$

$$Q_{12} \stackrel{\substack{\text{1er principe} \\ + GP+isoT}}{=} -W_{1 \rightarrow 2} = +nRT_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = -2p_0 V_0 \ln 2 ;$$

$$Q_{20} \stackrel{\text{isochore}}{=} C_v(T_0 - T_1) = -\frac{p_0 V_0}{\gamma-1} ;$$

d. $\Delta U = -p_0 V_0 + p_0 V_0 \ln 2 + 0 + \frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 V_0 - p_0 V_0 \ln 2 - \frac{p_0 V_0}{\gamma-1} = p_0 V_0 \left(-1 + \frac{\gamma}{\gamma-1} - \frac{1}{\gamma-1} \right) = 0$
comm...

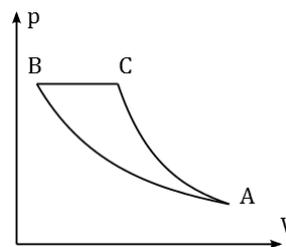


Exo T38 Cycle TVS

Exo T39 Cycle moteur TpS

1.

T_A	$T_B = T_A$	T_C
p_A	$p_B = p_A \left(\frac{T_A}{T_C}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$	$p_C = p_A \left(\frac{T_A}{T_C}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$
$V_A = \frac{nRT_A}{p_A}$	$V_B = \frac{nRT_A}{p_A} \left(\frac{T_C}{T_A}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$	$V_C = \frac{nRT_A}{p_A} \left(\frac{T_A}{T_C}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$

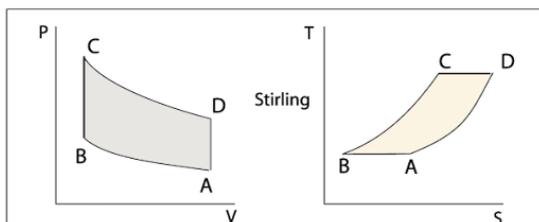


2.

$\Delta U_{AB} = 0$	$\Delta U_{BC} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_C - T_A)$	$\Delta U_{CA} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_A - T_C)$
$W_{AB} = -nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = \dots$	$W_{BC} = -nR (T_C - T_A)$	$W_{CA} = \Delta U_{CA} = \dots$
$Q_{AB} = -W_{AB}$	$Q_{BC} = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} (T_C - T_A)$	$Q_{CA} = 0$

3. $\eta = \frac{-W}{Q_{BC}} = 1 + \frac{Q_{AB}}{Q_{BC}} = 1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}{(T_C - T_A)}$

Exo T40 Moteur Stirling (T,V,T,V)



1.

	AB	BC	CD	DA
W	$-nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$	0	$-nRT_2 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$	0
Q	$+nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$	$C_v (T_2 - T_1)$	$+nRT_2 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$	$C_v (T_1 - T_2)$

rendement : $r = \frac{-W_{AB} - W_{CD}}{Q_{CD}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 0,50$

rendement identique au rendement de Carnot si on admet que toute la chaleur libérée sur DA est récupérée et réinvestie sur BC. Moteur Stirling.

Version 2 (3 fois, 2015)

$n = 0,1 \text{ mol} ; p_B = 5 \text{ bar} ; p_C = 15 \text{ bar} ; p_D = 3 \text{ bar} ; W_{AB} = 400 \text{ J} ; W_{BC} = W_{DA} = 0 ; W_{CD} = -1,2 \text{ kJ} ; r = 1 - \frac{T_A}{T_C}$.

Version 3 : cycle moteur ;

$n = 0,441 \text{ mol} ; p_B = 2 \text{ bar} ; p_C = 2,21 \text{ bar} ; p_D = 1,10 \text{ bar} ; W_{AB} = 693 \text{ J} ; W_{BC} = W_{DA} = 0 ; W_{CD} = -764 \text{ J} ;$

Exo T41 Cycle de Lenoir (8 fois, 2021)

Cycle décrit dans le sens horaire dans diagramme de Clapeyron, donc moteur.

$$W_{12} = 0 ; Q_{12} = C_v(T_2 - T_1) ; Q_{23} = 0 ; W_{23} = C_v(T_3 - T_2) ; Q_{31} = C_p(T_1 - T_3) ;$$

$$W_{31} = -p_1(V_1 - V_3) = -nR(T_1 - T_3).$$

$$r = \frac{-W}{Q_{12}} = \frac{Q_{12} + Q_{31}}{Q_{12}} = 1 + \frac{Q_{31}}{Q_{12}} = 1 + \frac{C_p(T_1 - T_3)}{C_v(T_2 - T_1)} = 1 + \gamma \frac{T_1 - T_3}{T_2 - T_1}$$

$$r = 1 + \frac{7}{5} \times \frac{-50}{100} = 1 - \frac{7}{10} = 0,30.$$

Version 2 (8 fois, 2022)

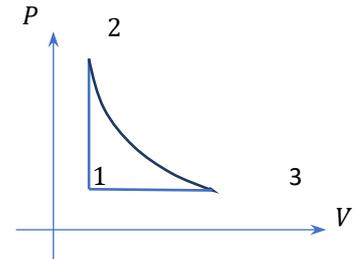
Sens de rotation : sens horaire, d'où $W_{cycle} < 0$

($W_{23} < 0$ et $|W_{23}| > |W_{31}|$) il s'agit donc d'un cycle moteur ;

$$\Delta U_{12} \stackrel{\text{1er principe}}{=} W_{12} + Q_{12} \stackrel{\text{isochore}}{=} Q_{12} \stackrel{\text{G.P. 1ère loi de Joule}}{=} C_v(T_2 - T_1) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_2 -$$

$T_1)$

(lors des transformations isochores, le travail des forces de pression est nul ; en l'absence de travail autre que celui des forces de pression, on a alors $\Delta U_{12} = Q_{12}$: la variation d'énergie interne représente la quantité de chaleur reçue algébriquement par le système au cours de la transformation.)



$$\Delta H_{31} \stackrel{\text{1er principe + isobare}}{=} Q_{31} = C_p(T_1 - T_3) = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}(T_1 - T_3);$$

Remarque : $T_2 > T_1$ donc $Q_{12} > 0$ (cohérent avec l'étape de combustion), et $T_1 < T_3$ donc $Q_{31} < 0$

$$r = \left| \frac{\text{grandeur utile}}{\text{grandeur de coût}} \right| = \left| \frac{W_{cycle}}{Q_{C, reçue}} \right| = \left| \frac{W_{cycle}}{Q_{Combustion}} \right| = \frac{-W_{cycle}}{Q_{12}}$$

$$\Delta U_{cycle} \stackrel{\text{1er principe}}{=} W_{cycle} + Q_{cycle} \stackrel{\text{cycle + U fonction d'état}}{=} 0$$

$$\text{Soit } -W_{cycle} = Q_{cycle} = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} \stackrel{\text{23 adiabatique}}{=} Q_{12} + Q_{31}$$

$$r = \frac{Q_{12} + Q_{31}}{Q_{12}} = 1 + \frac{Q_{31}}{Q_{12}} = 1 + \frac{C_p(T_1 - T_3)}{C_v(T_2 - T_1)} = 1 + \gamma \frac{T_1 - T_3}{T_2 - T_1}$$

$$r = 1 + \frac{7}{5} \times \frac{-50}{200} = 1 - \frac{7}{20} = 0,65$$

Version 4 (5 fois, 2009)

$$r = 1 + \gamma \frac{T_1 - T_3}{T_2 - T_1} = 1 + \gamma \frac{1 - \beta^{1/\gamma}}{\beta - 1} = 24,5 \%$$

Version 5 (8 fois ; 2015)

Travail reçu par le gaz :

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA}$$

$$W = 0 + C_v(T_C - T_B) - p_A(V_A - V_C) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_C - T_B) - nR(T_A - T_C), \text{ avec } n = 1 \text{ mol}$$

Travail produit

$$W_{fourni} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_B - T_C) + nR(T_A - T_C), \text{ avec } n = 1 \text{ mol}$$

Rendement

$$\eta = \frac{W_{fourni}}{Q_{AB}} = \frac{\frac{nR}{\gamma-1}(T_B-T_C) + nR(T_A-T_C)}{\frac{nR}{\gamma-1}(T_B-T_A)} = \frac{T_B-T_C + (\gamma-1)(T_A-T_C)}{T_B-T_A} = 1 + \gamma \frac{T_A-T_C}{T_B-T_A}$$

$$\eta = 1 + \gamma \frac{1 - \frac{T_C}{T_A}}{\frac{T_B}{T_A} - 1}$$

$$AB \text{ isochore, } \tau = \frac{P_B}{P_A} = \frac{T_B}{T_A}$$

Loi de Laplace sur BC :

$$p_B^{1-\gamma} T_B^\gamma = p_C^{1-\gamma} T_C^\gamma = p_A^{1-\gamma} T_A^\gamma \quad \text{d'où} \quad \frac{T_C}{T_B} = \left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = (\tau)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad \text{et}$$

$$\frac{T_C}{T_A} = \frac{T_C T_B}{T_B T_A} = (\tau)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \tau = (\tau)^{1 + \frac{1-\gamma}{\gamma}} = (\tau)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$\text{Conclusion : } \eta = 1 + \gamma \frac{1 - (\tau)^{\frac{1}{\gamma}}}{\tau - 1}$$

Exo T42 Moteur Diesel (5 fois, 2021)

$$r = 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\beta^{-\gamma} - \alpha^{-\gamma}}{\beta^{-1} - \alpha^{-1}}$$

Attention ci-dessous : corriger a et b par alpha et beta

1. Allure du cycle dans le diagramme P(V)

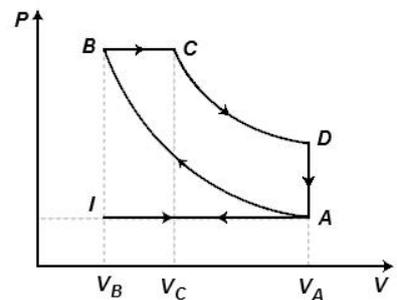
$$2. \quad Q_{AB} = 0; \quad Q_{BC} = n \cdot C_{pm}(T_C - T_B); \quad Q_{CD} = 0; \\ Q_{DA} = n \cdot C_{vm}(T_A - T_D)$$

$$3. \quad \eta = \frac{-W}{Q_{BC}} = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$

$$4. \quad T_B = T_A a^{\gamma-1}; \quad T_C = T_B \left(\frac{V_C}{V_B}\right) = T_B \left(\frac{a}{b}\right) = T_A \frac{a^\gamma}{b};$$

$$T_D = T_C \left(\frac{1}{b}\right)^{\gamma-1} = T_A \frac{a^\gamma}{b^\gamma}$$

$$5. \quad \eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\frac{a^\gamma}{b^\gamma} - 1}{\frac{a^\gamma}{b} - a^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{a^\gamma - b^\gamma}{b^\gamma \left(\frac{a^\gamma}{b} - a^{\gamma-1}\right)} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{a^\gamma - b^\gamma}{a^{\gamma-1} b^{\gamma-1} (a - b)}$$



