

PREPARATION AUX ORAUX – ATS - CORRIGES

ELECTROMAGNETISME

AUTOUR DU COURS D'ELECTROMAGNETISME

Exo EM1. Electromagnétisme (2008)

$$\vec{F} = -e \vec{E} = -e E \vec{u}_x$$

Cours

$$\text{Si } r < R : \vec{E} = \frac{\rho r}{2 \epsilon_0} \vec{u}_r \text{ et } V = -\frac{\rho}{4 \epsilon_0} (r^2 - R^2) + V_0$$

$$\text{Si } r > R : \vec{E} = \frac{\rho R^2}{2 r \epsilon_0} \vec{u}_r \text{ et } V = -\frac{\rho R^2}{2 \epsilon_0} \ln \frac{r}{R} + V_0$$

Exo EM2. Sphère creuse (4 fois ; 2012)

$$\text{Si } r > R, \vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \text{ et } V = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}$$

$$\text{Si } r < R, \vec{E} = \vec{0} \text{ et } V = cte = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

Exo EM3. Sphère pleine (10 fois ; 2018)

$$\text{Si } r > R : \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \text{ et } V = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r} \text{ et Si } r < R : \vec{E} = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \vec{u}_r \text{ et } V = \frac{\rho}{2 \epsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right)$$

Exo EM5 – bis : Plan infini chargé (5 fois ; 2022)

si $(x = 0)$ est le plan chargé, alors $\vec{E} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{e}_x$ pour $x > 0$; $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{e}_x$ pour $x < 0$.

en notant V_0 le potentiel du plan chargé : $V = V_0 - \frac{\sigma x}{2 \epsilon_0}$ pour $x \geq 0$; $V = V_0 + \frac{\sigma x}{2 \epsilon_0}$ pour $x \leq 0$.

Remarque : on peut définir le potentiel sur le plan

Exo EM4. Résistance d'une portion de conducteur

Loi d'ohm locale : $\vec{j}(x) = \gamma \vec{E}$ donc $\vec{j}(x) = j(x) \vec{u}_x$; $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint j \cdot dS = j(x) S = \gamma E(x) S$;

Or $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{OM}$ d'où en intégrant : $U = \Delta V = EL$; $R = \frac{U}{I} = \frac{EL}{\gamma E(x) S} = \frac{L}{\gamma S}$.

Exo EM5. Fil rectiligne (variantes : 9 fois ; 2018)

Voir exo EM34 : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r} \vec{u}_\theta$

Exo EM6. Cylindre infini : distributions volumique et surfacique (6 fois, 2018)

$$r < R : \vec{B} = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{u}_\theta \text{ et } r > R : \vec{B} = \frac{\mu_0 j R^2}{2 r} \vec{u}_\theta$$

$$r < R : \vec{B} = \vec{0} \text{ et } r > R : \vec{B} = \frac{\mu_0 j_s R}{r} \vec{u}_\theta$$

A la traversée d'une surface, le champ est discontinu $\Delta \vec{B} = \mu_0 j_s \vec{u}_\theta = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{u}_r$

Exo EM7. Inductance d'un long solénoïde

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$$

Exo EM8. Densité volumique d'énergie magnétique

Solénoïde infini (expression à savoir retrouver) : $B = \mu_0 n i \Rightarrow \Phi_p = \frac{\mu_0 N^2 i S}{\ell} = Li$

$$\Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_B = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{\mu_0 N^2 i^2 S}{2\ell} = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot \mathcal{V}_{sol} \Rightarrow u_B = \frac{\varepsilon_B}{\mathcal{V}_{sol}} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Exo EM9. Des équations de Maxwell au théorème de Gauss (2 fois, 2006)

Rappeler les quatre équations de Maxwell dans le vide et donner leur signification physique.

| Equations de Maxwell sous forme locale | |
|---|---|
| Equation de Maxwell – flux (1) Maxwell - Thomson | $\text{div } \vec{B} = 0$ <p>L'équation de Maxwell-flux indique le caractère conservatif du flux du champ magnétique à travers n'importe quelle surface fermée.</p> |
| Equation de Maxwell - Gauss (2) | $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ <p>L'équation de Maxwell-Gauss indique le caractère non conservatif du flux du champ électrique \vec{E} à travers une surface fermée contenant des charges : une densité volumique de charges ρ jouent le rôle de source de champ électrique.</p> |
| Equation de Maxwell – Faraday (3) | $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ <p>L'équation de Maxwell-Faraday indique qu'un champ magnétique $\vec{B}(t)$ variable dans le temps engendre un champ électrique \vec{E} à circulation non conservative (\Rightarrow phénomène d'induction).</p> |
| Equation de Maxwell – Ampère (4) | $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \vec{j}_D = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ <p>L'équation de Maxwell-Ampère indique que les sources de champ magnétique \vec{B} sont les courants électriques \vec{j} mais aussi les champs électriques variables dans le temps.</p> |

ELECTROSTATIQUE

Exo EM10. Champ électrostatique (2010)

$$E_1(M) = E_2(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a^2} \text{ et } E(M) = 2E_1(M) \cos 45^\circ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exo EM11. Charges ponctuelles (2 fois ; 2012)

| | $V(O)$ | $E_x(O)$ | $E_y(O)$ |
|-------|------------------------------|--|---|
| Cas 1 | $\frac{q}{\pi\epsilon_0 a}$ | 0 | 0 |
| Cas 2 | 0 | 0 | 0 |
| Cas 3 | 0 | $\frac{q}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$ | 0 |
| Cas 4 | $\frac{q}{2\pi\epsilon_0 a}$ | $\frac{q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$ | $\frac{-q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$ |

Exo EM12. Gouttes d'eau chargées électriquement

Soit un axe (Ox) correspondant à l'axe des deux gouttes d'eau chargées. On prendra comme origine O de l'axe la position initiale de la gouttelette de charge $+q$, l'axe étant dirigé des gouttelettes vers le bâton de charge Q (vecteur \vec{u}_x). Considérons la gouttelette de charge $-q$. Elle est soumise à deux forces électrostatiques : celle exercée par la charge $+q$, force d'attraction dans le sens $-\vec{u}_x$, et celle exercée par la charge $+Q$, force d'attraction dans le sens $+\vec{u}_x$.

1^{er} cas de figure : la force exercée par $+Q$ l'emporte, la gouttelette de charge $-q$ se déplace dans le sens $+\vec{u}_x$ jusqu'à se coller au bâton ; elle attire par ailleurs la gouttelette de charge $+q$ qui est également repoussée par le bâton, mais de manière moins importante car plus éloignée.

Sous cas a : si c'est l'attraction par $-q$ qui l'emporte, la gouttelette $+q$ va également se déplacer dans le sens $+\vec{u}_x$. Les deux gouttelettes se dirigent simultanément mais à des vitesses différentes l'une de l'autre vers le bâton.

Sous cas b : si c'est la répulsion par $+Q$ qui l'emporte, la gouttelette $+q$ va se déplacer dans le sens $-\vec{u}_x$ et de moins en moins attirer $-q$ qui va donc se diriger de plus en plus rapidement vers $+Q$ (le bâton).

Remarque : en pratique, le modèle de particules ponctuelles n'est plus valable pour des distances trop petites, la distance finale n'est pas nulle).

2^{ème} cas de figure : la force exercée par $+Q$ est plus faible que celle exercée par q , la gouttelette de charge $-q$ se déplace à l'instant initial dans le sens $-\vec{u}_x$ jusqu'à se coller à la charge $-q$, l'ensemble des deux gouttelettes étant alors électriquement neutre. Il n'y a alors plus de force électrostatique subie par les gouttelettes. Le bâton étant fixe, il ne se déplace pas au début du mouvement, puis ne subit plus de force.

Remarque : en l'absence de bâton, les deux gouttes de charges opposées s'attirent et se déplacent donc l'une vers l'autre jusqu'à (en théorie) une distance nulle.

Force électrostatique. Considérons la gouttelette de charge $-q$. Elle est soumise à l'instant $t = 0$ à deux forces électrostatiques :

Force exercée par la charge $+q$:
$$\vec{F}_q = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \vec{u}_x$$

Force exercée par la charge $+Q$:
$$\vec{F}_Q = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 D^2} \vec{u}_x$$

Résultante des forces sur la gouttelette de charge $-q$ à l'instant $t = 0$: $\vec{F}_{tot}^- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{D^2} - \frac{q}{d^2} \right) \vec{u}_x$: on retrouve bien les deux cas de figure initiaux selon le signe de $\frac{Q}{D^2} - \frac{q}{d^2}$:

Déplacement de $-q$ selon $+\vec{u}_x$ si $\frac{Q}{D^2} > \frac{q}{d^2}$

Déplacement de $-q$ selon $-\vec{u}_x$ si $\frac{Q}{D^2} < \frac{q}{d^2}$

Considérons à présent la gouttelette de charge $+q$. Elle est soumise à l'instant $t = 0$ à deux forces électrostatiques :

Force exercée par la charge $-q$:
$$\vec{F}_q = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \vec{u}_x$$

Force exercée par la charge $+Q$:
$$\vec{F}_Q = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 (D+d)^2} \vec{u}_x$$

Résultante des forces sur la gouttelette de charge $+q$ à l'instant $t = 0$:
$$\vec{F}^+_{tot} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{d^2} - \frac{Q}{(D+d)^2} \right) \vec{u}_x$$

Si $\frac{Q}{D^2} < \frac{q}{d^2}$, $\frac{Q}{(D+d)^2} < \frac{q}{d^2}$. On a alors déplacement de $-q$ selon $-\vec{u}_x$ si $\frac{Q}{D^2} < \frac{q}{d^2}$ et de la gouttelette $+q$ selon \vec{u}_x : elle est attirée vers la gouttelette $-q$ qui s'éloigne du bâton jusqu'à ce qu'elles se neutralisent

Si le bâton porte une charge $-Q$:

Résultante des forces sur la gouttelette de charge $-q$ à l'instant $t = 0$:
$$\vec{F}^-_{tot} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{D^2} + \frac{q}{d^2} \right) \vec{u}_x$$
 : elle a toujours un mouvement vers l'autre gouttelette de charge $+q$ et se déplace selon $-\vec{u}_x$.

La gouttelette $+q$ se déplace selon \vec{u}_x et est attirée vers la gouttelette $-q$ ainsi que le bâton. La position d'équilibre correspondant à l'endroit où les deux gouttelettes s'agglomèrent et deviennent électriquement neutres n'est toutefois pas la même que dans le cas précédent. Elle a lieu pour une valeur $x_{\acute{e}q}$ plus faible.

Exo EM13. Cylindre chargé en surface (2 fois ; 2017)

Si $r > R$:
$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r \text{ et } V = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} \text{ avec } V(R) = 0$$

Si $r < R$:
$$\vec{E} = \vec{0} \text{ et } V = cte = 0$$

Exo EM14. Cylindres chargés en surface et en volume (2 fois ; 2012)

- $$\vec{E} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r \text{ si } r > R \text{ et } \vec{E} = \vec{0} \text{ si } r < R$$
- $$\vec{E} = \frac{\rho_0 R}{\epsilon_0} \vec{u}_r \text{ si } r < R \text{ et } \vec{E} = \frac{\rho_0 R^2}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r \text{ si } r > R$$
- A la traversée d'une surface, le champ est discontinu
$$\Delta \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_r$$

Exo EM15. Cylindre épais

| | | | |
|-------------------|--|---|-----------------------------|
| $r \geq b$ | $\vec{E} = \frac{\rho (b^2 - a^2)}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r$ | $V = V_0 - \frac{\rho (b^2 - a^2)}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{b}\right)$ | en choisissant $V(b) = V_0$ |
| $a \leq r \leq b$ | $\vec{E} = \frac{\rho (r^2 - a^2)}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r$ | $V = V_0 - \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[a^2 \ln\left(\frac{b}{r}\right) + \frac{(b^2 - r^2)}{2} \right]$ | |
| $r \leq a$ | $\vec{E} = \vec{0}$ | $V = V_0 - \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{(b^2 - a^2)}{2} \right]$ | |

Version 2 Charge volumique entre deux cylindres

$$\vec{E} = \vec{0} \text{ pour } r < R_1 ; \vec{E}(M) = \frac{\rho (r^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 r} \vec{u}_r \text{ pour } R_1 < r < R_2 \text{ et } \vec{E}(M) = \frac{\rho (R_2^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 r} \vec{u}_r \text{ pour } r > R_2.$$

Exo EM16. Cylindre chargé en surface ou en volume de façon non uniforme ¶ (5 fois, 2015)

1^{er} cas : $r > R$
$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \vec{e}_r \quad V = V_0 - \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

$$r < R \quad \vec{E} = \vec{0} \quad V = V_0$$

$$2^{\text{e}} \text{ cas : } r \geq R \quad \vec{E} = \frac{\rho R^2}{\epsilon_0 r} \vec{e}_r \quad V = V_0 - \frac{\rho R^2}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

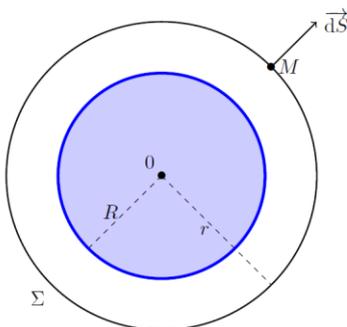
$$r \leq R \quad \vec{E} = \frac{\rho R}{\epsilon_0} \vec{e}_r \quad V = V_0 + \frac{\rho R}{\epsilon_0} (R - r)$$

Exo EM17. Sphère chargée en volume (3 fois, 2022)

Version 1 (2008)

Calcul du champ électrique :

Sphère uniformément chargée en volume



Invariances et symétries de la distribution de charges :

1- Coordonnées sphériques

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{u}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{u}_\varphi$$

2- Symétries

Tout plan passant par le centre de la sphère et le point M est plan de symétrie des sources, notamment les plans $\pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $\pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$

⇒ \vec{E} en un point M d'un plan de symétrie appartient à ce plan de symétrie ; il appartient donc à l'intersection des différents plans de symétrie. Ici, \vec{E} est suivant \vec{u}_r :

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

3 -Invariances

Distribution invariante par rotation autour de O.

⇒ $\|\vec{E}\|$ ne dépend ni de θ ni de φ .

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$$

4- Choix de la surface de Gauss :

Le champ étant radial, on choisit une surface Σ_G perpendiculaire au champ : sphère de centre O et de rayon r . Il s'agit bien d'une surface fermée passant par le point M étudié.

5- Calcul du flux sortant de \vec{E} à travers la surface de Gauss

La norme de \vec{E} est uniforme sur cette surface car \vec{E} ne dépend que de r et \vec{E} et $d\vec{S}$ sont suivant \vec{u}_r .

$$\Phi = \oiint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}(P) = \oiint_{P \in \Sigma_G} E_r(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r$$

$$\Phi \underset{\substack{\vec{E} \text{ et } d\vec{S} \\ \text{colinéaires}}}{=} \oiint_{P \in \Sigma_G} E(r) dS \underset{\substack{E(r) \text{ constant} \\ \text{sur sphère de rayon } r}}{=} E(r) \oiint_{P \in \Sigma_G} dS = E \cdot S_{Gauss} = \boxed{E(r) \cdot 4\pi r^2 = \Phi}$$

6- Calcul de la charge intérieure Q_{int} à la surface de Gauss

La charge intérieure à la surface de Gauss Q_{int} varie suivant que la surface de Gauss est à l'intérieur ou à l'extérieur du noyau.

Avec une répartition volumique de charge : $Q_{int} = \iiint_{\text{volume délimité par } \Sigma_G} \rho d\tau$

si $r \leq R$: $Q_{int} = \iiint_{\text{délimitée par } S} \rho \, d\tau = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3$ (la densité volumique de charge vaut ρ pour tout point M appartenant à l'intérieur de la sphère délimitée par la surface de Gauss de rayon r)

si $r \geq R$: $Q_{int} = \iiint_{\text{noyau}} \rho \, d\tau = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$ (la densité volumique de charge vaut ρ pour tout point M appartenant à l'intérieur de la sphère de rayon R et est nulle pour tous les autres points de la sphère délimitée par la surface de Gauss de rayon r).

7- Application du théorème de Gauss :

$$\Phi = \oiint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}(P) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

Soit $E(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi r^2}$

si $r \leq R$: $E(r) = \frac{\rho \times \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$ et si $r \geq R$: $E(r) = \frac{\rho \times \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$

Finalement,

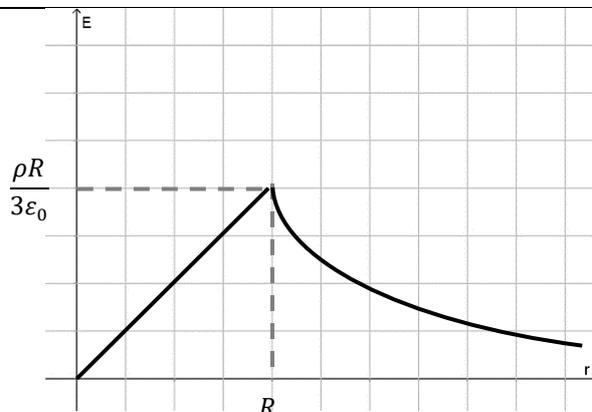
$$r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$$

$$r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

8 – Cohérence : homogénéité $[E] = \frac{[q]}{[\epsilon_0]L^2}$, sens ...

| $r < R$ | $r > R$ |
|---|--|
| $[\rho] = \frac{[charge]}{L^3}$ $\Rightarrow [E_{int}] = \frac{[\rho]L}{[\epsilon_0]} = \frac{[charge]L}{[\epsilon_0]L^3} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L^2}$ | $[\rho] = \frac{[charge]}{L^3}$ $\Rightarrow [E_{ext}] = \frac{[\rho]L^3}{[\epsilon_0]L^2} = \frac{[charge]L}{[\epsilon_0]L^3} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L^2}$ |
| Cohérent | |
| Sens dans les deux cas : | |
| si $\rho > 0$ $\vec{E}(M) = +E \vec{u}_r$ le champ diverge | |
| si $\rho < 0$ $\vec{E}(M) = -E \vec{u}_r$ le champ converge | |
| Cohérent | |

9 – Graphe $E(r)$



Si $r \geq R$:

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{soit avec} \quad dV = -\vec{E} \cdot d\vec{OM} = E(r)dr, \text{ en intégrant par rapport à } r :$$

$$V = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ en prenant } V(\infty) = 0$$

Exo EM18. Boule et sphère chargées (8 fois, 2017)

1. $r > R$: $\vec{E}(M) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ et $V(M) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ avec la convention $V(\infty) = 0$, on retrouve le cas de la charge ponctuelle

$$r < R : \vec{E}(M) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{u}_r \text{ et } V(M) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} = -\frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R}$$

2. $r > R$: $\vec{E}(M) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ et $V(M) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ avec la convention $V(\infty) = 0$, on retrouve le cas de la charge ponctuelle

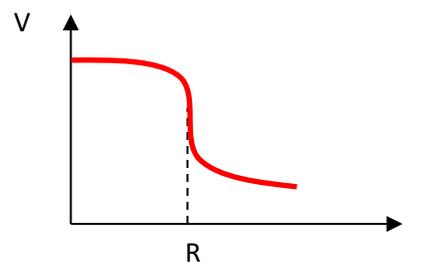
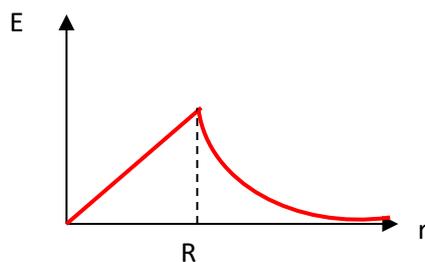
$$r < R : \vec{E}(M) = \vec{0} \text{ et } V(M) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \text{ avec la convention } V(\infty) = 0$$

3. Continuité de E pour distribution volumique, discontinuité finie $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ du champ pour distribution surfacique

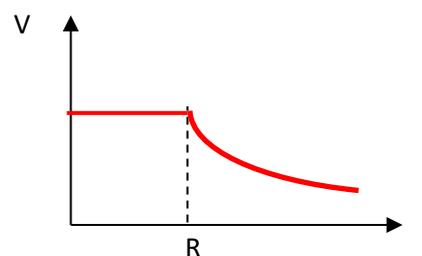
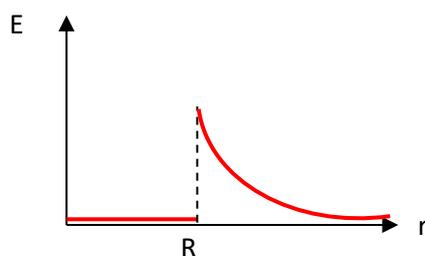
Continuité de V pour distribution volumique et surfacique

Dans les deux cas pour $r > R$, expressions de E et V identiques et identiques à celle de la charge ponctuelle.

Sphère pleine :



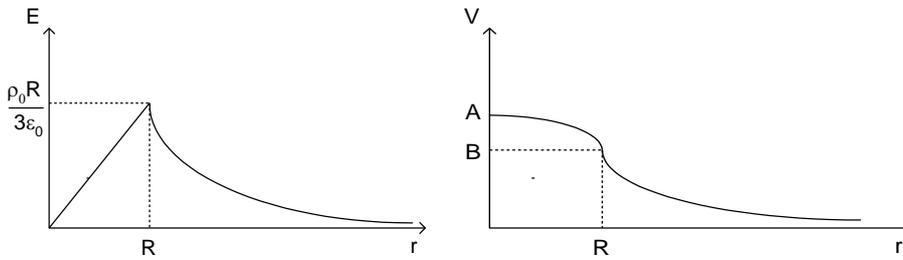
Sphère creuse :



Exo EM19. Sphère et cavité (2010)

Si $r > R_1$, $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ et $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0 r}$ avec la convention $V(\infty) = 0$

Si $r < R_1$, $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1^3} r \vec{u}_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r$ et $V = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R_1} \left(3 - \frac{r^2}{R_1^2}\right) = \frac{\rho R_1^2}{6\epsilon_0} \left(3 - \frac{r^2}{R_1^2}\right)$



$$\text{avec } A = \frac{\rho R_1^2}{2\epsilon_0} \text{ et } B = \frac{\rho R_1^2}{3\epsilon_0}$$

$$U_e = \iiint u_e \cdot d\tau \text{ avec } u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

$$U_e = \int_{r=0}^{R_1} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \right)^2 4 \pi r^2 dr + \int_{r=R_1}^{\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r^2} \right)^2 4 \pi r^2 dr = \frac{Q^2}{5 \pi \epsilon_0 R_1}$$

Cavité : on peut considérer le champ créé à l'intérieur de la cavité vide comme résultant de la superposition du champ \vec{E}_1 créé par une boule pleine de rayon R_1 chargée avec la densité volumique de charge ρ , et du champ \vec{E}_2 créé par une boule pleine de rayon R_2 chargée avec la densité volumique de charge $-\rho$, ce qui correspond bien à une boule de rayon R_1 chargée avec la densité volumique de charge ρ creusée d'une cavité de rayon R_2 et de charge nulle.

A l'intérieur d'une sphère, on a $\vec{E} = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \vec{u}_r$, avec $r = OM$ et $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$, soit ici :

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho r_1}{3 \epsilon_0} \vec{u}_{r1} = \frac{\rho O_1 M}{3 \epsilon_0} \frac{\overrightarrow{O_1 M}}{O_1 M} = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \overrightarrow{O_1 M} \text{ et } \vec{E}_2 = \frac{-\rho r_2}{3 \epsilon_0} \vec{u}_{r2} = -\frac{\rho}{3 \epsilon_0} \overrightarrow{O_2 M} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \overrightarrow{O_1 O_2}$$

Le champ obtenu est uniforme à l'intérieur de la cavité (indépendant du point M considéré).

COMPLÉMENT COURS

Pour aller plus loin (hors-programme, mais apparemment demandé en 2016 ! L'étudiant était manifestement brillant.)

Électrostatique

Écrire la force exercée sur une charge q placée en M par une charge q_0 placée en O .

Écrire le champ électrostatique créé en M par la charge q_0 .

Énoncer le théorème de Gauss.

Gravitation

Écrire la force exercée sur une masse m placée en M par une masse m_0 placée en O .

Écrire le champ gravitationnel créé en M par la masse m_0 .

Énoncer le théorème de Gauss appliqué à la gravitation.

En déduire le champ gravitationnel créé dans une grotte sphérique creusée dans la Terre.

| Analogie | Electrostatique | Gravitation |
|----------|-----------------|-------------|
| Sources | Charges q | Masses m |

| Source volumique | Densité volumique de charges | Masse volumique |
|---|--|--|
| | $\rho = \frac{dq}{d\tau}$ | $\mu = \frac{dm}{d\tau}$ |
| Interaction entre deux sources ponctuelles | $\vec{F}(M) = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0(OM)^2} \vec{e}_{OM}$ $= \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ | $\vec{F}(M) = -G \frac{m_0 m}{(OM)^2} \vec{e}_{OM}$ $= -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r$ |
| Champ créé par une source ponctuelle | Champ électrostatique $\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}(M)}{q} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0(OM)^2} \vec{e}_{OM}$ $= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ | Champ gravitationnel $\vec{G}(M) = \frac{\vec{F}(M)}{m} = -G \frac{m_0}{(OM)^2} \vec{e}_{OM}$ $= -G \frac{m_0}{r^2} \vec{e}_r$ |
| Constante | $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ | G |
| Théorème de Gauss | $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$ | $\oiint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{int}$ |
| Champ créé par une distribution sphérique de rayon R uniformément répartie en volume pour $r < R$ | $\vec{E}_{int} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r = \frac{\rho \overline{OM}}{3\epsilon_0}$ | $\vec{g}_{int} = -\frac{4}{3}\pi G \mu r \vec{e}_r = -\frac{4}{3}\pi G \mu \overline{OM}$ |
| Champ créé par une cavité sphérique dans une distribution sphérique | $\vec{E}_{cavité} = \frac{\rho \overline{CM}}{3\epsilon_0}$ | $\vec{G}_{cavité} = -\frac{4}{3}\pi G \mu \overline{CM}$ |

Exo EM20. Cavité sphérique (9 fois ; 2022)

$$\text{Si } r > R : \vec{E}_{ext} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \text{ et Si } r < R : \vec{E}_{int} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r = \frac{\rho \overline{OM}}{3\epsilon_0}; V_{ext} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}; V_{int} = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2)$$

$$\text{Cavité : } \vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overline{OC} \text{ uniforme dans la cavité}$$

Champ gravitationnel créé par astre sphérique plein à l'intérieur :

$$\vec{g}_{int} = -\frac{4}{3}\pi G \mu r \vec{e}_r = -\frac{4}{3}\pi G \mu \overline{OM}$$

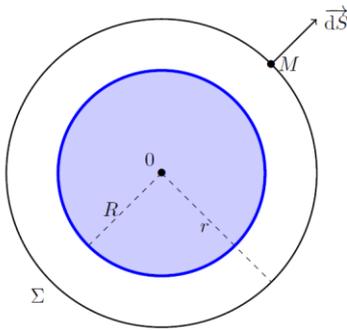
Astre avec grotte :

$$\vec{g}_{cavité} = -\frac{4}{3}\pi G \mu \overline{OM} + \frac{4}{3}\pi G \mu \overline{O'M} = -\frac{4}{3}\pi G \mu \overline{O'O}$$

Exo EM21. Atome d'hydrogène (6 fois ; 2022)

Calcul du champ électrique : application classique du théorème de Gauss pour une charge volumique répartie sur une sphère

Sphère uniformément chargée en volume



Invariances et symétries de la distribution de charges :

1- Coordonnées sphériques

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{u}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{u}_\varphi$$

2- Symétries

Tout plan passant par le centre de la sphère et le point M est plan de symétrie des sources, notamment les plans $\pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $\pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$

⇒ \vec{E} en un point M d'un plan de symétrie appartient à ce plan de symétrie ; il appartient donc à l'intersection des différents plans de symétrie. Ici, \vec{E} est suivant \vec{u}_r :

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

3 -Invariances

Distribution invariante par rotation autour de O.