Exo T43 Cycle de Carnot (1 fois, 2010)

$$Q_1 = Q_{AB} = -nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}; \quad Q_2 = Q_{CD} = -nRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C}$$

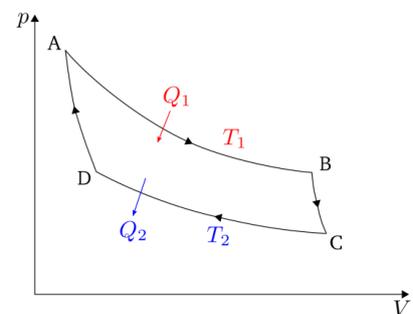
$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = -nR \ln \frac{V_B}{V_A} - nR \ln \frac{V_D}{V_C} = nR \ln \frac{V_A \cdot V_C}{V_B \cdot V_D}$$

$$\text{Tr adiabatique réversible : } T_1 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1}; \quad T_2 V_D^{\gamma-1} = T_1 V_A^{\gamma-1}$$

$$V_A = V_D \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}; \quad V_C = V_B \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = nR \ln \frac{V_D \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot V_B \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}{V_B \cdot V_D} = 0 \Rightarrow Q_2 = -\frac{T_2}{T_1} Q_1$$

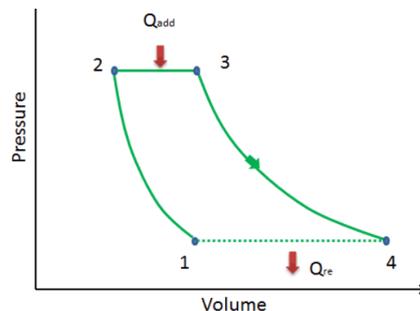
$$1^{er} \text{ ppe sur un cycle : } \Delta U = Q_1 + Q_2 + W = 0 \Rightarrow W = Q_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) < 0 \text{ car } T_2 < T_1$$



Exo T44 Cycle de Brayton (S,P,S, P)

1. Diagramme PV :

Sens de rotation : sens horaire, d'où $W_{cycle} < 0$: Cycle moteur ; deux verticales et deux exponentielles croissantes dans le diagramme TS. Travail des forces de pression > 0 pour une compression et < 0 pour une détente, on a donc :



$$W_{AB} > 0 ; W_{BC} < 0 ; W_{CD} < 0 ; W_{DA} > 0 ;$$

$$Q_{AB} = 0 ; Q_{BC} > 0 ; Q_{CD} = 0 ; Q_{DA} < 0.$$

$$Q_{AB} \underset{\text{adiabatique}}{=} 0 \text{ et } W_{AB} \underset{\substack{\text{1er principe+G.P.} \\ \text{+ adiabatique}}}{=} C_v(T_B - T_A) > 0$$

$$Q_{BC} \underset{\substack{\text{1er principe+G.P.} \\ \text{+ isobare}}}{=} C_p(T_C - T_B) > 0 \text{ et } W_{BC} \underset{\text{isobare}}{=} -P_B(V_C - V_B) < 0$$

$$Q_{CD} \underset{\text{adiabatique}}{=} 0 \text{ et } W_{CD} \underset{\substack{\text{1er principe+G.P.} \\ \text{+ adiabatique}}}{=} C_v(T_D - T_C) < 0$$

$$Q_{DA} \underset{\substack{\text{1er principe+G.P.} \\ \text{+ isobare}}}{=} C_p(T_A - T_D) < 0 \text{ et } W_{DA} = -P_A(V_A - V_D) > 0$$

$$2. \quad r = \frac{-W}{Q_{BC}} \underset{\substack{\text{1er principe} \\ \text{sur un cycle}}}{=} \frac{Q_{BC} + Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}}$$

3. Hypothèse : gaz parfait ; $r = 1 + \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B}$

Lois de Laplace (adiabatique réversible + G.P.) sur AB et CD $\Rightarrow T_B = T_A \alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ et $T_C = T_D \alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Rightarrow$

$$r = 1 - \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

THM 55 ter - Cycle d'Ericsson (10 fois, 2022, et de très nombreuses variantes)

Sens horaire car moteur

$$W_{12} = -Q_{12} = -nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = -nRT_1 \ln \frac{P_1}{P_2} = nRT_1 \ln a ;$$

$$W_{23} = -P_2(V_3 - V_2) = -nR(T_2 - T_1) ;$$

$$W_{34} = -Q_{34} = -nRT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -nRT_2 \ln \frac{P_2}{P_1} = -nRT_2 \ln a ;$$

$$W_{41} = -P_3(V_1 - V_4) = -nR(T_1 - T_2)$$

$$\Rightarrow W = nR \ln a (T_1 - T_2)$$

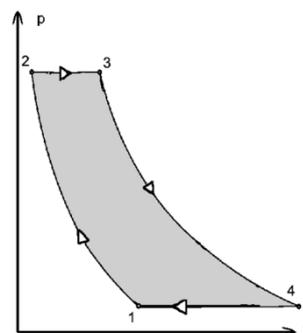
$$T_C = T_2 ; Q_c = Q_{23} + Q_{34} = nC_{pm}(T_2 - T_1) + nRT_2 \ln a$$

$$Q_{cycle} = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41}$$

$$Q_{cycle} = -nRT_1 \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) + nC_{pm}(T_2 - T_1) + nRT_2 \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) + nC_{pm}(T_1 - T_2)$$

$$Q_{cycle} = nR (T_2 - T_1) \ln(a)$$

$$\eta = \text{"but" / coût} = \frac{\text{énergie recherchée sur un cycle}}{\text{énergie investie sur un cycle}}$$



pour l'utilisateur soit

$$\eta = \left| \frac{W}{Q_c} \right| = \frac{-W_{\text{cycle}}}{Q_{23} + Q_{34}} = \frac{Q_{\text{cycle}}}{Q_{23} + Q_{34}} = \frac{nR(T_2 - T_1) \ln(a)}{nC_{pm}(T_2 - T_1) + nRT_2 \ln(a)} = \frac{(T_2 - T_1) \ln(a)}{\frac{7}{2}(T_2 - T_1) + T_2 \ln(a)}$$

$$r_{\text{max}} = r_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Version 3 (1 fois, 2011)

$$Q_{\text{cycle}} = nR(T_2 - T_1) \ln(a);$$

$$\text{si } T_2 > T_1, \text{ cycle moteur : } \eta = \frac{Q_{\text{cycle}}}{Q_{23} + Q_{34}} = \frac{(T_2 - T_1)}{\frac{7}{2}(T_2 - T_1) + T_2 \ln(a)}; \eta_{\text{max}} = 1 - \frac{T_1}{T_2};$$

si $T_1 > T_2$, cycle récepteur : deux cas possibles.

MACHINES THERMIQUES

Exo T45 Pompe à chaleur (2 fois, 2010)

a. Cours

$$b. \quad \text{COP}_{PAC} = e_{PAC} = \left| \frac{Q_c}{W} \right|$$

L'efficacité maximale correspond à un cycle de Carnot réversible constitué de 2 adiabatiques et de 2 isothermes Premier principe : $W + Q_c + Q_f = 0$

$$\text{Second principe : } \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0$$

$$\text{D'où } e_{PAC} = \frac{T_c}{T_c - T_f} = 22,5$$

$$c. \quad P_{\text{elec}} = \frac{P_{\text{tot}}}{\text{COP}} = P_{\text{tot}} \frac{T_c - T_f}{T_c} = 1,5 \cdot 10^3 \frac{20}{293} = \frac{30}{293} \cdot 10^3 \approx 1.10^2 \text{ W}; \text{ avec des résistances électriques, } 1,5 \text{ kW nécessaires.}$$

d. Inconvénient de la pac : prix d'installation élevé, niveau sonore qui peut être important, durée de vie de l'ordre de 10 à 15 ans, utilisent un fluide frigorigène en général polluant (gaz à effet de serre).

Avantage du chauffage électrique : prix d'installation bas, prix de maintenance peu onéreux.

Conclusion : chauffage électrique moins cher à l'installation et en maintenance que les pac, mais plus cher à l'utilisation.

Exo T46 PAC pour chauffer l'eau d'une piscine (2 fois, 2018)

La machine reçoit $W > 0$, prélève $Q_f > 0$ à la source froide (air extérieur) et cède de la chaleur à la source chaude (eau de la piscine) (notée $-Q_c$).

L'efficacité maximale correspond à un cycle de Carnot réversible constitué de 2 adiabatiques et de 2 isothermes.

$$\text{Premier principe : } W + Q_c + Q_f = 0$$

$$\text{Second principe : } \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0$$

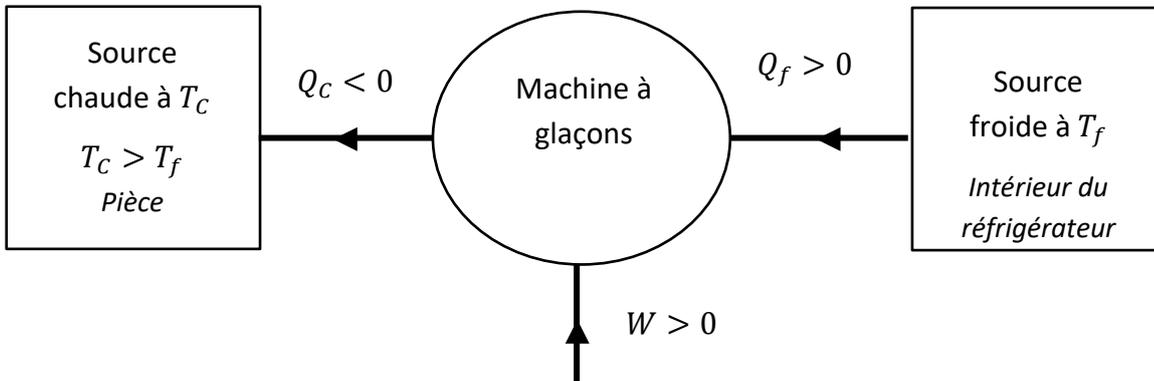
$$\text{D'où } \text{COP}_{PAC} = \frac{T_c}{T_c - T_f} = \frac{T_p}{T_p - T_a} = \frac{293}{13} \approx 23$$

$$-Q_c = \rho V c \Delta T = \text{COP}_{PAC} \times W = \text{COP}_{PAC} \times \mathcal{P} \times \Delta t$$

$$P = \frac{\rho V c \Delta T}{CoP_{P\grave{a}c} \times \Delta t} = \frac{1.10^3 \times 30 \times 4,2.10^3 \times 1}{\frac{293}{13} \times 10^3} = \frac{13 \times 30 \times 4,2}{293} \times 10^3 \approx 5 \text{ kW}$$

Exo T47 Machine à glaçons (4 fois, 2022)

Schéma de principe d'un réfrigérateur :



La machine prélève $Q_f > 0$ à la source froide, reçoit $W > 0$ et cède de la chaleur à la source chaude (notée $-Q_c$).

Le cycle correspond alors à un cycle de Carnot réversible constitué de 2 adiabatiques et de 2 isothermes

Système : fluide frigorigène

Premier principe sur un cycle pour une machine ditherme : $W + Q_c + Q_f = 0$ avec $W = P \cdot \Delta t$

Second principe sur un cycle pour une machine ditherme réversible (entropie créée nulle) :

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0 \quad \text{d'où} \quad CoP_{frigo} = \frac{Q_f}{W} = \frac{T_f}{T_c - T_f} \quad \text{et}$$

$$Q_f = \frac{T_f}{T_c - T_f} P \Delta t$$

$$\text{A.N. : } Q_f = \frac{273}{24} \times 10^3 \times 4 \times 60 = 273 \cdot 10^4 = \mathbf{2,73 \text{ MJ}}$$

ATTENTION : températures à convertir en K

En considérant le système masse d'eau contenue dans le réfrigérateur transformée en glace. L'intérieur du réfrigérateur constitue la source froide de la machine. La source froide fournit Q_f au fluide frigorigène, elle reçoit donc $-Q_f$ de ce fluide frigorigène, ce qui entraîne le refroidissement et ou le changement d'état (ou simplement le maintien à température froide en compensant les fuites thermiques).

La masse de glace maximale formée est obtenue en considérant que l'intégralité de la quantité Q_f a été cédée par l'eau à 0°C et a donc intégralement servi au changement d'état.

Premier principe au système eau :

$$\Delta H_{\text{eau}} \underset{\text{isobare}}{=} Q_{\text{reçue,eau}} = -Q_f \underset{\substack{\text{solidification} \\ \text{à } T,P \text{ constants}}}{=} m(-L_{fus}) \Rightarrow$$

$$m = \frac{Q_f}{L_{fus}} = \frac{2,73 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^5} = 9,1 \text{ kg}$$

Exo T48 Machine frigorifique tritherme (4 fois, 2013)

$Q_1 > 0$ (but) ; $Q_3 > 0$ (coût) ; $Q_2 < 0$

$e = \frac{Q_1}{Q_3}$ calculable facilement si on suppose la machine réversible

on écrit les deux pps de la thermo et on obtient $e = \frac{T_3 - T_2}{T_2 - T_1} \frac{T_1}{T_3} = 3,08$

Exo T49 Climatiseur avec pseudo-source (5 fois, 2019)

$\delta W + \delta Q_c + \delta Q_f = 0$ premier principe

$\frac{\delta Q_c}{T_c} + \frac{\delta Q_f}{T} = 0$ second principe

$-\delta Q_f = C dT$ $-\delta Q_f$ chaleur reçue par la pièce de capacité thermique C ($dT < 0$)

$\delta W = P dt$

d'où l'équation différentielle demandée : $P dt + \left(\frac{T_c}{T} - 1\right) C dT = 0$

Résolution (équation à variables séparables)

$$P dt = -\left(\frac{T_c}{T} - 1\right) C dT = C \left(dT - T_c \frac{dT}{T}\right)$$

On intègre entre $t = 0$ (température $T_0 = 286 K$) et $t = t_1$ (température $T_1 = 284 K$),

$$P t_1 = C \left((T_1 - T_0) - T_c \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) \right)$$

d'où

$$C = \frac{P t_1}{\left((T_1 - T_0) - T_c \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) \right)} = 9,5 \cdot 10^4 J \cdot K^{-1}$$

Version 2 (3 fois, 2021)

1) Notations :

à $t = 0$, température $T_0 = 286 K$; à $t = t_1$, température $T_1 = 284 K$;

$W + Q_c + Q_f = 0$ premier principe + cycle + ditherme

$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_{pièce}} = 0$ second principe + cycle + fonctionnement réversible + ditherme

$$\mathcal{P}_f = \frac{\delta Q_f}{dt} = \frac{Q_f}{t_1}$$

Coeff de performance moyen :

$$CoP = \frac{Q_f}{W} \stackrel{\substack{\text{1er principe} \\ + \text{cycle}}}{\equiv} - \frac{Q_f}{Q_c + Q_f} = - \frac{1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}}$$

Or $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_{pièce}} = 0$ soit $\frac{Q_c}{T_c} = -\frac{Q_f}{T_{pièce}}$ d'où $\frac{Q_c}{Q_f} = -\frac{T_c}{T_{pièce}}$ soit

$$CoP = \frac{Q_f}{W} = - \frac{1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}} = - \frac{1}{1 - \frac{T_c}{T_{pièce}}} = \frac{T_{pièce}}{T_c - T_{pièce}}$$

Premier principe au système pièce de capacité thermique C :

$$\Delta H \stackrel{\substack{\text{PCI} \\ \text{+ isobare}}}{\equiv} C(T_1 - T_0) \stackrel{\substack{\text{1er principe} \\ \text{+ isobare}}}{\equiv} Q_{reçue} = -Q_f$$

Avec $T_1 - T_0 = -2 \text{ K} < 0$; de plus la pièce constituant la source froide, elle cède Q_f au fluide caloporteur et reçoit donc $Q_{reçue\ piece} = -Q_f$

On a donc $-Q_f = C (T_1 - T_0)$ et $W = Pt_1$ d'où :

$$COP = \frac{Q_f}{W} = \frac{C (T_0 - T_1)}{Pt_1} = \frac{T_{pièce}}{T_c - T_{pièce}}$$

$$C = \frac{T_{pièce}}{T_c - T_{pièce}} \frac{Pt_1}{(T_0 - T_1)} = \frac{286 \cdot 10^4}{14 \cdot 2} \approx 1.10^5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

Exo T50 Etude d'une machine vapeur

A-B isotherme : $h_B = h_A + \ell_v(T_1) = 2775 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $s_B = s_A + \frac{\ell_v(T_1)}{T_1} = 6,57 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

B - C : isentropique : $s_C = s_B = 6,57 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

C - E : isobare - isotherme : $\Delta s = \frac{q}{T} = \frac{\Delta h}{T}$ on a donc $h_C = h_E + T_2(s_C - s_E) = 2077 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

D - A : isentropique : $s_D = s_A = 2,13 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

E - D : isobare - isotherme : $h_D = h_E + T_2(s_D - s_E) = 665,6 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

2. $q_1 = h_B - h_A = \ell_v(T_1) = 2013 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

et $w = -q_{AB} - q_{CD} = -\ell_v(T_1) - (h_D - h_C) = -601,6 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

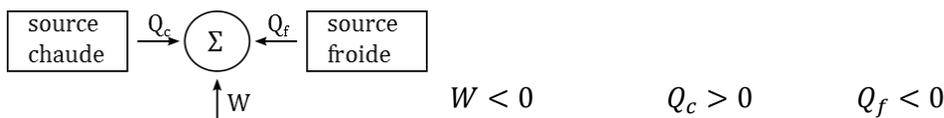
3. $\eta = \frac{-w}{q_1} = 30 \%$

On retrouve le rendement Carnot car c'est un cycle constitué de 2 isothermes et de 2 adiabatiques avec

$$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 30 \%$$

Exo T51 Réchauffement d'un fleuve au voisinage d'une centrale nucléaire

1) Système : fluide caloporteur (ici l'eau circulant dans la centrale), en définissant les grandeurs reçues par le fluide caloporteur :



Source froide : eau du fleuve, source chaude : chaudière (réacteur nucléaire), travail échangé avec la turbine.

Il s'agit d'un cycle moteur dont le but est de fournir un travail permettant de faire tourner la turbine, qui elle-même met en rotation l'alternateur. Les cycles moteurs ($W < 0$) représentés dans les diagrammes usuels sont parcourus dans le sens trigonométrique.

2) Premier principe sur un cycle pour une machine ditherme : $W + Q_f + Q_c = 0$ d'où $Q_f = -W - Q_c$ par définition de l'efficacité η d'un cycle moteur :

$$\eta = \left| \frac{\text{grandeur utile}}{\text{grandeur de coût}} \right| = \left| \frac{W_{cycle}}{Q_{c, reçue}} \right| = \left| \frac{W_{cycle}}{Q_{combustion}} \right| = -\frac{W}{Q_c}$$

soit $Q_c = -\frac{W}{\eta}$ d'où

$$Q_f = -W - \frac{-W}{\eta} = -W \left(1 - \frac{1}{\eta} \right) = \boxed{Q_f = P \Delta t_{cycle} \left(1 - \frac{1}{\eta} \right)}$$

De plus, selon l'énoncé,

$$\eta = 0,60 e_{\text{carnot}} \underset{\text{moteur}}{\equiv} 0,60 \times \left(1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}}\right) = 0,60 \times \left(1 - \frac{T_{fleuve}}{T_{chaudière}}\right) = 0,60 \times \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$Q_f = -W - \frac{-W}{\eta} = -W \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) = \boxed{Q_f = P \Delta t_{\text{cycle}} \left(1 - \frac{1}{\eta}\right)}$$

De plus, selon l'énoncé, $\eta = 0,60 e_{\text{carnot}} = 0,60 \times \left(1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}}\right) = 0,60 \times \left(1 - \frac{T_{fleuve}}{T_{chaudière}}\right)$

- 3) système : eau du fleuve qui constitue la source froide en contact thermique avec le système pour la durée d'un cycle. La chaleur Q_f reçue par le fluide caloporteur est fournie par cette eau du fleuve, qui reçoit donc $Q_{fleuve} = -Q_f$

1^{er} principe au système fleuve : $\Delta H_{\text{fleuve}} \underset{\text{monobare}}{\equiv} Q_{\text{fleuve}} \underset{\text{PCH}}{\equiv} m_{\text{fleuve}} c_{\text{eau}} \Delta T_{\text{fleuve}} = -Q_f$

$$\boxed{Q_f = -\rho D_v \Delta t_{\text{cycle}} c_{\text{eau}} \Delta T_{\text{fleuve}}}$$

- 4) En exploitant les résultats précédents :

$$D_v \rho \Delta t_{\text{cycle}} c_{\text{eau}} \Delta T_{\text{fleuve}} = P \Delta t_{\text{cycle}} \left(\frac{1}{\eta} - 1\right)$$

$$\eta = 0,60 \times \left(1 - \frac{T_{fleuve}}{T_{chaudière}}\right) = 0,60 \times \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = 0,60 \times \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

$$\boxed{\Delta T_{\text{fleuve}} = \frac{P \times \left(\frac{T_1}{T_1 - T_2} \times \frac{1}{0,60} - 1\right)}{D_v \rho c_{\text{eau}}}}$$

$$\Delta T_{\text{fleuve}} = \frac{10^9 \times \left(\frac{700}{412} \times \frac{1}{0,60} - 1\right)}{400 \times 10^3 \times 4 \times 10^3}$$

$$\Delta T_{\text{fleuve}} = \frac{10^9 \times \left(\frac{700 - 247}{247}\right)}{1,6 \times 10^9} = \frac{453}{1,6 \times 247} \approx \frac{300}{250} \text{ K}$$

$$\Delta T_{\text{fleuve}} \approx 1,2 \text{ K}$$

Exo T52 Turboréacteur (2 fois, 2021)