⇒ $\|\vec{E}\|$ ne dépend ni de θ ni de φ .

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$$

4- Choix de la surface de Gauss :

Le champ étant radial, on choisit une surface Σ_G perpendiculaire au champ : sphère de centre O et de rayon r. Il s'agit bien d'une surface fermée passant par le point M étudié.

5- Calcul du flux sortant de \vec{E} à travers la surface de Gauss

La norme de \vec{E} est uniforme sur cette surface car \vec{E} ne dépend que de r et \vec{E} et \vec{dS} sont suivant \vec{u}_r .

$$\Phi = \iint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot \vec{dS}(P) = \iint_{P \in \Sigma_G} E_r(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r \stackrel{\substack{\vec{E} \text{ et } \vec{dS} \\ \text{colinéaires}}}{=} \iint_{P \in \Sigma_G} E(r) dS$$

$$\Phi \stackrel{\substack{E(r) \text{ constant} \\ \text{sur sphère de rayon } r}}{=} E(r) \iint_{P \in \Sigma_G} dS = E \cdot S_{Gauss} = \boxed{E(r) \cdot 4\pi r^2 = \Phi}$$

6- Calcul de la charge intérieure Q_{int} à la surface de Gauss

La charge intérieure à la surface de Gauss Q_{int} varie suivant que la surface de Gauss est à l'intérieur ou à l'extérieur du noyau.

Avec une répartition volumique de charge : $Q_{int} = \iiint_{\text{délimité par } \Sigma_G} \text{volume} \rho d\tau$

Attention ! disjonction des cas !

si $r \leq R$: $Q_{int} = \iiint_{\text{délimité par } s} \text{volume} \rho d\tau = \rho \times \frac{4}{3} \pi r^3$ (la densité volumique de charge vaut ρ pour tout point M appartenant à l'intérieur de la sphère délimitée par la surface de Gauss de rayon r)

si $r \geq R$: $Q_{int} = \iiint_{\text{noyau}} \rho d\tau = \rho \times \frac{4}{3} \pi R^3$ (la densité volumique de charge vaut ρ pour tout point M appartenant à l'intérieur de la sphère de rayon R et est nulle pour tous les autres points de la sphère délimitée par la surface de Gauss de rayon r).

7- Application du théorème de Gauss :

$$\Phi = \oiint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}(P) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = E(r) \cdot 4 \pi r^2$$

Soit $E(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4 \pi r^2}$

si $r \leq R$: $E(r) = \frac{\rho \times \frac{4}{3} \pi r^3}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4 \pi r^2} = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0}$ et si $r \geq R$: $E(r) = \frac{\rho \times \frac{4}{3} \pi R^3}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4 \pi r^2} = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2}$

Finalement,

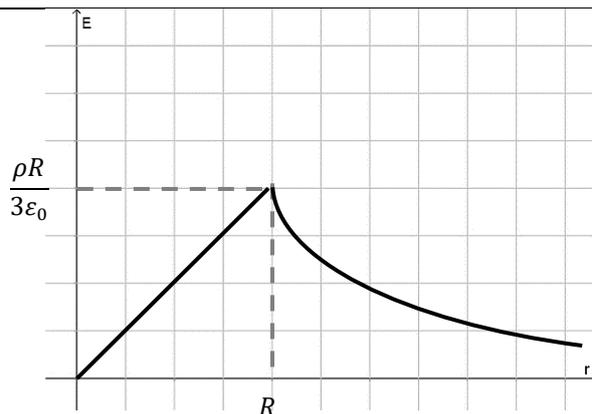
$$r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \vec{e}_r$$

$$r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

8 – **Cohérence** : homogénéité $[E] = \frac{[q]}{[\epsilon_0]L^2}$, sens ...

| $r < R$ | $r > R$ |
|---|--|
| $[\rho] = \frac{[charge]}{L^3}$ | $[\rho] = \frac{[charge]}{L^3}$ |
| $\Rightarrow [E_{int}] = \frac{[\rho]L}{[\epsilon_0]} = \frac{[charge]L}{[\epsilon_0]L^3} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L^2}$ | $\Rightarrow [E_{ext}] = \frac{[\rho]L^3}{[\epsilon_0]L^2} = \frac{[charge]L}{[\epsilon_0]L^3} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L^2}$ |
| Cohérent | |
| Sens dans les deux cas : | |
| si $\rho > 0$ $\vec{E}(M) = +E \vec{u}_r$ le champ diverge | |
| si $\rho < 0$ $\vec{E}(M) = -E \vec{u}_r$ le champ converge | |
| Cohérent | |

9 – Graphe $E(r)$



Remarque : Expression du champ en fonction de la charge totale Q de la sphère :

$$Q = \iiint \rho \cdot d\tau = \rho \cdot V_{chargé} = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow \rho = \frac{3 Q}{4 \pi R^3}$$

| $r < R$ | $r > R$ |
|---|---|
| $\vec{E}_{int}(M) = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{3 Q}{4 \pi R^3} \frac{r}{3 \epsilon_0} \vec{u}_r$ | $\vec{E}_{ext}(M) = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ |

| | |
|---|--|
| $\vec{E}_{int}(M) = \frac{Q r}{4 \pi \epsilon_0 R^3} \vec{u}_r$ | Le champ électrostatique créé à l'extérieur de la sphère chargée est le même que si toute la charge était concentrée au centre O de la sphère chargée. |
|---|--|

En tenant compte de $\rho \times \frac{4}{3} \pi R^3 = e$

$r > r_0$: $\vec{E}(M) = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{+e}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$, on retrouve le cas de la charge ponctuelle

$r < r_0$: $\vec{E}(M) = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{er}{4 \pi \epsilon_0 r_0^3} \vec{u}_r$

Détermination de $V(M)$

1 – Variable d'intégration

1^{ère} méthode : $V = \int - \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = \int - E \vec{u}_r \cdot \vec{d\ell} = - \int E dr + cte$

2^{ème} méthode : $\vec{E} = E \vec{u}_r = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = - \int E dr + cte$

| $r < R$ | $r > R$ |
|---|---|
| $V_{int} = - \int E_{int} dr = - \int \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \cdot dr + cte$ | $V_{ext} = - \int E_{ext} dr = - \int \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} \cdot dr + cte$ |
| $V_{int} = -\frac{\rho r^2}{6 \epsilon_0} + K_1$ | $V_{ext} = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r} + K_2$ |

2 – Origine du potentiel

Source de champ de dimension finie : on pose $V_{ext}(\infty) = 0$ puisqu'à l'infini l'influence de la charge source devient négligeable.

$$V_{ext}(\infty) = 0 = 0 + K_2 \Rightarrow K_2 = 0$$

3 – Continuité du potentiel

Distribution volumique donc la fonction potentiel est continue en tout point : $\Rightarrow V_{ext}(r = R) = V_{int}(r = R)$

$$-\frac{\rho R^2}{6 \epsilon_0} + K_1 = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 R}$$

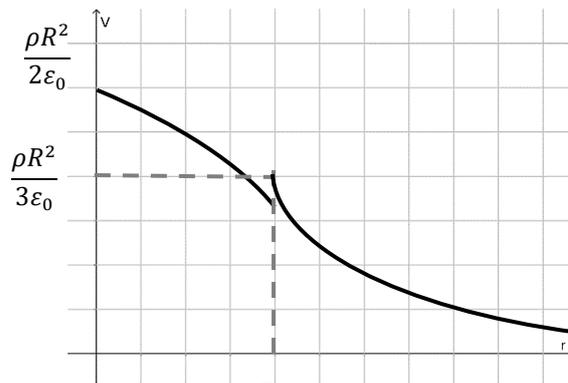
$$\Rightarrow K_1 = \frac{\rho R^2}{6 \epsilon_0} (2 + 1) = \frac{\rho R^2}{2 \epsilon_0}$$

| $r < R$ | $r > R$ |
|--|---|
| $V_{int} = -\frac{\rho r^2}{6 \epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2 \epsilon_0}$ | $V_{ext} = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r}$ |

4 – Cohérence $[V] = \frac{[q]}{[\epsilon_0]L} \dots$

| $r < R$ | $r > R$ |
|---|---|
| $[V_{int}] = \frac{[\rho]L^2}{[\epsilon_0]} = \frac{[charge]L^2}{[\epsilon_0]L^3} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L}$ | $[V_{ext}] = \frac{[\rho]L^3}{[\epsilon_0]L} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L}$ |
| Cohérent | |

5 – Graphe $V(r)$



$$r > r_0 : V(M) = V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ avec la convention } V(\infty) = 0$$

$r < r_0 :$

$$V(M) = V(r) = -\frac{er^2}{8\pi\epsilon_0 r_0^3} + \frac{3e}{8\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{e}{8\pi\epsilon_0 r_0^3} (3r_0^2 - r^2)$$

$$E_p = -\int \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -\int -e\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -e \int dV = -eV(r)$$

$$r > r_0 : E_p = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}; \quad r < r_0 : E_p = +\frac{e^2 r^2}{8\pi\epsilon_0 r_0^3} - \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} \left(3 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)$$

$$\text{Équilibre : en } r_{\text{éq}} \text{ tq } \left. \frac{dE_p}{dr} \right|_{r_{\text{éq}}} = 0 \text{ avec pour } r < r_0 \quad \frac{dE_p}{dr} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} r \text{ soit } \left. \frac{dE_p}{dr} \right|_{r_{\text{éq}}} = 0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} r_{\text{éq}}$$

$$r_{\text{éq}} = 0$$

$$\frac{dE_p}{dr} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} r \Rightarrow \frac{d^2 E_p}{dr^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} > 0 : \text{équilibre stable en O.}$$

L'énergie d'ionisation de l'électron est l'énergie qu'il faut fournir pour arracher un électron à l'atome pris dans son état fondamental (équilibre stable), soit passage de $r = r_0$ à l'infini.

$$E_{\text{ionisation}} = \Delta E_p = E_p(\infty) - E_p(0) = \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0}$$

Exo EM22. Boule de densité volumique variable – détermination d'une répartition de charge (1 fois, 2021)

$$r > R : \vec{E}(M) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{Q_{\text{int}}(R)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

$$r \leq R : \vec{E}(M) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

$4\pi r^2 dr$: volume entre les sphères de rayons r et $r + dr$

$$r \leq R : \vec{E}(M) = \frac{\int_0^r \rho(r) 4\pi r^2 dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\int_0^r \rho(r) r^2 dr}{\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = E_0 \vec{u}_r$$

$$\frac{\int_0^r \rho(r) r^2 dr}{\epsilon_0 r^2} = E_0$$

$$\int_0^r \rho(r) r^2 dr = E_0 \epsilon_0 r^2$$

$$\Rightarrow 2E_0 \epsilon_0 r dr = \rho(r) r^2 dr \Rightarrow \rho(r) = \frac{2E_0 \epsilon_0}{r}$$

Exo EM23. Densité de charge d'une distribution (2015)

1. Modélisation : distribution volumique entre deux sphères

2. $\vec{E} = \vec{0}$ pour $r < R_T$; $\vec{E} = \frac{\rho(r^3 - R_T^3)}{3 \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ pour $R_T < r < R_{atmosph}$ et $\vec{E} = \frac{\rho(R_{atmosph}^3 - R_T^3)}{3 \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ pour $r > R_{atmosph}$.

3. Entre les deux sphères, $\rho = \frac{3 \epsilon_0 r^2 E}{r^3 - R_T^3} = \frac{3 \epsilon_0 (R_T + h)^2 E}{(R_T + h)^3 - R_T^3} \approx \frac{3 \epsilon_0 (R_T + h)^2 E}{3 h R_T^2}$

4. Au niveau de l'écorce, $r = R_T$: $\vec{E} = \vec{0}$ (continuité du champ)

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{dE_z}{dz} = \frac{\Delta E_z}{\Delta z} = \frac{E_2 - E_1}{h_2 - h_1} = -6,2 \cdot 10^{-13} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\frac{E_2 - E_1}{h_2 - h_1} = \frac{E_2 - E_0}{h_2} \Rightarrow E_0 = 100 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

Exo EM24. Plasma ou mur (8 fois, 2022)

Choix des coordonnées : cartésiennes

Etude des symétries et invariances

Composantes de \vec{E} : Les plans $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charge donc de \vec{E} , qui appartient à leur intersection : \vec{E} suivant \vec{e}_z : $\vec{E}(M) = E(x; y; z) \vec{e}_z$;

Variables utiles de \vec{E} : Invariance de la distribution de charges donc de E par translation selon x et y : \vec{E} fonction de z seulement, soit $\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z$

Surface de Gauss (Σ_G) : cylindre d'axe \vec{e}_z , de surface S quelconque dans le plan (Oxy) , passant par M et par son symétrique M' par rapport au plan (Oxy) , et donc de hauteur $h = 2z$.