- 1) Premier principe industriel (attention ! fluide en écoulement ! ne pas utiliser l'argument isobare) :

$$\Delta h_{AB} + \Delta e_{cAB} = \dot{w}_{tAB} + q_{AB} \underset{\substack{\text{pas de pièces} \\ \text{méca mobiles}}}{\equiv} q = h_B - h_A \underset{\text{G.P.}}{\equiv} c_p (T_B - T_A) = q \Rightarrow$$

$$T_B = T_A + \frac{q}{c_p} = 1000 + \frac{10^6}{10^3} = 2000 \text{ K}$$

- 2) On fait l'hypothèse (forte) d'une adiabatique réversible pour un GP (approximation grossière donnant un ordre de grandeur) Loi de Laplace : $T_C = T_B \left(\frac{P_A}{P_C}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$; AN pour vérifier : $T_C = 2000 \times (4)^{\frac{-0,4}{1,4}} = 1346 \text{ K}$

- 3) Premier principe industriel (PPI) :

$$\Delta h_{BC} + \Delta e_{cBC} = \dot{w}_{tBC} + q_{BC} \Rightarrow h_C - h_B + \frac{1}{2}(v_C^2 - v_B^2) \underset{\substack{\text{pas de pièces} \\ \text{méca mobiles} \\ \text{+ adiabatique}}}{\equiv} 0 \Rightarrow c_p (T_C - T_B) + \frac{1}{2} v_C^2 = 0$$

$$v_C = \sqrt{2c_p (T_B - T_C)} = \sqrt{2 \times 10^3 \times 700} = \sqrt{1,4 \times 10^6} \approx 1,2 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- 4) $D_m = \rho_C D_{vC} = \frac{P_C M}{RT_C} v_C S_C$
- 5) $P_{th} = D_m q = 50 \text{ MW}$
- 6) $\eta = \frac{D_m e_c}{P_{th}} = \frac{e_c}{q} = \frac{50 \times \frac{1}{2} \times 1,410^6}{50 \cdot 10^6} = 70 \%$

Version abrégée :

Premier principe industriel général :

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = w_i + q$$

Premier principe industriel appliqué à la tuyère (absence de travail utile et d'échanges de chaleur)

$$\Delta h + \Delta e_c + 0 = 0 + 0 \quad \text{et} \quad v_s \gg v_e \quad \text{soit} \quad c_p(T_s - T_e) + \frac{1}{2}v_s^2 = 0$$

$$v_s = \sqrt{2c_p(T_e - T_s)}$$

Loi de Laplace (GP, transfo adiabatique réversible) : $T_s = T_e \left(\frac{p_e}{p_s}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

$$v_s = \sqrt{2c_p T_e \left(1 - \left(\frac{p_e}{p_s}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right)}$$

■ TRANSFERTS THERMIQUES EN REGIME STATIONNAIRE

Exo T53 Barreau métallique (2023)

1. Hypothèse régime stationnaire

Loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x$, on a en régime stationnaire un flux de chaleur Φ constant, avec sur une section droite $\Phi = j_{th}(x) \cdot S$, soit pour un système de section constante $j_{th} = cte$ soit $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$

2. $\Rightarrow \frac{dT}{dx} = A \Rightarrow T(x) = Ax + B$

Conditions aux limites :

$$T(x=0) = T_0 = B$$

$$T(x=L) = T_1 = AL + T_0 \Rightarrow A = \frac{T_1 - T_0}{L} \Rightarrow T(x) = \frac{T_1 - T_0}{L} x + T_0$$

3. En régime stationnaire $\phi_{th} = j_{th} \cdot S = \lambda \frac{dT}{dx} \cdot S = \lambda \frac{T_1 - T_0}{L} \cdot S$

4. $R_{th} = \frac{\Delta T}{\phi_{th}} = \frac{L}{\lambda S}$

Exo T54 Simple et double vitrages (7 fois, 2022)

1. $\varphi_1 = -\lambda_v \frac{dT}{dx} \times S = -\lambda_v \frac{\Delta T}{\Delta x} \times S$ en justifiant que $\frac{dT}{dx}$ est constante ; $\varphi_1 = \lambda_v \frac{T_i - T_e}{e_v} \times S$; $R_{th1} = \frac{T_i - T_e}{\varphi_1} = \frac{e_v}{\lambda_v S}$;

2. résistances en série car ...

$$R_{th2} = R_{th1} + R_{th \text{ air}} + R_{th1} = 2 \frac{e_v}{\lambda_v S} + \frac{e_a}{\lambda_a S} \text{ (cf. valeurs numériques, } R_{th \text{ air}} \gg R_{th1})$$

$$\varphi_2 = \frac{T_i - T_e}{R_{th2}} = \frac{T_i - T_e}{2 \frac{e_v}{\lambda_v S} + \frac{e_a}{\lambda_a S}} \approx (T_i - T_e) \frac{\lambda_a S}{e_a}$$

3. résistance de convection : $R_{th \text{ conv}} = \frac{T_s - T_e}{\varphi_c} = \frac{1}{hS}$

résistances en série car ...

$$R_{th \text{ totale}} = R_{th \text{ fenêtre}} + R_{th \text{ conv}} ; \varphi = \frac{T_i - T_e}{R_{th \text{ totale}}}$$

AN. Version 1 : pour 1 m^2 : $\phi_1 = 1,25 \times \frac{20}{3.10^{-3}} \times 1 \approx 8,3 \text{ kW}$; $R_{th1} = \frac{3.10^{-3}}{1,25 \times 1} = \frac{4 \times 3.10^{-3}}{5} = 2,4.10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$;
 $R_{th2} = 2 \times 2,4.10^{-3} + \frac{3.10^{-3}}{0,025 \times 1} = 4,8.10^{-3} + 0,12 \approx 0,12 \text{ K.W}^{-1}$; $\phi_2 \approx 167 \text{ W}$; $\frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{R_{th1}}{R_{th2}} = \frac{2,4.10^{-3}}{0,12} = 2.10^{-2}$;
 $R_{th \text{ conv}} = \frac{1}{hS} = \frac{1}{10 \times 1} = 0,1 \text{ K.W}^{-1}$; $R_{th \text{ totale}} \approx 0,22 \text{ K.W}^{-1}$; $\phi_3 \approx 91 \text{ W}$.

AN. Version 3 : $\phi_1 = 0,8 \times \frac{16}{8.10^{-3}} \times 1 = 1,6 \text{ kW}$; $R_{th1} = \frac{8.10^{-3}}{0,8 \times 1} = 10^{-2} \text{ K.W}^{-1}$;
 $R_{th2} = 2.10^{-2} + \frac{12.10^{-3}}{3.10^{-2} \times 1} = 2.10^{-2} + 4.10^{-1} = 0,42 \approx 0,4 \text{ K.W}^{-1}$; $\phi_2 \approx 40 \text{ W}$;
 $R_{th \text{ conv}} = \frac{1}{hS} = \frac{1}{10 \times 1} = 0,1 \text{ K.W}^{-1}$; $R_{th \text{ totale}} \approx 0,5 \text{ K.W}^{-1}$; $\phi_3 \approx 32 \text{ W}$

Version 2 : Simple et double vitrage (2 fois, 2021)

- $\phi_1 = j_{th} S = \lambda_V \frac{T_i - T_e}{e_V} S = 1,2 \times \frac{10}{3.10^{-3}} \times 1 = 4 \text{ 000 W.m}^{-2}$
 - $R_{ThV} = \frac{\Delta T}{\phi_1} = \frac{e_V}{\lambda_V S} = 2,5.10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$
- Les résistances sont en série car traversées par le même flux thermique donc :
$$R_{ThA} = 2 R_{ThV} + R_{Th \text{ air}} = 2 \frac{e_V}{\lambda_V S} + \frac{e_A}{\lambda_A S} = 2 \times 2,5.10^{-3} + \frac{12.10^{-3}}{24.10^{-3}} \approx 0,5 \text{ K.W}^{-1}$$
 - $\Rightarrow \phi_2 = \frac{\Delta T}{R_{ThA}} = \frac{10}{0,5} \approx 20 \text{ W.m}^{-2}$
 - $\frac{\phi_2}{\phi_1} = 5.10^{-3}$: les pertes thermiques ont été divisées par 200.
- $$R_{ThC} = \frac{\Delta T}{\phi_{cc}} = \frac{1}{hS}$$

Les résistances sont en série donc :

$$R_{Th \text{ total}} = R_{ThV} + R_{ThC} = \frac{e_V}{\lambda_V S} + \frac{1}{hS} = 2,5.10^{-3} + \frac{1}{50} = 22,5.10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$$

$$\Rightarrow \phi_3 = \frac{\Delta T}{R_{Th \text{ total}}} = \frac{T_e - T_i}{\frac{e_V}{\lambda_V S} + \frac{1}{hS}} = \frac{10}{22,5.10^{-3}} = 444 \text{ W.m}^{-2}$$

Exo THM 63-bis : Sensation de chaleur au toucher (13 fois, 2022)

5) Vecteur densité de flux thermique

D'après la loi de Fourier, $\vec{j}_Q(x) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) \underset{\substack{\text{ système à} \\ \text{ 1 dimension}}}{=} -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x$.

En régime stationnaire flux constant donc variation linéaire de la température : $T_i(x) = A_i x + B_i$

Rappel :

bilan d'enthalpie pour une tranche d'épaisseur dx : $d^2 H \underset{\substack{\text{ 1er système} \\ \text{ P=cte}}}{=} \delta^2 Q$

En régime stationnaire, $d^2 H = 0$ soit $\delta^2 Q = 0$

En exprimant la quantité de chaleur reçue (entrée en x - sortie en $x + dx$) à l'aide des flux thermiques :

$$\delta^2 Q = (\Phi(x) - \Phi(x + dx)) dt = 0 \text{ soit } \Phi(x) = \Phi(x + dx) = \text{cte}$$

En introduisant le vecteur densité de flux et en exploitant la loi de Fourier, la section étant constante :

$$\Phi(x) = \iint_{\text{section}} \vec{J}_Q(x) d\vec{S} = \iint_{\text{section}} -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) d\vec{S} = \iint_{\text{section}} -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x \cdot d\vec{S} \text{ soit } \frac{dT}{dx} = \text{cte et } T(x) = Ax + B \text{ (ou } \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \text{), soit } \frac{dT}{dx} = \text{cte} = A = \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Remarque : Attention ! ce ne sont pas les mêmes coefficients a priori ! les conductivités étant différentes, le gradient de température n'est pas le même.