Rappel de cours :

■ Propriétés d'un champ électrostatique créé par une distribution de charges possédant un plan de symétrie Π_s

Les champs électrostatiques $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ en deux points M et M' symétriques par rapport au plan Π_s sont eux-mêmes symétriques par rapport à Π_s :

Si $M' = \text{sym}_{\Pi_s}(M)$, $\vec{E}(M') = \text{sym}_{\Pi_s} \vec{E}(M)$,

Remarque : M' étant le symétrique de M par rapport au plan $\Pi_s = (Oxy)$, plan de symétrie de la distribution de charges, on a $\vec{E}(M') = \text{sym}_{\Pi_s} \vec{E}(M)$

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z \quad \vec{E}(M') = E(-z) \vec{e}_z = -\vec{E}(M) = -E(z) \vec{e}_z$$

Pour $z \geq 0$:

Calcul du flux :

$$\oiint_{(\Sigma_G)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \Phi_{haut} + \Phi_{bas} + \Phi_{lat} = \iint_{P \in S_{haut}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_{haut}} + \iint_{P \in S_{bas}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_{bas}} + \iint_{P \in S_{lat}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_{lat}}$$

$$\oiint_{(\Sigma_G)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_z(z)S - E_z(-z)S + 0 = 2E_z(z)S \quad \text{car } E_z(-z) = -E_z(z)$$

Charge intérieure : Disjonction des cas

pour $0 \leq z \leq +\frac{a}{2}$: $Q_{int} = \rho 2zS$;

pour $z \geq +\frac{a}{2}$: $Q_{int} = \rho aS$

Théorème de Gauss :

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 2E_z(z)S \quad \Leftrightarrow \quad E_z(z) = \frac{Q_{int}}{2\epsilon_0 S}$$

Soit pour $0 \leq z \leq +\frac{a}{2}$: $Q_{int} = \rho 2zS$

$$E_z(z) = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \quad \vec{E} = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{e}_z ;$$

pour $z \geq +\frac{a}{2}$: $Q_{int} = \rho aS$

$$E_z(z) = \frac{\rho a}{2\epsilon_0} \quad \vec{E} = \frac{\rho a}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

pour $z \leq 0$: par symétrie :

$$-\frac{a}{2} \leq z \leq 0 : \quad \vec{E} = -\frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{e}_z ;$$

$$\text{pour } z \leq -\frac{a}{2} : \vec{E} = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

$$\begin{cases} |z| > \frac{a}{2} : E_{ext} = \epsilon \frac{\rho a}{2\epsilon_0} \\ |z| < \frac{a}{2} : E_{int} = \epsilon \frac{\rho z}{\epsilon_0} \end{cases}$$

avec $\epsilon = +1$ si $z > 0$ et $\epsilon = -1$ si $z < 0$,

• **Potentiel : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$.**

Les invariances de la distribution de charges se retrouvent sur le potentiel (principe de Curie), donc

$$V(M) = V(x, y, z) = V(z)$$

Donc : $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$ puisque V ne dépend que de z .

En projetant sur \vec{u}_z : $E = -\frac{dV}{dz}$

soit en intégrant par rapport au temps, avec A et B constantes d'intégration :

$$\begin{cases} |z| > \frac{a}{2} : V_{ext} = -\frac{\epsilon \rho a z}{2\epsilon_0} + A \\ |z| < \frac{a}{2} : V_{int} = -\epsilon \frac{\rho z^2}{2\epsilon_0} + B \end{cases}$$

avec $\epsilon = +1$ si $z > 0$ et $\epsilon = -1$ si $z < 0$,

En choisissant une origine des potentiels en $z = 0$:

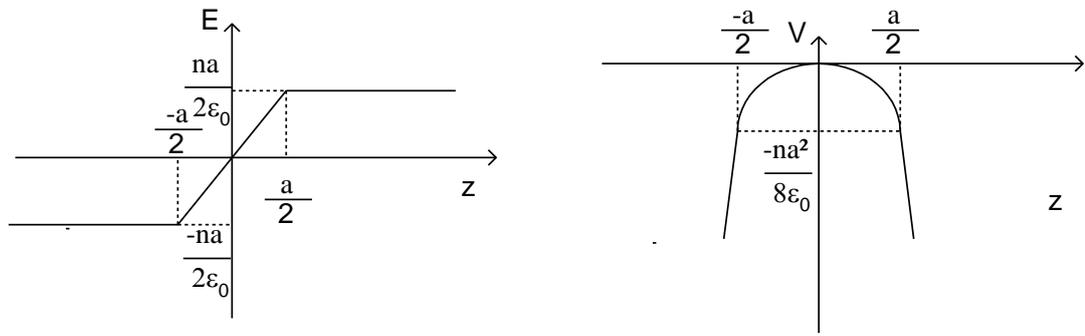
$$V_{int}(z = 0) = 0 + B = 0 \quad B = 0$$

Par continuité du potentiel en $z = \frac{a}{2}$:

$$V_{int}\left(z = \frac{a}{2}\right) = V_{ext}\left(z = \frac{a}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\rho a^2}{4\epsilon_0} + A = -\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad A = -\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0} + \frac{\rho a^2}{4\epsilon_0} = \frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}$$

On en déduit, avec $\epsilon = +1$ si $z > 0$ et $\epsilon = -1$ si $z < 0$, que :

$$\begin{cases} |z| > \frac{a}{2} : V_{ext} = -\frac{\epsilon \rho a z}{2\epsilon_0} + \frac{\rho a^2}{8\epsilon_0} \\ |z| < \frac{a}{2} : V_{int} = -\epsilon \frac{\rho z^2}{2\epsilon_0} \end{cases}$$



1. Conservation Em : $E_C(z) = E_C(d) + q \cdot V(d) - q \cdot V(z) > 0$ soit $E_C(d) > q \frac{a\eta}{2\epsilon_0} \left(d - \frac{a}{4}\right)$

Exo EM25. Potentiel de Yukawa (5 fois, 2019)

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r = -\left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e^{-\frac{r}{a}} - \frac{1}{a} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{a}}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{a}} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right) \vec{u}_r$$

Flux à travers la sphère de centre O et de rayon r

$$\Phi = \oiint_{S_{\text{sphère}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = \iint E(r) \cdot dS \underset{\substack{S_{\text{sphère}} \\ \text{à } r=\text{cte}}}{=} E(r) \iint_{\substack{\text{surface} \\ \text{sphère} \\ S=4\pi r^2}} dS \underset{=} E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} e^{-\frac{r}{a}} \left(1 + \frac{r}{a}\right)$$

Théorème de Gauss avec comme surface de Gauss la sphère de centre O et de rayon r :

$$\Phi = \oiint_{S_{\text{sphère}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$Q_{\text{int}} = \epsilon_0 \Phi = \epsilon_0 \frac{q}{\epsilon_0} e^{-\frac{r}{a}} \left(1 + \frac{r}{a}\right) = q e^{-\frac{r}{a}} \left(1 + \frac{r}{a}\right)$$

$r \ll a : Q_{\text{int}} = q$ et $r \gg a : Q_{\text{int}} = 0$. Modélisation d'une charge ponctuelle q placée en O et d'une charge -q répartie de zéro à l'infini : atome.

$$\text{Maxwell-Gauss : } \text{div } \vec{E} = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} e^{-\frac{r}{a}} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \right)}{\partial r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e^{-\frac{r}{a}} \left(-\frac{r}{a^2}\right)$$

$$\Rightarrow \rho(r) = -\frac{q}{4\pi r a^2} e^{-\frac{r}{a}}$$

Exo EM26. Condensateur plan (11 fois, 2022)

Version 1

Voir cours ; Notations :

plan 1 : ($x = 0$) est le plan chargé +Q ; plan 2 : ($x = d$) est le plan chargé -Q ; espace entre les armatures : $0 < x < d$.

1) $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \frac{Q}{2\epsilon_0 S} \vec{e}_x$, soit, pour le champ total : $\vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \vec{e}_x$ entre les armatures.

2) ddp : $V_1 - V_2 = \int_2^1 -\vec{E} \cdot d\vec{M} = \int_0^d \frac{Q}{\epsilon_0 S} \cdot dx = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$

3) Capacité $C = \frac{V_1 - V_2}{+Q} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$.

Version 2 : 2010

- $z > 0 : \vec{E} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_z$ et $z < 0 : \vec{E} = - \frac{\sigma}{2 \epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_z$, le champ est discontinu $\Delta \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_z$
- $-a/2 < z < a/2 : \vec{E} = - \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_z$ sinon $\vec{E} = \vec{0}$
- $V = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} z + cte$ et $U = V_+ - V_- = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 \epsilon_r}$ d'où $C = \frac{Q}{V_+ - V_-} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{a}$

Exo EM27. Nuage d'orage (6 fois, 2022)

On suppose que l'ensemble forme un condensateur plan (hypothèse a priori attendue par le jury).

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z = \vec{E}_0 \Rightarrow \sigma = \epsilon_0 E_0 = \frac{1}{36 \pi} 10^{-9} \times 100 = \frac{1}{36 \times 3} 10^{-7} \approx \frac{10^{-7}}{100} = 10^{-9} C.m^{-2}$$

Ou théorème de Coulomb $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z = \vec{E}_0$

En faisant l'hypothèse d'un condensateur sphérique :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r, d'où \vec{E}_0 = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 R_1^2} \vec{u}_r ; \sigma = \frac{Q}{4 \pi R_1^2} = \epsilon_0 E_0 = \frac{1}{36 \pi} 10^{-9} \times 100 \approx 1.10^{-9} C.m^{-2}.$$

Exo EM28. Etude électrostatique d'un condensateur sphérique (2 fois ; 2010)

- Si $R_1 < r < R_2 : \vec{E} = \frac{Q}{4 \pi r^2 \epsilon_0} \vec{u}_r$ sinon $\vec{E} = \vec{0}$
- $\Delta V = V(R_1) - V(R_2) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ et $C_3 = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4 \pi \epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \approx = \frac{4 \pi \epsilon_0 R_1^2}{e} = \frac{S \epsilon_0}{e}$

Exo EM29. Capacité terrestre (ionosphère)

On se place en coordonnées sphériques.

Symétries de la distribution de charges :

Tous les plans passant par OM sont plans de symétrie de la distribution : \vec{E} appartient à l'intersection de ces plans.

Invariances de la distribution de charges :

Distribution invariante par rotation autour de O $\rightarrow \vec{E}$ indépendant de θ et ϕ

Conclusion : $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$

Surface de Gauss : sphère de centre O et de rayon r (en pointillés sur la figure).

$$\varphi = \oiint \vec{E} \cdot dS = 4 \pi r^2 E$$

Théorème de Gauss : en un point M tel que $R < z < R + z_0 : Q_{int} = -Q$

$$4 \pi r^2 E = \frac{-Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{-Q}{4 \pi r^2 \epsilon_0} \vec{u}_r$$

Détermination du potentiel :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

$$V = - \int E dr = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = - \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{r} + cte$$

$$\Delta V = V(R + z_0) - V(R) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + z_0} \right)$$

Capacité :

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4 \pi \epsilon_0}{\frac{1}{R} - \frac{1}{R + z_0}}$$

On a $R \gg z_0$, alors

$$\frac{1}{R + z_0} = \frac{1}{R} \frac{1}{1 + \frac{z_0}{R}} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{z_0}{R} \right)^{-1} \approx \frac{1}{R} \left(1 - \frac{z_0}{R} \right)$$

$$C \approx \frac{4 \pi \epsilon_0}{\frac{1}{R} - \frac{1}{R} \left(1 - \frac{z_0}{R} \right)} = \frac{4 \pi \epsilon_0 R^2}{z_0} = \frac{S \epsilon_0}{z_0} \quad \text{avec } S = 4 \pi R^2$$

$$C \approx \frac{4 \pi (60 \cdot 10^6)^2 \times 8,8 \cdot 10^{-12}}{60 \cdot 10^3} = 4 \pi \times 60^2 \times 8,8 \cdot 10^{12-12-3} = 4 \pi \times 60 \times 8,8 \cdot 10^{-3}$$

$$C = 4 \pi \times 6 \times 8,8 \cdot 10^{-2} = 663 \cdot 10^{-2} = 6,6 F$$

Exo EM30. Condensateur cylindrique (variantes : 18 fois ; 2021)

$$\vec{E}_{int} = \vec{0}; V_{int} = cte \quad \text{et} \quad Q_{int} = 0.$$

Les charges se répartissent à la surface du conducteur uniquement avec une densité σ

$$E(r)\vec{u}_r. \lambda_1 > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 < 0$$

$$\lambda_1 = -\lambda_2 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = -\sigma_1 \frac{r_1}{r_2}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda_1}{2 \pi r \epsilon_0} \vec{u}_r \quad \text{si } r_1 < r < r_2 \quad \text{sinon } \vec{E} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Gamma = \frac{C}{H} = \frac{2 \pi \epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Version 2 (2023)

1) Calcul du champ \vec{E} créé : Utilisation du théorème de Gauss

1- Coordonnées cylindriques, d'axe (Oz) l'axe du cylindre

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, z) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, z) \vec{u}_\theta + E_z(r, \theta, z) \vec{u}_z$$

2- Symétries (composantes du champ)

Le plan $\pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ passant par le point M et perpendiculaire à l'axe du cylindre est plan de symétrie de la distribution de charges ; le champ \vec{E} appartient donc à π_1 et n'a pas de composante selon \vec{u}_z : $E_z = 0$.

Le plan $\pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ passant par le point M et contenant l'axe (Oz) du cylindre est plan de symétrie de la distribution de charges ; le champ \vec{E} appartient donc à π_2 et n'a pas de composante selon \vec{u}_θ : $E_\theta = 0$.

⇒ \vec{E} en un point M d'un plan de symétrie appartient à ce plan de symétrie ; il appartient donc à l'intersection des différents plans de symétrie. Ici, \vec{E} est suivant \vec{u}_r :

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

3 -Invariances (variables utiles)

Distribution invariante par rotation selon θ et par translation selon z .

⇒ $\|\vec{E}\|$ ne dépend ni de θ ni de z .

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$$

4- Choix de la surface de Gauss :

Le champ étant radial, on choisit une surface Σ_G passant par le point M telle que les différentes surfaces aient des vecteurs surface colinéaires ou orthogonaux au champ, soit à \vec{u}_r : cylindre de même axe (Oz) que le cylindre, de rayon r et de hauteur h quelconque. Sa surface latérale passe par le point M ; il s'agit bien d'une surface fermée passant par le point M étudié pouvant constituer une surface de Gauss.

La surface de Gauss a une surface totale $\Sigma_G = S_{haut} + S_{bas} + S_{lat}$ avec $S_{haut} = S_{bas} = S$ surfaces des faces inférieures et supérieures et S_{lat} surface latérale du cylindre de Gauss.

5- Calcul du flux sortant de \vec{E} à travers la surface de Gauss $\Sigma_G = S_{haut} + S_{bas} + S_{lat}$

On décompose le flux à travers la surface de Gauss fermée en une somme de flux à travers les différentes surfaces constituant la surface de Gauss fermée

$$\Phi = \iint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot \vec{dS}(P) = \Phi_{haut} + \Phi_{bas} + \Phi_{lat}$$

$$\Phi = \iint_{P \in S_{haut}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{haut} + \iint_{P \in S_{bas}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{bas} + \iint_{P \in S_{lat}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{lat}$$

$$\Phi_{haut} = \iint_{P \in S_{haut}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{haut} :$$

les vecteurs \vec{E} et \vec{dS}_{haut} sont orthogonaux, $\Phi_{haut} = 0$

($\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ et \vec{dS}_{haut} suivant \vec{u}_z : $\vec{E} \cdot \vec{dS}_{haut} = E(r)\vec{u}_r \cdot dS_{haut}\vec{u}_z$ avec $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z = 0$ soit $\Phi_{haut} = 0$).

Idem pour Φ_{bas} : $\Phi_{bas} = \iint_{P \in S_{bas}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{bas}$: les vecteurs \vec{E} et \vec{dS}_{bas} sont orthogonaux, $\Phi_{bas} = 0$

($\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ et \vec{dS}_{bas} suivant $-\vec{u}_z$: $\vec{E} \cdot \vec{dS}_{bas} = E(r)\vec{u}_r \cdot dS_{bas}(-\vec{u}_z)$ avec $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z = 0$ soit $\Phi_{bas} = 0$).

$$\Phi_{lat} = \iint_{P \in S_{lat}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{lat} = \iint E(r) \vec{u}_r \cdot dS_{lat} \vec{u}_r \stackrel{\substack{\vec{E} \text{ et } \vec{dS} \\ \text{colinéaires}}}{=} \iint E(r) \cdot dS_{lat} \stackrel{\substack{E(r) \text{ constant} \\ \text{sur } S_{lat} \text{ à } r = \text{cte}}}{=} E(r) \iint dS_{lat}$$

$$\Phi_{lat} = E(r) \cdot S_{lat} = E(r) \cdot 2\pi r h$$

$$\Phi = \Phi_{haut} + \Phi_{bas} + \Phi_{lat} = \Phi_{lat} = E(r) \cdot 2\pi r h$$

6- Calcul de la charge intérieure : Disjonction des cas

si $R_1 < r < R_2$: $Q_{int} = +Q$; si $r < R_1$: $Q_{int} = 0$; si $r > R_2$: $Q_{int} = +Q - Q = 0$
 soit si $r < R_1$ et $r > R_2$: $Q_{int} = 0$

7- Application du théorème de Gauss :

$$\Phi = \iint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot \vec{dS}(P) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = E(r) \cdot 2\pi r h$$

On a donc :

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h} \vec{u}_r \text{ pour } R_1 < r < R_2 ; \quad \vec{E} = \vec{0} \text{ pour } r < R_1 \text{ et } r > R_2$$

8. Calcul du potentiel électrostatique :

Par définition, on a $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{OM} = -E(r)dr$ (Ou encore : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$), soit

$$V(r) = \int -E(r)dr + cte$$

En exploitant les conditions aux limites $V(R_1) = V_1$ et $V(R_2) = V_2$:

pour $R_1 < r < R_2$: avec $E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h}$, on obtient $V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{R_1}{r} + V_1$;

pour $r < R_1$ et $r > R_2$: $\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow V = cte$, soit $V = V_1$ pour $r < R_1$ et $V = V_2$ pour $r > R_2$

2) Calcul de la capacité : $C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$

Différence de potentiel entre les armatures

$$V_1 - V_2 = \int_2^1 dV = \int_2^1 -\vec{E} \cdot d\vec{M} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{M}$$

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h} \vec{e}_r \cdot d\vec{M} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

D'où $C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}$ soit $C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}$

Validation : vérification de l'homogénéité et du signe : $[C] = [\epsilon_0] L$ ok et $C > 0$: cohérent

Remarques :

Capacité globale : $C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}$; **Capacité linéique** ou capacité par unité de longueur $\Gamma = \frac{C}{h}$: $\Gamma = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}$

Cas où les deux armatures sont très proches

On s'intéresse au cas où $e = R_2 - R_1 \ll R_1$.

$$\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \ln\left(\frac{R_1 + e}{R_1}\right) = \ln\left(1 + \frac{e}{R_1}\right) \text{ avec } \frac{e}{R_1} \ll 1$$

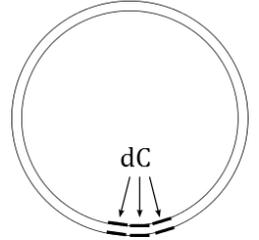
Développement limité à l'ordre 1 en $\frac{e}{R_1}$

$$\ln\left(1 + \frac{e}{R_1}\right) = \frac{e}{R_1} + o\left(\frac{e}{R_1}\right)$$

La capacité du condensateur s'écrit alors

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\frac{e}{R_1}}$$

$$C = \epsilon_0 \frac{2\pi R_1 h}{e}$$



Lien avec la capacité d'un condensateur plan :

Interprétation [*]: $2\pi R_1 h =$ Surface latérale du cylindre, soit C de la forme $C = \epsilon_0 \frac{S}{e}$: localement, comportement de condensateur plan

Exo EM31. Cylindre et fil

Théorème de superposition : le champ électrique créé par la distribution fil + cylindre correspond à la somme des champs électriques créés par chacune des deux distributions seules : $\vec{E}(M) = \vec{E}_{fil}(M) + \vec{E}_{cylindre}(M)$

Hypothèse : cylindre et fil infinis.

Sym : $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z) \Pi^+$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta) \Pi^+ \Rightarrow \vec{E} \in \Pi^+$ donc \vec{E} porté par \vec{u}_r

Inv : rotation d'angle θ et translation suivant Oz : $E = f(r)$

$$Cl : \vec{E} = E(r)\vec{u}_r$$

Surface de Gauss : cylindre de rayon r , de hauteur h . $\varphi = \varphi_{lat} = E \cdot 2\pi r h$

$$r < a : Q_{int} = \lambda h \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \vec{u}_r$$

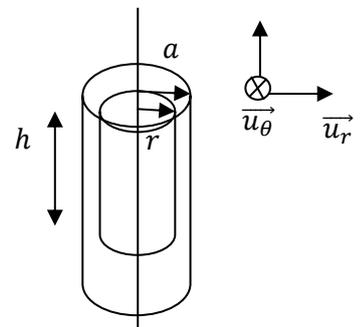
$$r > a : Q_{int} = \lambda h + \sigma 2\pi a h \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda + \sigma 2\pi a}{2\pi r \epsilon_0} \vec{u}_r$$

\vec{E} non défini sur le fil ni sur la surface chargée

Discontinuité à travers la surface chargée : $\vec{E}_2(a) - \vec{E}_1(a) =$

$$\left(\frac{\lambda + \sigma 2\pi a}{2\pi a \epsilon_0} - \frac{\lambda}{2\pi a \epsilon_0}\right) \vec{u}_r = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$$



$$r > a: dV = -\frac{\lambda + \sigma 2\pi a}{2\pi r \epsilon_0} dr \Rightarrow V = -\frac{\lambda + \sigma 2\pi a}{2\pi \epsilon_0} \ln r + cte$$

$$CL: V(r = a) = 0 \Rightarrow V = -\frac{\lambda + \sigma 2\pi a}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r}{a}$$

$$0 < r < a: dV = -\frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} dr \Rightarrow V = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln r + cte \Rightarrow V = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r}{a}$$

Condensateur

- Si potentiel fini sur une armature (par exemple, l'armature intérieure est vu comme un cylindre de rayon a_0 et chargé $Q_0 = \lambda h = \sigma_0 2\pi a_0 h$
- Et si charge opposée sur les 2 armatures : $-Q_0 = -\sigma 2\pi a h$

$$\text{Pour } a_0 < r < a, \vec{E} = \frac{\sigma_0 a_0}{r \epsilon_0} \vec{u}_r \text{ et } V = -\frac{\sigma_0 a_0}{\epsilon_0} \ln r + cte$$

$$U = V^+ - V^- = V(r = a_0) - V(r = a) = -\frac{\sigma_0 a_0}{\epsilon_0} \ln \frac{a_0}{a} = \frac{\sigma_0 a_0}{\epsilon_0} \ln \frac{a}{a_0}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma_0 2\pi a_0 h}{\frac{\sigma_0 a_0}{\epsilon_0} \ln \frac{a}{a_0}} = \frac{2\pi h \epsilon_0}{\ln \frac{a}{a_0}}$$

■ MAGNETOSTATIQUE

Exo EM32. Fil et cylindre infinis

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{u}_\theta \text{ pour } r < R; \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 j R^2}{2r} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \text{ pour } r > R$$

pour $r > R$ pour $r > R$ identique dans les deux cas.

Exo EM33. Conducteur cylindrique

- a. **Coordonnées** : cylindriques, d'axe (Oz) ascendant l'axe du cylindre infini.

Le plan ($M; \vec{e}_r; \vec{e}_z$) est plan de symétrie ; or \vec{B} est perpendiculaire aux plan de symétrie $\Rightarrow \vec{B} = B \vec{e}_\theta$.

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + B_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$$

Symétries : Soit M un point quelconque de rayon r ; plan $\Pi(M; \vec{e}_r; \vec{e}_z)$ (plan de la feuille) plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B} \perp \Pi$, soit \vec{B} dirigé selon \vec{e}_θ : $\vec{B}(M) = B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$.

Invariances : Invariance de la distribution de courant donc de $B_\theta(r, \theta, z)$ selon le principe de Curie par translation selon (Oz) et par rotation selon θ .

$$\text{On a donc } \vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta = B(r) \vec{e}_\theta$$

- 1) Calcul du champ B(r)

Contour d'Ampère : Cercle de centre un point de l'axe (Oz) de rayon r , passant par le point M étudié, orienté dans le sens de $+\vec{e}_\theta$.

Calcul de la circulation le long du contour d'Ampère :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \oint_{(\Gamma)} B(r) \vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = \oint_{(\Gamma)} B(r) r d\theta = 2\pi r B(r)$$

Contour d'Ampère

Le contour d'Ampère tel qu'il est orienté définit une surface (Σ) correspondant au disque de contour le cercle de rayon r , de vecteur normale à la surface \vec{n}_{ext} de direction \perp au disque, soit selon (Oz), et de sens définit par la règle de la main droite, soit selon $+\vec{e}_z$.

Théorème d'Ampère :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{M} = \mu_0 I_{enlacé} = 2\pi r B(r)$$

Soit $B(r) = \frac{\mu_0 I_{enlacé}}{2\pi r}$

Courant enlacé par le contour d'Ampère : disjonction des cas

$$I_{enlacé} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \text{d'où}$$

$$\vec{B}(r \geq R) = \frac{\mu_0 j R^2}{2r} \vec{e}_\theta ; \vec{B}(r \leq R) = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{e}_\theta ; \vec{B} \text{ continu, défini partout.}$$

Fil infini : $I = j\pi R^2$ d'où $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$

Exo EM34. Fil, conducteur cylindrique creusé (7 fois, 2021)

Coordonnées : cylindriques, d'axe (Oz) ascendant l'axe du cylindre infini.

Le plan ($M; \vec{e}_r; \vec{e}_z$) est plan de symétrie ; or \vec{B} est perpendiculaire aux plan de symétrie $\Rightarrow \vec{B} = B \vec{e}_\theta$.

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + B_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$$

Symétries : Soit M un point quelconque de rayon r ; plan $\Pi(M; \vec{e}_r; \vec{e}_z)$ (plan de la feuille) plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B} \perp \Pi$, soit \vec{B} dirigé selon \vec{e}_θ : $\vec{B}(M) = B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$.

Invariances : Invariance de la distribution de courant donc de $B_\theta(r, \theta, z)$ selon le principe de Curie par translation selon (Oz) et par rotation selon θ .

On a donc $\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta = B(r) \vec{e}_\theta$

2) Calcul du champ $B(r)$

Contour d'Ampère : Cercle de centre un point de l'axe (Oz) de rayon r , passant par le point M étudié, orienté dans le sens de $+\vec{e}_\theta$.

Calcul de la circulation le long du contour d'Ampère :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \oint_{(\Gamma)} B(r) \vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = \oint_{(\Gamma)} B(r) r d\theta = 2\pi r B(r)$$

Contour d'Ampère

Le contour d'Ampère tel qu'il est orienté définit une surface (Σ) correspondant au disque de contour le cercle de rayon r , de vecteur normale à la surface \vec{n}_{ext} de direction \perp au disque, soit selon (Oz), et de sens définit par la règle de la main droite, soit selon $+\vec{e}_z$.

Théorème d'Ampère :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{M} = \mu_0 I_{enlacé} = 2\pi r B(r)$$

$$\text{Soit } B(r) = \frac{\mu_0 I_{enlacé}}{2\pi r}$$

Courant enlacé par le contour d'Ampère : disjonction des cas

$$I_{enlacé} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \text{d'où}$$

$$\vec{B}(r \geq R) = \frac{\mu_0 j R^2}{2r} \vec{e}_\theta ; \vec{B}(r \leq R) = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{e}_\theta ; \vec{B} \text{ continu, défini partout.}$$

$$\text{Fil infini : } I = j\pi R^2 \text{ d'où } \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

Cas du conducteur creusé : Deux méthodes : étude directe avec application du théorème d'ampère et disjonction des cas, ou superposition d'un cylindre plein de rayon R parcouru par I et d'un cylindre plein de rayon a parcouru par $-I$

$$\vec{B}(r \geq R) = \frac{\mu_0 j (R^2 - a^2)}{2r} \vec{e}_\theta ; \vec{B}(a \leq r \leq R) = \frac{\mu_0 j (r^2 - a^2)}{2r} \vec{e}_\theta ; \vec{B}(r \leq a) = \vec{0} ; \vec{B} \text{ continu, défini partout.}$$

Exo EM35. Cable coaxial (24 fois, 2022)

Calcul du champ $B(r)$

Coordonnées : cylindriques, d'axe (Oz) ascendant l'axe du cylindre infini.

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + B_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$$

Symétries : Soit M un point quelconque de rayon r ; plan $\Pi(M; \vec{e}_r; \vec{e}_z)$ (plan de la feuille) plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B} \perp \Pi$, soit \vec{B} dirigé selon \vec{e}_θ : $\vec{B}(M) = B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$.