A l'aide des C.L. en $x = 0$ et $x = -L$ dans le cylindre 1, puis en $x = 0$ et $x = L$ dans le cylindre 2, on trouve :

$$j_1 = -\lambda_1 \frac{dT}{dx_1} = -\lambda_1 A_1 = -\lambda_1 \frac{T_0 - T_1}{L} = \lambda_1 \frac{T_1 - T_0}{L} \text{ et } j_2 = -\lambda_2 \frac{dT}{dx_2} = -\lambda_2 A_2 = -\lambda_2 \frac{T_2 - T_0}{L} = \lambda_2 \frac{T_0 - T_2}{L}$$

En régime stationnaire, il y a continuité du flux, donc, les sections étant identiques, de $j_{qx} = -\lambda \frac{dT}{dx}$ (d'après la loi de Fourier) :

$$j_{qx1}(x < 0) = j_1 = j_{qx2}(x > 0) = j_2, \text{ soit } \lambda_1 \frac{dT}{dx_1} = \lambda_2 \frac{dT}{dx_2} \Leftrightarrow \lambda_1 A_1 = \lambda_2 A_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \frac{T_0 - T_1}{L} = \lambda_2 \frac{T_2 - T_0}{L}$$

d'où

$$\left(\frac{\lambda_1}{L} + \frac{\lambda_2}{L}\right) T_0 = \frac{\lambda_1}{L} T_1 + \frac{\lambda_2}{L} T_2 \text{ soit } T_0 = \frac{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Remarque : On pouvait retrouver ce résultat à l'aide des résistances thermiques en série : $\Phi = \frac{T_1 - T_c}{R_1} = \frac{T_c - T_2}{R_2}$

avec $R_i = \frac{L_i}{\lambda_i S}$

(on pouvait également utiliser un pont diviseur de température ! $T_1 - T_c = \frac{R_1}{R_1 + R_2} (T_1 - T_2)$)

A l'aide des C.L. en $x = 0$ et $x = -L$ dans le cylindre 1, puis en $x = 0$ et $x = L$ dans le cylindre 2, en exploitant

$$T_i(x) = A_i x + B_i :$$

$$\text{Cylindre 1 : } T_1(x) = -\frac{T_1 - T_0}{L} x + T_0 ; \text{ cylindre 2 : } T_2(x) = -\frac{T_0 - T_2}{L} x + T_0$$

$$4) T_0 = \frac{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \text{ A.N. : Contact main-bois } T_0 = \frac{10 \times 310 + 1 \times 293}{11} = \frac{3393}{11} = 35,4^\circ\text{C} ;$$

$$\text{Contact main-acier } T_0 = \frac{10 \times 310 + 100 \times 293}{110} = \frac{32400}{110} = \frac{3240}{11} = 21,5^\circ\text{C}$$

Physiologiquement, l'observateur ressent au niveau du contact la température intermédiaire T_0 , ce qui justifie que le bois lui paraît plus chaud que l'acier.

Exo T55 Barres cylindriques en contact (3 fois, 2022)

1. Premier principe pour une transformation monobare et une phase condensée :

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\frac{d^2 H}{\text{Variation d'enthalpie pendant dt du volume } d\tau}} & \stackrel{=}{=} & \underbrace{\frac{\delta^2 Q}{\text{transfert thermique pendant dt à travers la surface } S_{tot} \text{ délimitant le volume}}} \\ \text{1er principe transformation monobare} & & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow dm \cdot c_p \cdot dT = \delta Q(x) - \delta Q(x + dx)$$

$$\rho \cdot d\tau \cdot c_p \cdot dT = [j_{th}(x) - j_{th}(x + dx)] \cdot S \cdot dt$$

$$\Leftrightarrow \rho \cdot S \cdot dx \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dt = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} dx \cdot S \cdot dt \Leftrightarrow \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x}$$

$$\text{Loi de Fourier : } \vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x \Rightarrow \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

2. En régime stationnaire : $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \Rightarrow T(x) = Ax + B$

Conditions aux Limites :

• Pour $-\ell_1 < x < 0$:

$$T(x = -\ell_1) = T_{e1} = -A\ell_1 + B \quad \text{et} \quad T(x = 0) = T_j = B \quad \Rightarrow T(x) = T_j + \frac{T_j - T_{e1}}{\ell_1} x$$

• Pour $0 < x < +\ell_2$:

$$T(x = +\ell_2) = T_{e2} = A\ell_2 + B \quad \text{et} \quad T(x = 0) = T_j = B \quad \Rightarrow T(x) = T_j + \frac{T_{e2} - T_j}{\ell_2} x$$

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \Rightarrow j_1 = \lambda_1 \frac{T_j - T_{e1}}{\ell_1} \quad \text{et} \quad j_2 = \lambda_2 \frac{T_{e2} - T_j}{\ell_2}$$

$j_1(O^-) = j_2(O^+)$ car \vec{j}_{th} est à flux conservatif et est indépendant de x en régime stationnaire

$$\Rightarrow \lambda_1 \frac{T_j - T_{e1}}{\ell_1} = \lambda_2 \frac{T_{e2} - T_j}{\ell_2} \quad \Rightarrow T_j = \frac{\lambda_2 \ell_1 T_{e2} + \lambda_1 \ell_2 T_{e1}}{\lambda_1 \ell_2 + \lambda_2 \ell_1}$$

Exo T56 Patinoire (2 fois, 2022)

- $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{dT}{dz} \vec{u}_z$, j_{th} en $W.m^{-2}$ et λ en $W.m^{-1}.K^{-1}$
- Régime Stationnaire : $j = cte = -\frac{P}{S}$, valeur en $z = e$. Or $\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \Rightarrow j = -\lambda \frac{dT}{dz}$,
d'où $T = \frac{P}{S\lambda} z + A$. CL en $z = 0$: $T(z) = T(0)$ d'où $T(z) = \frac{P}{S\lambda} z + T(0)$
- $T = \frac{T(e) - T(0)}{e} z + T(0)$
- $j_{th} = -\lambda \frac{T(e) - T(0)}{e} = -\frac{P}{S}$, d'où $T(e) = T(0) + \frac{Pe}{S\lambda} = -10 + \frac{50.10^3 \times 10.10^{-2}}{2.5.10^3 \times 2} = -9^\circ C$
- $R_{th} = \frac{T(e) - T(0)}{P} = \frac{e}{S\lambda} = \frac{10.10^{-2}}{2.5.10^3 \times 2} = 2.10^{-5} K.W^{-1}$

Exo T57 Ailette de refroidissement (1 fois, 2017)

1. Conduction : Transfert d'énergie thermique d'origine microscopique via l'agitation thermique à travers un milieu matériel, sans mouvement macroscopique de matière.

Convection : Transfert d'énergie thermique dû à un mouvement macroscopique de matière, d'un fluide (liquide - gaz).

2. Système : Tranche d'épaisseur dx ; $dH = \delta Q_{recu} = \delta Q(x) - \delta Q(x + dx) - dP . dt$

En régime stationnaire, le flux rentrant et le flux sortant sont égaux :

$$\delta Q(x) = \delta Q(x + dx) + dP . dt$$

$$j_{th}(x) . ab . dt = j_{th}(x + dx) . ab . dt + h [T(x) - T_a] . 2(b + a) . dx . dt \quad \text{avec} \quad b + a \approx b$$

$$j_{th}(x) . a - j_{th}(x + dx) . a = h [T(x) - T_a] 2dx$$

$$-\frac{dj_{th}}{dx} dx . a = 2 h [T(x) - T_a] dx$$

Or $j_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx}$, on a alors $\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} a = 2 h [T(x) - T_a]$ soit encore $\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_a}{\delta^2}$ avec $\delta^2 = \frac{\lambda a}{2h}$

La forme générale de la solution est : $T(x) = T_a + A \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) + B \exp\left(\frac{x}{\delta}\right)$

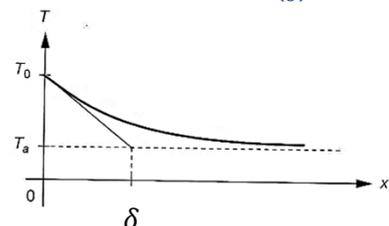
3. Conditions aux Limites : $T(x = 0) = T_0 = 100^\circ C$ et $T(x = c) = T_a = 20^\circ C$

4. $T(x = c \rightarrow \infty) = T_a = T_a + A \exp\left(-\frac{c}{\delta}\right) + B \exp\left(\frac{c}{\delta}\right)$. Or $\frac{c}{\delta} \gg 1$ donc le terme $B \exp\left(\frac{c}{\delta}\right)$ diverge, ce qui n'est pas acceptable physiquement, il faut donc prendre $B = 0$.

$T(x = 0) = T_a + A = T_0$, soit $A = T_0 - T_a$ d'où :

$$T(x) = T_a + (T_0 - T_a) . \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$$

5. La paraffine fond dans la partie la plus proche du bac à eau.



$$x_{\text{cuivre}} > x_{\text{acier}} \Leftrightarrow \delta_{\text{cuivre}} > \delta_{\text{acier}} \Leftrightarrow \lambda_{\text{cuivre}} > \lambda_{\text{acier}}$$

6. Ventilateur $\Rightarrow h \uparrow \Rightarrow \delta \downarrow$: la température diminue plus rapidement en fonction de x .

Exo T58 Manchon cylindrique – à la limite du programme (3 fois, 2021)

Version 1

Coordonnées cylindriques car axe de symétrie.

Les plans $(M; \vec{u}_r; \vec{u}_z)$ et $(M; \vec{u}_r; \vec{u}_\theta)$ sont plans de symétrie pour la température donc $\vec{J}_{th} = j_{th} \vec{u}_r$.

Le sens du transfert thermique qui se fait des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides donc \vec{J}_{th} est radial vers l'extérieur. le courant thermique \vec{J}_{th} tend à atténuer sa cause $\overrightarrow{\text{grad}} T$. C'est une **loi de modération**.

La distribution de température est invariante par translation et rotation suivant (Oz) ,

donc $j_{th} = j_{th}(r)$.

Phénomène irréversible (ne peut pas se faire du froid vers le chaud). $D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$. Irréversibilité indiquée par la dérivée première par rapport au temps. Inverser le sens du temps ($t \rightarrow -t'$) ne laisse pas l'équation de diffusion invariante : la diffusion traduit l'irréversibilité du phénomène physique (s'effectue des zones chaudes vers les zones froides).