Invariances : Invariance de la distribution de courant donc de $B_\theta(r, \theta, z)$ selon le principe de Curie par translation selon (Oz) et par rotation de θ .

$$\text{On a donc } \vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta = B(r) \vec{e}_\theta$$

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \text{d'où} \quad \vec{j}_{int} = \frac{I}{S_{int}} \vec{e}_z = \frac{I}{\pi R_1^2} \vec{e}_z ; \text{ puis } \vec{j}_{ext} = \frac{I}{S_{ext}} \vec{e}_z = -\frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \vec{e}_z.$$

Contour d'Ampère : Cercle de centre un point de l'axe (Oz) de rayon r , passant par le point M étudié, orienté dans le sens de $+\vec{e}_\theta$ (sens trigonométrique).

Calcul de la circulation le long du contour d'Ampère :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \oint_{(\Gamma)} B(r) \vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = \oint_{(\Gamma)} B(r) r d\theta = 2\pi r B(r)$$

Contour d'Ampère

Le contour d'Ampère tel qu'il est orienté définit une surface (Σ) correspondant au disque de contour le cercle de rayon r , de vecteur normale à la surface \vec{n}_{ext} de direction \perp au disque, soit selon (Oz), et de sens définit par la règle de la main droite, soit selon $+\vec{e}_z$.

Courant enlacé par le contour d'Ampère : disjonction des cas

$$\text{si } r \leq R_1, I_{enlacé} = \iint_{(\Sigma)} \vec{J}_{int} \cdot \vec{dS} = \frac{I}{\pi R_1^2} \vec{e}_z \cdot \pi r^2 \vec{e}_z = \frac{I r^2}{R_1^2}$$

$$\text{si } R_1 \geq r \geq R_2, I_{enlacé} = I$$

$$\text{si } R_2 \geq r \geq R_3, I_{enlacé} = I + \iint_{(\Sigma)} \vec{J}_{ext} \cdot \vec{dS} = I + \vec{J}_{ext} \cdot (\pi r^2 - \pi R_2^2) \vec{e}_z$$

$$I_{enlacé} = I - \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \cdot (\pi r^2 - \pi R_2^2) = I \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) = I \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

$$\text{si } r \geq R_3, I_{enlacé} = I - I = 0$$

$$\text{Théorème d'Ampère : } \oint_{(r)} \vec{B} \cdot d\vec{M} = \mu_0 I_{enlacé} = 2\pi r B(r)$$

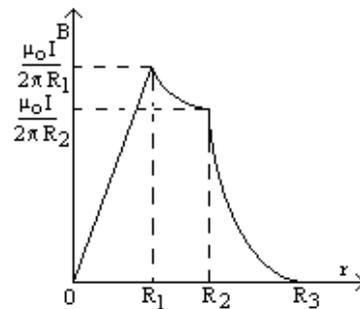
$$\text{Soit } B(r) = \frac{\mu_0 I_{enlacé}}{2\pi r}, \text{ d'où :}$$

$$r \leq R_1 : B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2};$$

$$R_1 \geq r \geq R_2 : B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$R_2 \geq r \geq R_3 : B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)$$

$$r \geq R_3 \Rightarrow \vec{B}(M) = \vec{0}$$



Le champ n'est pas discontinu puisque la distribution de courant est volumique.

Matériau isolant : tel que les charges ne sont pas libres de se déplacer

Exo EM36. Cable coaxial volumique et surfacique

Le plan ($M; \vec{e}_r; \vec{e}_z$) est plan de symétrie ; or \vec{B} est perpendiculaire aux plans de symétrie $\Rightarrow \vec{B} = B \vec{e}_\theta$. La distribution de courant est invariante par translation et rotation suivant (Oz) $\Rightarrow \vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$.

$$\vec{J}_{int} = \frac{I}{\pi R_1^2} \vec{e}_z; \text{ puis } \vec{J}_{ext} = -\frac{I}{2\pi R_2} \vec{e}_z.$$

$$r < R_1 : B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}; R_1 < r < R_2 : B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}; r > R_2 \Rightarrow \vec{B}(M) = \vec{0}$$

Pas de discontinuité en R_1 ; discontinuité de $\mu_0 j_{ext}$ en R_2 .

Exo EM37. Cavité cylindrique (10 fois, 2021)

$$r < R : \vec{B} = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{u}_\theta \text{ et } r > R : \vec{B} = \frac{\mu_0 j R^2}{2 r} \vec{u}_\theta$$

$$\text{Fil infini : } I = j\pi R^2 \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \text{ (modélisation cohérente pour } r \gg R)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 j}{2} \vec{u}_z \wedge (\vec{O}_1 \vec{M} - \vec{O}_2 \vec{M}) = \frac{\mu_0 j}{2} \vec{u}_z \wedge \vec{O}_1 \vec{O}_2 = \frac{\mu_0 j}{2} \vec{j} \wedge \vec{O}_1 \vec{O}_2$$

Exo EM38. Solénoïde infini – bis

Direction, sens, variable utile

Courbe d'Ampère rectangulaire s'appuyant sur l'axe

$$\vec{B}_{int} = \mu_0 n I \vec{e}_{axe}; \vec{B}_{ext} = \vec{0}.$$

Exo EM39. Nappe de courant

Nappe infinie xOy parcourue par $\vec{j}_s = j_s \vec{e}_x$: si $z < 0$, alors $\vec{B} = +\frac{1}{2} \mu_0 j_s \vec{e}_y$; si $z > 0$, alors $\vec{B} = -\frac{1}{2} \mu_0 j_s \vec{e}_y$.

Exo EM40. Pendule magnétostatique

1. La force doit faire tourner la tige dans le sens trigonométrique, le poids faisant tourner la tige dans le sens horaire. Selon le sens du courant, on a pour la force de Laplace, la tige étant parcourue dans le sens de i :

$$\underbrace{\vec{F}_{Lap} = i \vec{AO} \wedge \vec{B}}_{\text{sens trigonométrique}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\vec{F}_{Lap} = i \vec{OA} \wedge \vec{B}}_{\text{sens horaire}}$$

C'est donc la première expression qui convient, donc courant ascendant dans la tige (descendant dans le générateur).

2. HORS-PROGRAMME

a priori infaisable sans la notion de moment...

Somme nulle des moments par rapport à Oz pour l'équilibre de la tige, soumise à son poids, les forces de Laplace et la réaction de l'axe.

2. A l'équilibre la somme des moments des forces extérieures agissant sur le fil est nulle

$$\Rightarrow \vec{M}_{\vec{F}_{Lap}/O} + \vec{M}_{\vec{P}/O} + \vec{M}_{\vec{R}/O} = \vec{0}$$

$$F_{Lap} - mg \sin \theta_{\acute{e}q} = 0$$

En admettant que la résultante des forces de Laplace s'applique au centre de la tige (ce qui est démontrable), on obtient : $-mg \frac{\ell}{2} \sin \theta_{\acute{e}q} + Bi\ell \frac{\ell}{2} + 0 = 0$, soit

$$\sin \theta_{\acute{e}q} = \frac{F_{Lap}}{mg} = \frac{Bi\ell}{mg}$$

RÉSOLUTION NON RIGOUREUSE parfois ATTENDUE

Somme des forces nulle et projection perpendiculaire à la tige

$$+Bi\ell \vec{u}_\theta + m\vec{g} + \vec{R}_{axe} = \vec{0} \Rightarrow +Bi\ell - mg \sin \theta_{\acute{e}q} + ??? = 0 \Rightarrow +Bi\ell - mg \sin \theta_{\acute{e}q} + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\sin \theta_{\acute{e}q} = \frac{Bi\ell}{mg}$$

INDUCTION DE NEUMANN

Exo EM41. Solénoïde infini et bobine courte – Inductance et mutuelle

$\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \vec{u}_z$ à l'intérieur, champ nul à l'extérieur

$$\Phi_{propre} = \frac{\mu_0 N^2 i S}{\ell} = Li \Rightarrow$$

$$L = \frac{\Phi_{propre}}{i} = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{\ell} = \frac{4 \times \pi^2 \times 10^{-7} \times 25 \cdot 10^4 \times 10^{-2}}{1} = 10^{-2} \text{ H} = 10 \text{ mH}$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{\Delta i}{\Delta t} = -10^{-2} \times (-2) = 2 \cdot 10^{-2} \text{ V} = 20 \text{ mV}$$

Si même orientation, $\Phi = N' \mu_0 \frac{N}{\ell} i \pi R^2$ (attention, R et non R' car le champ est nul à l'extérieur)

$$M = \frac{\phi}{i} \Rightarrow M = \frac{\mu_0 N N' \pi R^2}{\ell} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ H} = 2 \text{ mH}.$$

6) f.é.m. induite dans la bobine : $e' = -\frac{d\Phi_{propre}}{dt} - \frac{d\phi}{dt} = -L' \frac{di'}{dt} - M \frac{di}{dt}$ si i' parcourt la bobine courte.

Version 2 (2017)

1. $\Phi_{propre} = \frac{\mu_0 N^2 i S}{\ell} = Li \Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{\ell}$

2. $\phi = \frac{\mu_0 N N' i \pi R^2}{\ell}$.

3. $M = \frac{\phi}{i} \Rightarrow M = \frac{\mu_0 N N' \pi R^2}{\ell}$.

4. $e = -\frac{d\Phi_{propre}}{dt} - \frac{d\phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}$.

5. Schéma électrique

6. $U = -e = L \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}$ La résoudre ?

Exo EM42. Fil rectiligne et cadre (7 fois ; 2010)

1. Champ magnétique créé par un fil : $\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$

2. $\vec{dF}_{Lap} = \vec{dF}_{1/2} = I \vec{d\ell} \wedge \vec{B} = I_2 \vec{d\ell}_2 \wedge \vec{B}_1(M_2) \Rightarrow \vec{F}_{Lap} = -\frac{\mu_0 I I' ab}{2\pi(a+c)c} \vec{e}_x$

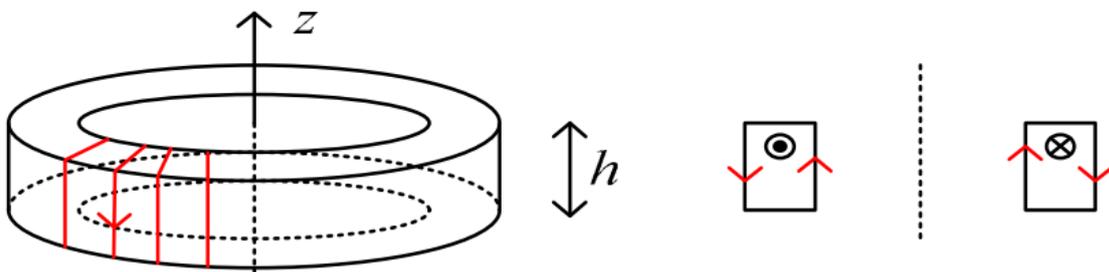
A.N. $F = 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ N}$

$\Phi_B = \iint B \cdot dS = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a \cdot dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_c^{c+a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{c+a}{c}$ A.N. $\Phi = 4,2 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}$

$L = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}$

4. $M = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \left(\frac{a+c}{c} \right)$ A.N. $\Phi = 4,2 \cdot 10^{-8} \text{ H}$

Exo EM43. Tore (13 fois, 2021)



Distribution de courant invariante par rotation autour de (Oz) donc B indépendant de θ (attention ! ici pas d'invariance par translation selon r ou z !)

Le plan passant par M et contenant Oz (plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$) est plan de symétrie de la distribution de courant donc \vec{B} est perpendiculaire à ce plan.

$$\vec{B} = B(r, z) \vec{u}_\theta$$

Détermination de \vec{B} :

Choix du contour fermé :

Contour d'Ampère : cercle d'axe (Oz) passant par M , de rayon r orienté suivant (Oz) par la règle de la main droite (sens trigonométrique, selon \vec{u}_θ).

$$C = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B(r) r d\theta \quad \stackrel{\substack{\equiv \\ r \text{ donc } B(r)=cte \\ \text{sur le contour d'Ampère}}}{=} \quad B(r) \int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r B(r)$$

Application du théorème d'Ampère :

$$C = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlacés}$$

$r < \ell$: $\vec{B}_1 = \vec{0}$ (aucune spire enlacée, $I_{enlacés} = 0$)

$\ell < r < \ell + h$: $\vec{B} = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} \vec{u}_\theta$ (L'intensité enlacée correspond à l'intensité des spires, prise en compte uniquement du côté intérieur du tore)

$r > \ell + h$: $\vec{B} = \vec{0}$ (L'intensité enlacée correspond à l'intensité des spires, prise en compte du côté intérieur et extérieur du tore qui est dans le sens opposé, d'où : $I_{enlacés} = NI - NI \Rightarrow B = 0$)

B discontinu

$$\text{si } M \text{ est à l'intérieur du tore, } \vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{u}_\theta. \quad \text{Sinon, } \vec{B} = \vec{0}.$$

1. Flux du champ magnétique à travers la surface d'une spire

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad d\vec{S} = dr \cdot dz \vec{u}_\theta$$

$$\phi_{1 \text{ spire}} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} dz \cdot \int_{r=\ell}^{r=\ell+h} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i h}{2\pi} \ln \frac{\ell+h}{\ell}$$

$$\phi = N \phi_{1 \text{ spire}} = \frac{\mu_0 N i h}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{h}{\ell} \right) = L i$$

$$L = \frac{\phi}{i} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{h}{\ell} \right)$$

$$e = - \frac{d\Phi_{propre}}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

Exo EM44. Tore et fil infini

$I(t) \Rightarrow \vec{B}$ varie $\Rightarrow \Phi = \iint_{\text{une spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$ varie \Rightarrow apparition d'une fém d'induction $e = - \frac{d\Phi}{dt}$ qui va créer un courant induit.

Le plan $(M; \vec{u}_r; \vec{u}_z)$ est plan de symétrie ; or \vec{B} est perpendiculaire aux plan de symétrie $\Rightarrow \vec{B} = B \vec{u}_\theta$.

Les distributions de courant sont invariantes par rotation autour de $(Oz) \Rightarrow \vec{B} = B(r, z, t) \vec{u}_\theta$.

$$\Phi = \frac{\mu_0 N(I(t) - N \cdot i(t)) b}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 N(I(t) - N \cdot i(t)) b}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R} \cdot \frac{d}{dt} [I(t) - N \cdot i(t)]$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = Ri = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} [I(t) - N \cdot i(t)] = 0 \Rightarrow i_{eff} = \frac{I_{eff}}{N} : \text{pince ampèremétrique.}$$

Exo EM45. Pince ampèremétrique (2016)

1. Calcul du champ magnétostatique par le théorème d'Ampère

Coordonnées : cylindriques, d'axe (Oz) ascendant l'axe du fil rectiligne infini.