En régime stationnaire : $\text{div} \vec{J}_{th} = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial(r j_{th} r)}{\partial r} \Rightarrow j_{th} = \frac{K}{r}$.

$$\phi = \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{J}_{th} \cdot \vec{dS} = \iint_{\text{cyl}} j_{Qr}(r) \cdot dS = j_{Qr}(r) \iint_{\text{cyl}} dS = j_{th}(r) \cdot 2\pi r H \Rightarrow K = \frac{\phi}{2\pi H}$$

$$\vec{J}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \Rightarrow j_{th} = -\lambda \frac{dT}{dr} = \frac{K}{r} \Rightarrow dT = -\frac{K}{\lambda} \frac{dr}{r}$$

$$T_1 - T_2 = \int_{T_2}^{T_1} dT = \int_{R_2}^{R_1} -\frac{K}{\lambda} \frac{dr}{r} = \frac{K}{\lambda} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{\phi}{2\pi\lambda H} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \Rightarrow R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi} = \frac{1}{2\pi\lambda H} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Exo T59 Manchot (1 fois, 2016)

Soit un élément de volume $d\tau$, de section S et de largeur dx , le bilan d'énergie sur ce système entre les instants t et $t + dt$ s'écrit :

$$dU(t + dt) - dU(t) = \delta Q(x) - \delta Q(x + dx)$$

Soit en régime stationnaire : $0 = [j_{th}(x) - j_{th}(x + dx)] \cdot S \cdot dt = -\frac{dj_{th}}{dx} dx \cdot S \cdot dt \Leftrightarrow \frac{dj_{th}}{dx} = 0$

Avec la loi de Fourier : $\vec{J}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x$, on a alors $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = A$

$$\Rightarrow T(x) = Ax + B$$

Conditions aux limites :

$$T(x = 0) = T_e = B$$

$$T(x = e) = T_i = Ae + B \quad \Rightarrow A = \frac{T_i - T_e}{e} \Rightarrow T(x) = \frac{T_i - T_e}{e} x + T_e$$

$$S = \mathcal{A} = 2a^2 + 4ah$$

1. En régime stationnaire $P_1 = \phi_{th} = j_{th} \cdot \mathcal{A} = \lambda \frac{T_i - T_e}{e} \cdot \mathcal{A} \Rightarrow \lambda = \frac{P_1 e}{(T_i - T_e) \mathcal{A}} = 4,0 \cdot 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Équation aux dimensions : $[\lambda] = \left[\frac{P_1 e}{(T_i - T_e) \mathcal{A}} \right] = [\text{puissance}] \cdot L^{-1} \cdot \theta^{-1}$ soit λ en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;

en fonction des dimensions fondamentales :

$$[\lambda] = [\text{puissance}] \cdot L^{-1} \cdot \theta^{-1} = M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot L^{-1} \cdot \theta^{-1} = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1}.$$

■ TRANSFERTS THERMIQUES EN REGIME VARIABLE

Exo T60 Tongs sur la plage au soleil (4 fois, 2022)

- Loi de Fourier $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$.
- Premier principe (bilan enthalpique) appliqué au système correspondant à une tranche de tong comprise entre z et $z + dz$ (hypothèse flux unidimensionnel dans la direction verticale) entre les instants t et $t + dt$ en l'absence de travail autre que celui des forces de pression, à pression atmosphérique :

$$d(\delta H) = d^2 H = \delta^2 Q$$

Dans le cas d'un système monophasé : $d(\delta H) = \delta m c dT = \rho S dx c dT$; à zx fixé : $dT = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_z dt$;

$\delta^2 Q$: flux entrant moins flux sortant, soit $\delta^2 Q = (\Phi(z, t) - \Phi(z + dz, t)) dt = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_t dz dt$

Avec $\Phi(z, t) = \iint_{\text{section}} \vec{j}_Q(z) d\vec{S} = j_{Qz} S$, $\delta^2 Q = -\left(\frac{\partial j_{Qz}}{\partial z}\right)_t S dz dt$

Loi de Fourier : $\vec{j}_Q(z) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$, d'où $j_{Qx} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_t$ et $\delta^2 Q = -\left(\frac{\partial j_{Qz}}{\partial z}\right)_t S dz dt = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)_t S dz dt$

finalement : équation de la chaleur $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_z - \frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)_t = 0$ avec $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ diffusivité thermique, telle que $\tau \sim \frac{L^2}{D}$, soit D en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. A.N. : $D = \frac{\lambda}{c \rho} = \frac{2}{2 \cdot 10^6} = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

- $D = \frac{\lambda}{c \rho} = \frac{L^2}{\tau_c} = \frac{e^2}{\tau_c}$. on a donc $\tau_c = \frac{e^2}{D}$

$$\text{A.N. : } \tau_c = \frac{e^2}{D} = \frac{10^{-4}}{10^{-6}} = 100 \text{ s.}$$

(remarque : Conducto-convection de l'air sur la tong négligée)

- Si on se place en régime stationnaire et qu'on néglige la conducto-convection de l'air :

En régime stationnaire, en l'absence de source interne, le flux est conservatif, soit $\Phi(z) = \Phi(z + dz) = \Phi$,

avec $\Phi = \iint_x \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = j_{Qx} S$ soit $j_{Qx} = cte$

Loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$ soit en cartésiennes à 1D : $j_{Qx} = -\lambda \frac{dT}{dz} \stackrel{j_{Qx}=cte}{=} -\lambda \frac{T_2 - T_1}{e}$;

$$\Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{e} (T_1 - T_2) \text{ soit } R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$$

$$R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$$

On peut évaluer la surface d'une tong : longueur d'environ 25 à 40 cm, largeur 20 à 30 cm, soit une surface d'environ $S \approx 30 \times 25 = 750 \text{ cm}^2 = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$

$$\text{A.N. : } R_{th} = \frac{e}{\lambda S} \approx \frac{10^{-2}}{2 \times 7,5 \cdot 10^{-2}} = \frac{1}{15} \approx 8 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

En régime stationnaire, $\Phi = \frac{\Delta T}{R_{th}} = \frac{\Delta T \lambda S}{e}$ en prenant $\Delta T = T_{sable} - T_{peau}$ et $T_{peau} = 40^\circ C$ par exemple pour éviter tout inconfort, ou $50^\circ C$ pour éviter les brûlures

$$\Phi = \frac{T_{sable} - T_{peau}}{R_{th}} ; T_{peau} < T_{max}(40^\circ C ?) \Rightarrow \Phi > \frac{T_{sable} - T_{max}}{R_{th}}$$

A.N. avec $T_{max}(40^\circ C)$: $\Phi > \frac{T_{sable} - T_{max}}{R_{th}} = \frac{30}{8} \cdot 10^2 \approx 400 \text{ W}$

A.N. avec $T_{max}(50^\circ C)$: $\Phi > \frac{T_{sable} - T_{max}}{R_{th}} = \frac{20}{8} \cdot 10^2 \approx 250 \text{ W}$

Exo T61 Refroidissement d'un plat

On considère un plat à la température $T_i = 50^\circ C$ exposé à l'air ambiant ($T_a = 20^\circ C$) subit la convection dont on rappelle la loi de Newton : $\Phi = h [T - T_a] S$.

On donne c, m, H et S du plat.

1. Bilan énergétique pendant dt pour le plat :

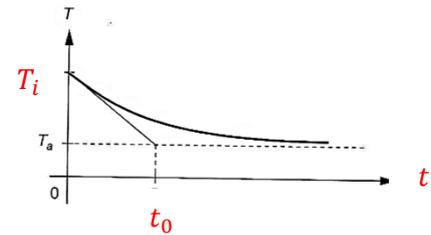
$$dU \approx dH = \delta Q = -\Phi \cdot dt$$

$$m \cdot c \cdot dT = -h [T - T_a] S \cdot dt$$

$$m \cdot c \cdot \frac{dT}{dt} dt = -h [T - T_a] S \cdot dt$$

$$\frac{dT}{dt} = - \frac{T - T_a}{t_0}$$

$$\text{avec } t_0 = \frac{mc}{hS}$$



2. Condition Initiale : $T(t = 0) = T_i \Rightarrow T(t) = T_a + (T_i - T_a) \cdot \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right)$

3. $T(t_1) = \frac{95}{100} T_a$ pour $t_1 = 3 t_0$

4. S : surface de contact avec l'air augmente donc t_0 diminue. Calcul ? car pas assez de données.

5. Avec la soupe on a alors un fluide où on peut observer un phénomène de convection naturelle avec par conséquent un refroidissement plus rapide.

Refroidissement d'un plat

1) Évolutions rapides, donc supposées sans échange thermique entre le système {eau + soupe} et l'extérieur (soupière, air extérieur) ; eau et soupe sont des PCII.

2) Système {eau + soupe}

$\Delta H = Q = 0$ (évolution monobare, adiabatique)

$\Delta H = \Delta H_{soupe} + \Delta H_{eau}$ (H fonction d'état EXTENSIVE)

$$0 = \mu_{soupe} V_{soupe} c_{soupe} (T_f - T_1) + m_{eau} c_{eau} (T_f - T_2)$$

$$c_{soupe} \approx c_{eau}$$

$$\mu_{soupe} \approx \mu_{eau}$$

$$0 = \mu_{eau} V_{soupe} (T_f - T_1) + m_{eau} (T_f - T_2)$$

$$m_{eau} = \mu_{eau} V_{soupe} \frac{T_1 - T_f}{T_f - T_2}$$

$$m_{eau} = 10^3 \times 0,5 \times 10^{-3} \times \frac{60}{40} = \mathbf{0,75 \text{ kg}}$$

3) Système {eau + soupe}

$\Delta H = Q = 0$

$\Delta H = \Delta H_{soupe} + \Delta H_{eau}$

$$0 = \mu_{soupe} V_{soupe} c_{soupe} (T_f - T_1) + m_{eau} (\ell_{fusion} + c_{eau} (T_f - T_2))$$

$$0 = \mu_{eau} V_{soupe} c_{eau} (T_f - T_1) + m_{eau} (\ell_{fusion} + c_{eau} (T_f - T_2))$$

$$m_{eau} = \mu_{eau} V_{soupe} \frac{c_{eau} (T_1 - T_f)}{\ell_{fusion} + c_{eau} (T_f - T_2)}$$

$$m_{eau} = 10^3 \times 0,5 \times 10^{-3} \times \frac{4,2 \times 60}{330 + 4,2 \times 40} = \frac{30 \times 4,2}{330 + 16,8} = \frac{12,6}{330 + 16,8} = \frac{12,6}{337} \approx 3,7 \times 10^{-2} \text{ kg} = 37 \text{ g}$$

Comment établir d'ED (hors-sujet) :

système : la soupe, qui échange avec l'air ambiant

Premier principe entre t et t+dt

$$\begin{aligned} dU &= \delta Q \\ CdT &= -\frac{1}{R}(T - T_{ext}) dt \\ C \frac{dT}{dt} + \frac{1}{R}(T - T_{ext}) &= 0 \end{aligned}$$

4) Solution générale

$$T = T_{ext} + A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$T = T_1$ initialement

$$T = T_{ext} + (T_1 - T_{ext}) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

5) cours

Exo T62 Armoire électrique (4 fois, 2022)

1) 1^{er} ppe monobare :

$$dH = \sum \delta Q \text{ avec } dH = CdT \text{ et } \delta Q = P_1 \cdot dt - \phi_{th} \cdot dt \text{ avec } \phi_{th} = \frac{T - T_{pièce}}{R_{th}}$$

$$dH = CdT = \left(P_1 - \frac{T - T_{pièce}}{R_{th}}\right) dt \Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{1}{R_{th}C} T = \frac{1}{R_{th}C} T_{pièce} + \frac{P_1}{C};$$

2) De la forme $\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_{\infty}}{\tau}$, avec par identification :

$$T_{\infty} = T_{pièce} + P_1 R_{th} = 20 + 100 = 120 \text{ °C}; \quad \tau = R_{th} C = 100 \text{ s}$$

3) Il faut ajouter au bilan thermodynamique le terme de convection forcée :

$$\begin{aligned} \delta Q_{cc,perdue} &= \phi_{cc} dt = h(T - T_{pièce}) S dt \\ dH = CdT &= P_1 \cdot dt - \phi_{th} \cdot dt - \phi_{cc} dt = \left(P_1 - \frac{T - T_{pièce}}{R_{th}} - h(T - T_{pièce}) S\right) dt \\ \frac{dT}{dt} + \left(\frac{1}{R_{th}C} + \frac{hS}{C}\right) T &= \left(\frac{1}{R_{th}C} + \frac{hS}{C}\right) T_{pièce} + \frac{P_1}{C} \end{aligned}$$

On se place en régime stationnaire, au bout de quelques τ . Puissance thermique évacuée via la conduction : $\phi_{th} =$

$$\frac{T_{int} - T_{pièce}}{R_{th}} = \frac{50 - 20}{0,1} = 300 \text{ W}$$

4) Puissance à évacuer en convection forcée : $P_{conv} = P_1 - \phi_{th} = 700 \text{ W}$

Ou alors

Si la température est constante, on est en régime stationnaire, d'où :

$$CdT = P_1 \cdot dt - \phi_{th} \cdot dt - \phi_{cc} dt \quad \stackrel{\text{stationnaire}}{=} \quad 0$$

Soit $P_1 - \phi_{th} = \phi_{cc} = 700 \text{ W}$

5) Système : air brassé par le ventilateur. On considère que la puissance évacuée par convection correspond à la puissance reçue par l'air ventilé : $P_{vent} = P_{conv}$

$$\begin{aligned} P_{vent} &= \rho_{air} D_v c_{air} \Delta T \text{ avec } \Delta T = 30 \text{ °C} \\ D_v &= \frac{P_{conv}}{\rho_{air} c_{air} \Delta T} = \frac{700}{1 \times 10^3 \times 30} = 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 23 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Exo T63 Equation de diffusion thermique dans une barre cylindrique (2 fois, 2022)

Conditions d'écriture de l'équation précédent : équation de diffusion thermique sans terme source dans le cas unidirectionnel pour une transformation monobare et une phase condensée.

Démonstration : premier principe pour une transformation monobare et une phase condensée :

$$\begin{aligned} \underbrace{d^2H}_{\substack{\text{Variation d'enthalpie} \\ \text{au cours du temps} \\ \text{dans volume } d\tau}} &= \underbrace{\delta^2Q}_{\substack{\text{transfert thermique} \\ \text{à travers la surface } S_{tot} \\ \text{délimitant le volume}}} \\ \Leftrightarrow dm \cdot c_p \cdot dT &= \rho \cdot d\tau \cdot c_p \cdot dT = \rho \cdot d\tau \cdot c [T(t+dt) - T(t)] = [j_{th}(x) - j_{th}(x+dx)] \cdot S \cdot dt \\ \Leftrightarrow \rho \cdot S \cdot dx \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dt &= - \frac{\partial j_{th}}{\partial x} dx \cdot S \cdot dt \\ \Leftrightarrow \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} &= - \frac{\partial j_{th}}{\partial x} \end{aligned}$$

Loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{grad} T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x$

$$\Rightarrow \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Conditions d'écriture de l'équation précédent : équation de diffusion thermique sans terme source dans le cas unidirectionnel (paroi latérale calorifugée) pour une transformation monobare et une phase condensée.

$$[a] = \left[\frac{\frac{\partial T}{\partial t}}{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \right] = \frac{\theta T^{-1}}{\theta L^{-2}} = \frac{L^2}{T}$$

$$\tau = \frac{L^2}{a}$$

Applications numériques : $a = \frac{\lambda}{\rho c} = 1,15 \cdot 10^{-4} m^2 \cdot s^{-1}$ et $\tau = 87 s$

Régime stationnaire, (1) devient : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$, la température varie alors de façon linéaire et \vec{j}_{th} est à flux conservatif.

Régime stationnaire atteint à 95 % au bout de $3\tau = 261 s = 4 \text{ min } 21 s$, atteint « totalement » (99% et plus) à 4 ou 5 τ Lent comme tous les phénomènes de diffusion.

Exo T64 Dalle

Version 1 (1 fois, 2017)

1. Le flux thermique est conservatif en régime stationnaire.

(démonstration : **bilan d'enthalpie pour une tranche d'épaisseur dx** : $d^2H \stackrel{\substack{\text{1er système} \\ P=cte}}{=} \delta^2Q$)

En régime stationnaire, $d^2H = 0$ soit $\delta^2Q = 0$

En exprimant la quantité de chaleur reçue (entrée en x - sortie en $x + dx$) à l'aide des flux thermiques :

$$\delta^2Q = (\Phi(x) - \Phi(x+dx)) dt = 0 \text{ soit } \Phi(x) = \Phi(x+dx) = cte$$

On a donc en particulier $\Phi_0 = \Phi(x=0) = \Phi(x=H)$

2. Loi de Fourier $\vec{j}(x,t) = -\lambda \overrightarrow{grad} T$ et unidimensionnelle : $j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$

3. USI (j) : $W \cdot m^{-2}$ et USI (λ) : $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$

4.

$$d^2U \approx d^2H \stackrel{\substack{\text{transfo} \\ \text{monobare}}}{=} \delta^2Q_{re\c{u}e} = \mathcal{P}_{re\c{u}e} dt = (\mathcal{P}_{entr\c{e}e} - \mathcal{P}_{sortie}) dt$$

$$d^2H \stackrel{PCI}{=} dm \cdot c \cdot dT = \rho \cdot d\tau \cdot c \cdot dT = [j(x,t) - j(x+dx,t)] \cdot S \cdot dt$$

$$\rho \cdot S dx \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dt = - \frac{\partial j}{\partial x} dx \cdot S \cdot dt$$

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j}{\partial x}$$

Or $j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ avec $a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c}$

USI (a) : $m^2 \cdot s^{-1}$

5. USI (h) : $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$

h caractérise le transfert thermique lors d'une interface, il dépend de la nature du fluide, de sa vitesse ; de la nature du solide et de son état de surface. h augmente dans le cas de la convection forcée.

6. En régime stationnaire : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0 = a \cdot \frac{d^2 T}{dx^2} \Rightarrow \frac{dT}{dx} = A \Rightarrow T = Ax + B$ et $j(x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda A$

On détermine A et B grâce aux Conditions aux Limites sur j :

$$j(x=0) = j_0 = -\lambda A \Rightarrow A = -\frac{j_0}{\lambda}$$

$$j(x=H) = h [T(H) - T_i] = h [AH + B - T_i] = j_0 \Rightarrow B = \frac{j_0}{h} - AH + T_i = \frac{j_0}{h} + \frac{j_0}{\lambda} H + T_i$$

$$T(x) = T_i + j_0 \left(\frac{H}{\lambda} + \frac{1}{h} \right) - \frac{j_0}{\lambda} x$$

Exo T65 Conductivité thermique dans la croûte terrestre (10 fois, 2023)

1. Modélisation géométrie plane ($1 \text{ km} \ll 6400 \text{ km}$), en choisissant un axe vertical descendant depuis la surface terrestre.

Bilan enthalpique sur une surface S petite à l'échelle terrestre, pour une tranche d'épaisseur dz : $d^2H = \delta^2Q$

En régime stationnaire, $d^2H = 0$ soit $\delta^2Q = 0$

En exprimant la quantité de chaleur reçue (entrée en z – sortie en z + dz) à l'aide des flux thermiques :

$$\delta^2Q = (\Phi(z) - \Phi(z + dz)) dt = 0 \text{ soit } \Phi(z) = \Phi(z + dz) = \text{cte}$$

En introduisant le vecteur densité de flux et en exploitant la loi de Fourier :

$$\Phi(z) = \iint_{\text{section}} \vec{j}_Q(z) d\vec{S} = \iint_{\text{section}} -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) d\vec{S} \quad \text{soit } \frac{dT}{dz} = \text{cte et } T(z) = az + b \quad (\text{ou } \frac{d^2T}{dz^2} = 0)$$

Détermination de a et b à l'aide des conditions aux limites :

$$T(z=0) = T_0 = b \quad \text{et} \quad T(z=d) = T_1 = T_0 + \Delta T = ad + T_0 \quad \text{d'où} \quad a = \frac{\Delta T}{d} = \left(\frac{T_1 - T_0}{d} \right)$$

$$\text{finalement : } T(z > 0) = \frac{T_1 - T_0}{d} z + T_0 = \frac{\Delta T}{d} z + T_0 ;$$

2. Pour la surface S, la puissance transférée dans le sens des z croissants, soit la puissance transférée de l'atmosphère vers la Terre :

$$\Phi_{th-atm \rightarrow terre} = j_{Qz} S = -\lambda \frac{dT}{dz} S = -\lambda \frac{T_1 - T_0}{d} S = -\lambda \frac{\Delta T}{d} S$$

La puissance transférée de la Terre vers l'atmosphère ayant lieu dans le sens opposé :

$$\Phi_{th-terre \rightarrow atm} = -\Phi_{th-atm \rightarrow terre} = \lambda \frac{\Delta T}{d} S$$

Remarque : il est bien entendu possible de calculer directement cette puissance transférée, en tenant bien compte de l'orientation de la surface $d\vec{S} = -dS \vec{u}_z$ dans la direction du flux considéré :

$$\begin{aligned}\Phi_{terre \rightarrow atm}(z) &= \iint_{\text{section}} \vec{j}_Q(z) d\vec{S} = \iint_{\text{section}} -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) d\vec{S} = \iint_{\text{section}} \lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) dS \vec{u}_z \\ &= \iint_{\text{section}} \lambda \frac{\Delta T}{d} \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z = \lambda \frac{\Delta T}{d} S\end{aligned}$$

Soit en considérant la surface totale de la Terre (sphère de rayon R_T , de surface $S = 4\pi R_T^2$) :

$$\Phi_{terre \rightarrow atm} = \lambda \frac{\Delta T}{d} \times 4\pi R_T^2$$

A.N. : $\Phi_{terre \rightarrow atm} = 33 \times \frac{30}{1.10^3} \times 4\pi \times (6,4 \cdot 10^6)^2 = 1 \times 4\pi \times (6,4)^2 \times 10^{12} \approx 5 \cdot 10^{14} \text{ W}$

$\Phi_{terre \rightarrow atm} \approx 5 \cdot 10^{14} \text{ W}$.