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + B_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$$

Symétries : Soit M un point quelconque en dehors du fil ($z \neq 0$); plan $\Pi(M; \vec{e}_r; \vec{e}_z)$ (plan de la feuille) plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B} \perp \Pi$, soit \vec{B} dirigé selon \vec{e}_θ : $\vec{B}(M) = B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$.

Invariances : Invariance de la distribution de courant donc de \vec{B} selon le principe de Curie par translation selon (Oz) et par rotation selon θ .

$$\text{On a donc } \vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta = B(r) \vec{e}_\theta$$

Contour d'Ampère : Cercle de centre un point de l'axe (Oz) de rayon r , passant par le point M étudié, orienté dans le sens de $+\vec{e}_\theta$.

Calcul de la circulation le long du contour d'Ampère :

$$\oint_{(r)} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \oint_{(r)} B(r) \vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = \oint_{(r)} B(r) r d\theta = 2\pi r B(r)$$

Courant enlacé par le contour d'Ampère

Le contour d'Ampère tel qu'il est orienté définit une surface correspondant au disque de contour le cercle de rayon r , de vecteur normale à la surface \vec{n}_{ext} de direction \perp au disque, soit selon (Oz) , et de sens définit par la règle de la main droite, soit selon $+\vec{e}_z$.

$$\text{On a donc } I_{enlacé} = I$$

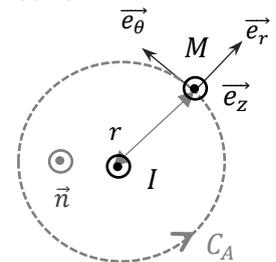
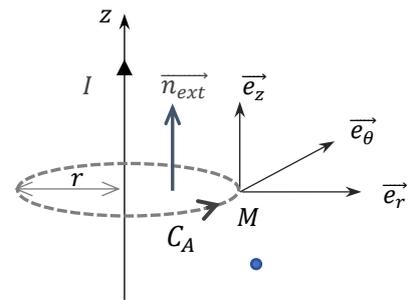
Théorème d'Ampère :

$$\oint_{(r)} \vec{B} \cdot d\vec{M} = \mu_0 I_{enlacé}$$

$$\text{Soit } 2\pi r B(r) = \mu_0 I \quad \text{et} \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Finalement

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta} ; \text{ les lignes de champs sont des cercles d'axe le fil orientées dans le sens trigo si } I \text{ suivant } +z.$$



2. Par exemple pour un solénoïde infini : $B = \frac{\mu_0 NI}{\ell}$ soit $[B] = \frac{[\mu_0]I}{L}$

3. Orientation des spires pour flux positif (par exemple) puis exploitation de la loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$

$$\Phi(\vec{B}) = NS B(d) = NS \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi d} = \frac{NS\mu_0 I_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t)}{2\pi d} \text{ et } e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\omega NS\mu_0 I_{eff} \sqrt{2} \sin(\omega t)}{2\pi d}$$

4. $E_{eff} \underset{\substack{\text{grandeur} \\ \text{sinusoïdale}}}{=} \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{\omega NS\mu_0 I_{eff}}{2\pi d}$ avec E_m amplitude de $e(t)$

Exo EM46. Plaque à induction

1. Ajouter une source de tension et une résistance à gauche et une résistance à droite.

2. Lois des mailles

$$v_1 - R_1 i_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = 0 ; R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0$$

3. En complexes

$$\underline{v}_1 = (R_1 + jL_1\omega)\underline{i}_1 + jM\omega\underline{i}_2 ; (R_2 + jL_2\omega)\underline{i}_2 + jM\omega\underline{i}_1 = 0$$

$$\text{d'où } \underline{A} = \frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} = \frac{-jM\omega}{R_2 + jL_2\omega}$$

$$\text{et } \underline{v}_1 = (R_1 + jL_1\omega)\underline{i}_1 + jM\omega \frac{-jM\omega}{R_2 + jL_2\omega} \underline{i}_1 \text{ d'où } \underline{Z}_e = \frac{v_1}{i_1} = R_1 + jL_1\omega + \frac{M^2\omega^2}{R_2 + jL_2\omega}$$

4. $L_1\omega = 30 \times 10^{-6} \times 2\pi \times 25 \times 10^3 = 1,5 \times \pi \Omega \gg R_1 = 2 \cdot 10^{-2} \Omega$

$L_2\omega = 0,2 \times 10^{-6} \times 2\pi \times 25 \times 10^3 = 10^{-2} \times \pi \Omega \gg R_2 = 1 \cdot 10^{-2} \Omega$ (un peu limite, mais bon...)

$$\underline{A} = \frac{-jM\omega}{jL_2\omega} = -\frac{M}{L_2}$$

$$\underline{Z}_e = jL_1\omega + \frac{M^2\omega^2}{jL_2\omega} = jL_1\omega - j\frac{M^2}{L_2}\omega = j\omega \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) = \underline{Z}_e$$

Application numérique

$$|\underline{A}| = \frac{M}{L_2} = \frac{2 \times 10^{-6}}{0,2 \times 10^{-6}} = 10 ; |\underline{Z}_e| = 2\pi \times 25 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6} = 5\pi \times 10^{-1} \approx 1,6 \Omega$$

5. $p_1 = R_1 i_1^2 = R_1 \frac{v_1^2}{Z_e^2}$ donc $\langle p_1 \rangle = \frac{R_1}{Z_e^2} V_1^2$

$$p_2 = R_2 i_2^2 = R_2 i_1^2 A^2 = R_2 \frac{v_1^2}{Z_e^2} A^2 \text{ donc } \langle p_2 \rangle = A^2 \frac{R_2}{Z_e^2} V_1^2 = A^2 \frac{R_2}{R_1} \langle p_1 \rangle$$

Application numérique

$$\langle p_1 \rangle = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{(5\pi \times 10^{-1})^2} \times 130^2 = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{2,5} \times 169 \times 10^2 = \frac{2}{2,5} \times 169 \approx 1,4 \times 10^2 \text{ W}$$

$$\langle p_2 \rangle = 100 \times \frac{1 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2}} \times 1,4 \times 10^2 \approx 7 \times 10^3 \text{ W}$$

6. $p_{gén} = v_1 i_1 = \frac{v_1^2}{Z_e}$ donc $\langle p_{gén} \rangle = \frac{V_1^2}{Z_e}$

Application numérique

$$\langle p_{gén} \rangle = \frac{130^2}{5\pi \times 10^{-1}} = \frac{169 \times 10^2}{5\pi \times 10^{-1}} \approx 1 \times 10^4 \text{ W}$$

Remarque : Négliger R_2 est sans doute abusif... $\langle p_{géné} \rangle$ est sensiblement supérieur à $\langle p_1 \rangle + \langle p_2 \rangle$.

Exo EM47. Transformateur (2016)

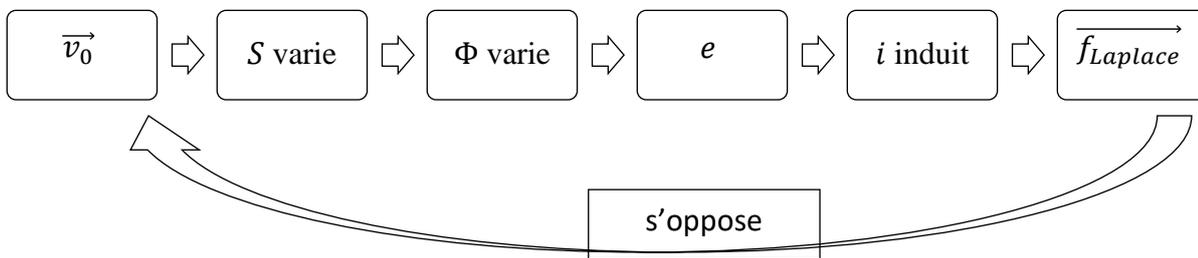
Tension divisée par 13 et intensité multipliée par 13. La puissance fournie au lecteur de DVD est égale à la puissance à l'entrée (en supposant le transformateur parfait).

$$U_2 = \frac{130}{13} = 10 \text{ V} ; I_2 = 20,0 \times 13 = 260 \text{ mA} ; P_{transmise} = U_2 I_2 = U_1 I_1 = 130 \times 0,02 = 2,6 \text{ W}.$$

INDUCTION DE LORENTZ

Exo EM48. Rail de Laplace générateur (7 fois, 2022)

Loi de Lenz :



Orienter i puis $d\vec{S}$, calculer le flux $\varphi(\vec{B})$

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = B \ell \frac{dx}{dt} = B \ell v \quad \text{d'où} \quad (EE) : R \cdot i = B \cdot \ell \cdot v$$

$$\text{Force de Laplace : } \vec{f} = -i\ell B \vec{e}_x = -\frac{B^2 \ell^2 v}{R} \vec{e}_x$$

$$\text{Equation mécanique : } \vec{f}_L + \vec{P} + \vec{R}_C + \vec{R}_D = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \quad (EM) : -i\ell B = m \frac{dv}{dt}$$

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m R}{(B \ell)^2}$$

$$P_L + P_{fém} = 0$$

$$(EM) \cdot v : m \frac{dv}{dt} v = -i B \ell v \quad \text{et} \quad (EE) \cdot i : R \cdot i^2 = B \ell v i \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = -R \cdot i^2$$

L'énergie cinétique a été dissipée sous forme de chaleur par effet Joule.

Exo EM49. Rail de Laplace moteur

1. Analyse qualitative générale :

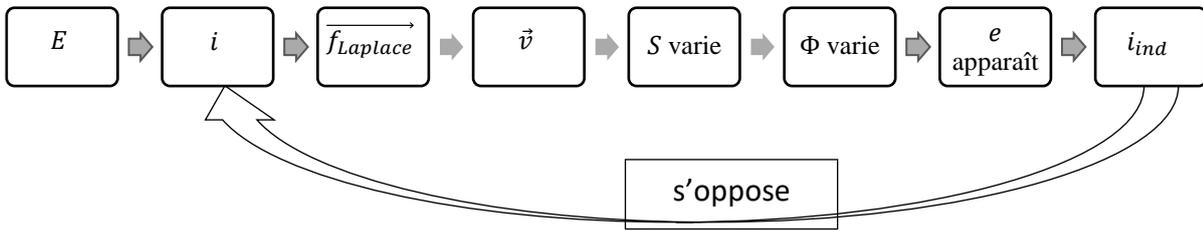
Un courant s'établit quand on ferme le circuit.

Le circuit, placé dans un champ magnétique, subit des forces de Laplace, mais seule la tige peut se déplacer : elle subit une force de Laplace dirigée vers la droite

Du fait de la force de Laplace, la tige se met en mouvement ; la surface du circuit traversé par le champ magnétique varie donc, ici, elle augmente

Le flux magnétique à travers le circuit varie : ici, il augmente

D'après la loi de Faraday, il apparaît une f.é.m. d'induction et un courant induit s'ajoutant au courant initial.
 D'après la loi de Lenz, ce courant induit va s'opposer à la cause qui lui a donné naissance, donc au courant imposé par la source de tension. Cela va donc venir diminuer la force de Laplace jusqu'à l'annuler ; la tige aura finalement un mouvement rectiligne uniforme.



1. Fém induite : fém apparaissant dans un système soumis à un phénomène d'induction selon la loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ où $\Phi = \iint_{\text{circuit}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$ avec e en convention générateur.

☒ Orientation (arbitraire) du circuit :

Cette orientation du circuit correspond à celle du courant, indiquée sur le schéma et s'imposant dans l'ensemble des calculs.

Ici, on oriente le circuit dans le sens trigonométrique (par rapport à Oz), de sorte que le vecteur $d\vec{S}$ est de même sens que \vec{B} :

$$d\vec{S} = dS \vec{e}_z$$

☒ Fém induite :

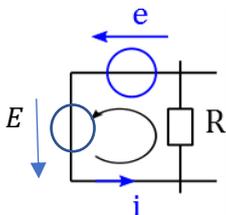
Le flux magnétique à travers le circuit est :

$$\Phi = \iint_{\text{circuit}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \stackrel{\substack{\text{orientation} \\ \text{circuit}}}{=} \iint_{\text{circuit}} +B dS \stackrel{\substack{\text{uniforme} \\ \vec{B}}}{=} B \iint_{\text{circuit}} dS = Bax$$

La f.é.m. induite est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bax\dot{x}$$

Le schéma électrique équivalent est le suivant, en plaçant la fém induite en convention générateur (e dans le même sens que i : L'orientation de la f.é.m. induite est imposée par celle du circuit.)