Remarque : il est cohérent d'obtenir un flux positif en considérant le flux de la Terre vers l'atmosphère, la Terre étant plus chaude que l'atmosphère.

3. Analyse dimensionnelle de la diffusivité thermique D :

équation de la chaleur $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x - \frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t = 0$ avec $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ diffusivité.

On a donc

$$[D] = \frac{\left[\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x\right]}{\left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t\right]}$$

or

$$\left[\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x\right] = \frac{\theta}{T} \quad \left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t\right] = \frac{\theta}{L^2}$$

$$[D] = \frac{L^2}{T} \Rightarrow L \approx \sqrt{D \times T} \approx 1 \text{ m.}$$

Exo T66 Caléfaction (ou effet Leidenfrost) ⚡ (1 fois, 2017)

1. Question de cours (pas facile)

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_z - \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)_t = 0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x - D_{th} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)_t = 0 \quad \text{avec} \quad D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

2. $T(z) = T_p + (T_e - T_p) \frac{z}{\ell}$

3. m diminue au cours du temps, vaporisation progressive de la goutte

Puissance reçue :

$$\pi R^2 \lambda \frac{T_p - T_e}{\ell} = \frac{dm}{dt} \ell_{vap} \quad \text{d'où} \quad \frac{dm}{dt} = \frac{\pi R^2 \lambda (T_p - T_e)}{\ell_{vap} \ell}$$

Exo T67 Onde thermique (1 fois, 2019)

■ REVISIONS COMPLEMENTAIRES NE FAISANT PAS PARTIE DES SUJETS D'ORAUX

Exo T68 Machine frigorifique, diagramme des frigoristes

Premier principe appliqué aux écoulements permanents (ou premier principe industriel) :

$$D_m(\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p) = P_i + P_{th}$$

ou

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = w_i + q$$

Machine frigorifique, diagramme des frigoristes

Corrigé succinct

a. Tracé

Placer B, puis C, puis D et enfin A ($h = cte$ sur DA, détenteur passif adiabatique)

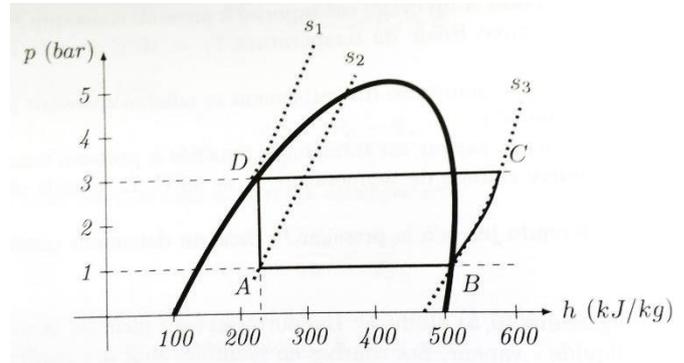
b. Échanges massiques

Premier principe industriel, à appliquer à chacune des transformations :

$$\Delta h = w_i + q \text{ (car pas de variations de } e_p \text{ et } e_c)$$

Un seul élément actif, dans le compresseur.

Les variations d'enthalpies sont à lire sur le graphe



$q_{AB} = \Delta h_{AB}$ positive (le fluide reçoit de la chaleur en se vaporisant)	$q_{BC} = 0$	$q_{CD} = \Delta h_{CD}$ négative (le fluide cède de la chaleur en se liquéfiant)	$q_{DA} = 0$
$q_{AB} = 505 - 230 = +275 \text{ kJ.kg}^{-1}$		$q_{CD} = 230 - 580 = -350 \text{ kJ.kg}^{-1}$	
$w_{iAB} = 0$	$w_{iBC} = \Delta h_{BC}$	$w_{iCD} = 0$	$w_{iDA} = 0$
	$w_{iBC} = 580 - 505 = 75 \text{ kJ.kg}^{-1}$		

(possibilité de calculer des puissances, en multipliant par D_m les échanges massiques).

c. Coefficient de performance

But : ôter de la chaleur à la source froide, donc maximiser q_{AB} .

Coût : travail apporté, soit w_{iBC} .

$$CoP = \frac{q_{AB}}{w_{iBC}} = \frac{275}{75} = \frac{11 \times 25}{3 \times 25} = \frac{11}{3} \approx 3,7$$

CoP maximal, pour une machine réversible :

$$CoP_{max} = \frac{T_f}{T_c - T_f} = \frac{283}{40} \approx 7$$

Cohérent, irréversibilité sur CC' et DA , a priori.

Exo T69 Survie dans un igloo

$$e = 5\lambda a^2 \frac{\Delta T}{p} = 10 \text{ cm}$$

Exo T70 Mur avec source interne

b. $T(x) = T_0 + \frac{q}{2\lambda}(e^2 - x^2); T_{max} = T(0) = T_0 + \frac{q}{2\lambda}e^2.$

c. $\vec{j}_Q(x) = qx \vec{e}_x$

Flux thermique des températures élevées vers les températures basses, donc du centre vers l'extérieur.

Flux plus important vers les bords, isothermes plus resserrées, gradient plus important.

$$d. \quad q = \frac{640}{1 \times 2 \times 8.10^{-3}} = 4.10^4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}; T_{max} - T_0 = \frac{4.10^4}{2 \times 0,8} (4.10^{-3})^2 = 0,4 \text{ K}$$

Exo T71 Chauffage d'une habitation (ALD)

$$1) S = \frac{\phi}{h [T_1 - T_2]} = 8 \text{ m}^2.$$

2) Cette surface « efficace » S du radiateur est considérée comme étant celle des ailettes, chacune de celles ci étant un rectangle de métal biface de surface $s = 2L \times \ell$.

Le nombre d'ailettes n recherché vaut donc : $n = \frac{S}{s} = 133,3$. Il faut donc 134 ailettes et donc 133 intervalles de 1 cm ; L'encombrement est donc de 10 cm × 30 cm × 134 cm.

3) Le même flux, correspondant aux pertes de chaleur à travers le mur, entre l'air intérieur et l'air extérieur, est échangé par trois processus successifs :

la convection (air intérieur / surface intérieure) caractérisée par une résistance thermique : $R_1 = \frac{1}{h_i S}$;

la conduction (surface intérieure / surface extérieure caractérisée par une résistance thermique : $R_2 = \frac{e}{\lambda S}$;

la convection (surface extérieure / air extérieur) caractérisée par une résistance thermique : $R_3 = \frac{1}{h_e S}$.

Les résistances sont en série donc $R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{1}{S} \left(\frac{1}{h_i} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_e} \right) = \frac{1}{S} \left(\frac{1}{0,6 h_e} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_e} \right)$.

$$\text{Et } \phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{eq}} \Rightarrow R_{eq} = \frac{1}{S} \left(\frac{1,6}{0,6 h_e} + \frac{e}{\lambda} \right) = \frac{T_1 - T_2}{\phi}$$

$$\Leftrightarrow h_e = \frac{1,6}{0,6} \cdot \frac{1}{\frac{(T_1 - T_2) S}{\phi} \frac{e}{\lambda}} = \frac{1,6}{0,6} \cdot \frac{1}{\frac{20.80}{4.10^3} \frac{0,3}{1,2}} = 17,8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \text{ et } h_i = 10,7 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Exo T72 Cuisson d'un œuf d'autruche

rappel éq de la diffusion thermique : $\frac{\partial T}{\partial t} - D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ et définition de la diffusivité thermique D

analyse dimensionnelle $\Rightarrow D = \frac{L^2}{\tau}$ où L et τ sont caractéristiques du problème.

hyp : D identique pour les deux œufs (mêmes caractéristiques), modèle sphérique,

$$\tau' = \tau \left(\frac{L'}{L} \right)^2 = \tau \left(\frac{m'}{m} \right)^{2/3} = 3 \times \left(\frac{1500}{58} \right)^{2/3} = 26 \text{ min}.$$

Exo T73 Temps caractéristique de diffusion (ALD (Bréal – Tout-en-un PSI)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$D = \frac{\lambda}{\rho c}$$

et

$$\tau_c = \frac{L_c^2}{D} = \frac{\rho c L_c^2}{\lambda} = \frac{8960 \times 380 \times 0,1^2}{390} = 87 \text{ s} = 1 \text{ min } 27 \text{ s}$$

Exo T74 Refroidissement d'un fil électrique

$$[h] = \text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}.$$

$$T(\infty) = T_e.$$

$$dH = \rho V c. dT = \delta Q = -h S [T - T_e]. dt \Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_e}{\tau} \text{ avec } \tau = \frac{\rho V c}{h S} \text{ et}$$

$$S = 2\pi R L = 2\pi \sqrt{\frac{S}{\pi}} L = 5,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ (le fil n'a de la convection que sur sa surface latérale).}$$

$$\tau = \frac{\rho V c}{h S} = 62 \text{ s et } \left[\frac{\rho V c}{h S} \right] = \frac{\text{kg.m}^{-3} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}{\text{W.K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{m}^{-2}} = \frac{\text{J}}{\text{W}} = \text{s} = [\tau]$$

$$\Rightarrow T(t) = K e^{-t/\tau} + T_e \text{ et } T(t=0) = T_0 \Rightarrow T(t) = (T_0 - T_e) e^{-t/\tau} + T_e.$$

$$T(t_1 = 60 \text{ s}) = 30 e^{-t_1/62} + 293 \sim 304 \text{ K} \sim 31 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\text{et } T(t_2 = 300 \text{ s}) = 30 e^{-t_2/62} + 293 \sim 273 \text{ K} \sim 20 \text{ }^\circ\text{C}.$$

$$\text{On trouve bien } T(t_2 = 5\tau) \sim T(\infty) = T_e$$

Courbe $T(t)$.

Exo T75 Mesure expérimentale d'une conductivité thermique

On calorifiuge pour empêcher fuite latérale sous forme de transfert conducti-convectif.

Matériau isolant : mousse de polystyrène ou laine de verre.

Équation de diffusion thermique sans terme source dans le cas unidirectionnel :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

avec $a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} > 0$ appelé diffusivité thermique.

$$\text{En régime stationnaire : } T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{e} (x - x_1)$$

$$\phi = j_{th} \cdot S = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{e} \cdot S$$

Premier principe de la thermodynamique : $dH = dm c (\theta_3 - \theta_4) = \delta Q + \delta W = P_{th} dt$

$$P_{th} = \frac{dm}{dt} c (\theta_3 - \theta_4) = D_m c (\theta_3 - \theta_4)$$

L'échangeur est parfait : $P_{th} = D_m c (\theta_3 - \theta_4) = \phi = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{e} \cdot S$

$$\text{D'où : } \lambda = \frac{D_m c e}{S} \cdot \frac{\theta_3 - \theta_4}{T_1 - T_2} = 374 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$