Loi des maille + caractéristique des dipôles : $-Ri + e + E = 0 = E - Ri - Bax\dot{x}$

Le courant induit est donc

$$i = \frac{E + e}{R} = \frac{E - Bax\dot{x}}{R} \quad (EE)$$

2. Force de Laplace : $\vec{F}_L = \int_{t\grave{e}ge} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$

L'orientation de $d\vec{\ell}$ est imposée par celle du circuit : attention !!! se déplacer dans le sens de i le long de la tige !!

$$\vec{F}_L = \int_{t\grave{e}ge} i d\ell B \vec{e}_x = Bia \vec{e}_x$$

Système : tige, étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des actions mécaniques extérieures :

La tige subit : poids \vec{P}

réactions des rails \vec{R} (normale car pas de frottements)

Force de Laplace

PFD appliqué à la tige puis projeté sur \overline{ux} :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_L$$

$$m \frac{dv}{dt} = 0 + 0 + iBa$$

L'équation mécanique est :

$$m\ddot{x} = Bia \quad (EM)$$

3. Découplage : en injectant (EE) dans (EM) :

$$m\ddot{x} = Bia = Ba \left(\frac{E - Ba\dot{x}}{R} \right) = \frac{EBa}{R} - \frac{(Ba)^2}{R} \dot{x}$$

En posant $\frac{1}{\tau} = \frac{(Ba)^2}{mR}$:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{EBa}{mR}$$

EDL1 à coefficients constants positifs et second membre constant

Solution générale à l'équation homogène : $v_H(t) = Ae^{-t/\tau}$

Solution particulière à l'équation constante : recherchée sous forme de constante, le second membre étant constant :

$$0 + \frac{v_p}{\tau} = \frac{EBa}{mR}$$

Soit $v_p = \tau \frac{EBa}{mR} = \frac{mR}{(Ba)^2} \frac{EBa}{mR} = \frac{E}{Ba} = v_{lim}$

Solution générale à l'équation complète : $v(t) = Ae^{-t/\tau} + v_{lim}$

Constante d'intégration à l'aide des conditions initiales :

$$v(t=0) \underset{\substack{\text{formule} \\ \text{à } t=0}}{=} A + v_{lim} \underset{\substack{\text{C.I.} \\ \text{énoncé}}}{=} 0$$

Soit $A = -v_{lim}$ et

$$v(t) = v_{lim} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) = \frac{E}{Ba} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$$

Remarques : Sens du mouvement cohérent

Lorsque la vitesse limite $V_{lim} = \frac{E}{Ba}$ est atteinte, l'équation électrique indique que le courant est nul. C'est une **manifestation extrême de la loi de modération de Lenz** : la fem induite est exactement opposée à la fem e qui a causé le démarrage du moteur.

Dans un moteur en fonctionnement normal, la force électromotrice induite tend toujours à s'opposer au générateur qui l'alimente. On parle de **force contre électromotrice (fcem)** du moteur.

4. La source de tension en présence du champ magnétique permet la mise en mouvement de la barre. Il y a conversion d'énergie électrique en énergie mécanique (cinétique ici).

On effectue un bilan de puissance en faisant apparaître des puissances à partir des équations électrique et mécanique.

Méthode :

Multiplier (EE) par i : puissances électriques

Multiplier (EM) par v : puissances mécaniques

Élimination du terme de couplage

$$(EE) \quad e + E = Ri \quad [EE] = [tension] = \frac{[puissance]}{[intensité]}$$

$$(EM) \quad m\ddot{x} = F_{Lx} \quad [EM] = [force] = \frac{[puissance]}{[vitesse]}$$

On multiplie (EE) par i :

$$\underbrace{ei}_{\mathcal{P}_{induction}} + \underbrace{Ei}_{\mathcal{P}_{générateur}} = \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_{Joule}}$$

On multiplie (EM) par \dot{x}

$$m\ddot{x}\dot{x} = F_{Laplace}\dot{x} = \mathcal{P}_{Laplace}$$

$$m\ddot{x}\dot{x} = \frac{d\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)}{dt} = \frac{dEc}{dt} = Ba\dot{x} = \mathcal{P}_{Laplace}$$

Or avec $e = -Ba\dot{x}$, $\mathcal{P}_{induction} = ei = -Ba\dot{x}i = -F_{Laplace}\dot{x} = -\mathcal{P}_{Laplace}$

On retrouve la propriété générale, toujours vraie : $\mathcal{P}_{induction} + \mathcal{P}_{Laplace} = 0$

En éliminant le terme de couplage $Ba\dot{x}i$, on obtient :

$$\mathcal{P}_{générateur} = \frac{dEc}{dt} + \mathcal{P}_{Joule}$$

$\mathcal{P}_{générateur} = Ei$ représente la puissance électrique apportée par le générateur

$\frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{dt} = \frac{dEc}{dt}$ représente la puissance cinétique reçue par la tige

$\mathcal{P}_{Joule} = Ri^2$ représente la puissance électrique reçue par la tige et dissipée sous forme d'effet Joule.

La puissance électrique fournie par le générateur est dissipée sous forme de puissance cinétique et d'effet Joule : **la puissance électrique se transforme en puissance mécanique**. Le système étudié forme un **moteur**.

Exo EM50. Rails de Laplace (Mines 2017)

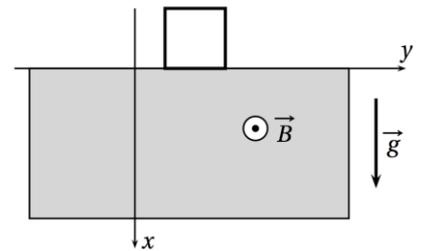
Exo EM51. Chute d'une spire (7 fois ; 2022)

Phase 1 : entrée de la spire dans la zone de champ.

Si \vec{B} est porté par \vec{u}_z , et si on oriente i donc la spire dans le sens trigonométrique :

$$\varphi = Bax$$

BAME : $\vec{P} = mg\vec{u}_x$ et $\vec{F}_L = iaB\vec{u}_x$ ($i\vec{dl}$ de la partie horizontale basse est porté par \vec{u}_y , les forces de Laplace sur les deux parties verticales sont opposées et se compensent, tandis que la partie horizontale haute est dans un premier temps plongée dans un champ nul)



MR vertical freiné d'après la loi de Lenz, on a donc $i < 0$ soit courant induit réel dans le sens horaire.

Loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = -Bav = -B_0a\dot{x}$$

En plaçant la fém induite en convention générateur, en écrivant la loi des mailles et les caractéristiques des dipôles :

$$(EE): Ri = e = -Bav$$

$$i = e/R = -B_0a\dot{x}/R$$

PFD projeté sur \vec{u}_x : $m\ddot{x} = B_0ia + mg = -\frac{B_0a^2}{R}\dot{x} + mg$

$$(EM): \frac{dv}{dt} + \frac{(Ba)^2}{mR}v = g \quad \tau = \frac{mR}{(Ba)^2}$$

tant que $x \leq a$: $v(t) = (v_0 - v_{lim})e^{-\frac{t}{\tau}} + v_{lim}$ avec $v_{lim} = g \frac{mR}{(Ba)^2}$ et $\tau = \frac{mR}{(Ba)^2}$

Phase 2 : la spire est totalement dans la zone de champ. BdF : $\vec{P} = mg\vec{u}_x$: MR vertical non freiné

6. Le travail du poids est converti en énergie cinétique et en énergie électrique (convertie en effet Joule)

$$mg\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) + ei = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) + Ri^2$$

Exo EM52. Rails de Laplace avec circuit capacitif (6 fois ; 2010)

Equation électrique

$$e = -Bl\dot{x}; e - R\frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0;$$

Equation mécanique

$$\vec{f}_L + \vec{P} + \vec{R}_C + \vec{R}_D = m \frac{d\vec{v}}{dt} : \text{en projetant, on obtient } Bi\ell = m \frac{dv}{dt}$$

$$Bi\ell = m \ddot{x}.$$

$$\frac{dq}{dt} + q \left(\frac{(B\ell)^2}{Rm} + \frac{1}{RC} \right) = -\frac{B\ell}{R} v_0$$

$$q(t) = -\frac{B\ell}{R} v_0 \tau + \left(Q + \frac{B\ell}{R} v_0 \tau \right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ avec } \frac{1}{\tau} = \frac{(B\ell)^2}{Rm} + \frac{1}{RC}$$

Analyse qualitative, courant, forces de Laplace, mouvement de la barre, variation de flux magnétique, f.é.m. induite générant un courant qui tend à s'opposer à la décharge du condensateur.

Orientation du courant : sens horaire

Ox vers la droite

$$\Phi = \iint_{\text{circuit}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B\ell x; e = -B\ell \dot{x}; -e + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0;$$

$$Bi\ell = m \ddot{x} \Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \dot{x} = \frac{B\ell}{m} q + cte = \frac{B\ell}{m} (q - Q) \Rightarrow e = -\frac{(B\ell)^2}{m} (q - Q)$$

$$\frac{(B\ell)^2}{m} (q - Q) + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{dq}{dt} + q \left(\frac{(B\ell)^2}{Rm} + \frac{1}{RC} \right) = \frac{(B\ell)^2}{Rm} Q$$

$$q(t) = \frac{(B\ell)^2}{Rm} Q \tau + Q \left(1 - \frac{(B\ell)^2}{Rm} \tau \right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ avec } \frac{1}{\tau} = \frac{(B\ell)^2}{Rm} + \frac{1}{RC}$$

Le condensateur ne n'est pas complètement déchargé.

Bilan énergétique

...

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u^2 \right) = R i^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

Exo EM53. Rails de Laplace avec ressort(2 fois, 2015)

Expliquer le phénomène

$$m\ddot{x} + k(x - \ell_0) + iBh = 0 \text{ (orientation sens trigo)}$$

ATTENTION : la surface du circuit n'est pas hx mais $h(L - x)$ si L est la longueur des rails

$$\Phi = -B \times \text{surface} = -Bh(L - x)$$

$$e = +Bh\dot{x}$$

$$i = \frac{Bh\dot{x}}{R}$$

$$m\ddot{x} + \frac{(Bh)^2}{R} \dot{x} + kx = k\ell_0$$

Exo EM54. Doubles rails de Laplace (2 fois, 2022)

1. Initialement la tige 1 se déplace et la tige 2 est immobile. Le circuit formé des rails et des deux tiges a donc une surface variable, et le flux du champ magnétique à travers sa surface varie donc aussi. D'après la loi de Faraday, cela va impliquer l'apparition d'une fém induite, soit d'un courant induit, le circuit étant fermé et conducteur, donc impliquer des forces de Laplace.

D'après la loi de modération de Lenz, la force de Laplace (résultant du phénomène d'induction) sur la tige 1 va s'opposer à son mouvement, donc cette tige 1 va être ralentie. La force de Laplace sur la tige 2 va la mettre en mouvement alors qu'elle est initialement immobile, de sorte à minimiser la variation de surface du circuit.

2. EE : $e = -B\ell(v_{1x} - v_{2x}) = 2Ri$

3. EM1 : $m\dot{v}_{1x} = Bil$; EM2 : $m\dot{v}_{2x} = -Bil$

4. résolution :

astuce : EM1 + EM2 : $\dot{v}_{1x} + \dot{v}_{2x} = 0$ donc $v_{1x} + v_{2x} = cte = v_{10}$

d'où

$$-B\ell(v_{1x} - (v_{10} - v_{1x})) = 2Ri$$

$$-B\ell(2v_{1x} - v_{10}) = 2R \frac{m\dot{v}_{1x}}{B\ell}$$

$$\dot{v}_{1x} + \frac{(B\ell)^2}{mR} v_{1x} = \frac{(B\ell)^2}{2mR} v_{10}$$

$$v_{1x} = \frac{1}{2} v_{10} \left(1 + \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \text{ et } v_{2x} = \frac{1}{2} v_{10} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \text{ avec } \tau = \frac{mR}{(B\ell)^2}$$

2)

① on oriente \vec{S} selon i :
de même sens que \vec{B} .

② Flux : $\phi_3(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S} = B(x_2 - x_1)a$

③ Loi de Faraday $e = -\frac{d\phi}{dt} = -Ba(v_2 - v_1)$

x_i : abscisses caractéristiques des positions des tiges.

④ Circuit électrique équivalent :
Loi des mailles

(EE) : $e = Ri = -Ba(v_2 - v_1) = Ri$ (1)

(ou plus précisément : \mathcal{E}_1 , $R/2$, \mathcal{E}_2 , $R/2$)

1) Equation mécanique : système tige 1

Bilan des forces sur \mathcal{E}_1 : Poids \vec{P} , réaction \vec{R}_1 des rails, normale en l'absence de frottements, $\vec{F}_{Lap,1} = \int_{\mathcal{E}_1} i d\vec{l} \wedge \vec{B}$
soit $\vec{F}_{Lap,1} = -iaB \vec{u}_x$

Bilan à \mathcal{E}_1 ds $R_T = R_g$: $m \vec{a}_1 = m \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{F}_{Lap,1}$

Projection sur \vec{u}_x : $m \frac{dv_1}{dt} = -iaB$ (2)
EM1

Bilan des forces sur \mathcal{E}_2 : idem, $\vec{P}_2 + \vec{R}_2 = \vec{0}$ (absence de frottements)

$$\vec{F}_{Lap,2} = \int_{\mathcal{E}_2} i d\vec{l} \wedge \vec{B} = +iaB \vec{u}_x$$

FFD à $\sum_2 ds R_T = R_g : m \vec{a}_2 = m \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{P}_2 + \vec{R}_2 + \vec{F}_{\text{Lap}_2}$

Projection sur \vec{u}_n : $\boxed{m \frac{d\vec{v}_2}{dt} = +iaB} \quad (3)$
 $E \parallel \vec{u}_2$

4) D'après (1) EE : $i = -\frac{Ba}{R} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$

Soit dans (2) et (3) :

$$\begin{cases} m \frac{d\vec{v}_1}{dt} = -\frac{a^2 B^2}{R} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) & (4) \\ m \frac{d\vec{v}_2}{dt} = +\frac{a^2 B^2}{R} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) & (5) \end{cases}$$

5) En sommant (4)+(5) : $m \frac{d(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)}{dt} = \boxed{0 = \frac{d\sigma}{dt}}$

Soit $\sigma(t) = cte = \sigma(t=0) = \vec{v}_1(t=0) + \vec{v}_2(t=0)$ (cf C.S.)
 $\boxed{\sigma(t) = \vec{v}_0 = \vec{v}_1(t) + \vec{v}_2(t)}$

En faisant la différence (4)-(5) :

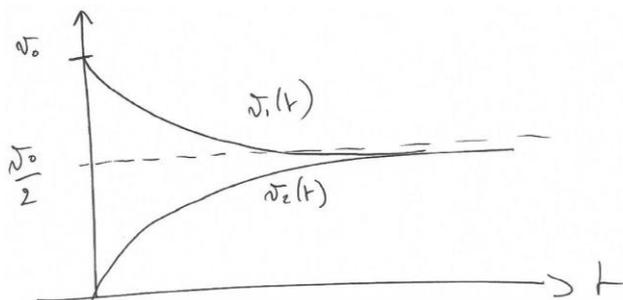
$$m \frac{d}{dt} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = m \frac{d\delta}{dt} = +\frac{2(aB)^2}{R} \delta \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{2(aB)^2}{mR} \delta = 0 \quad \text{En posant } \boxed{\tau = \frac{mR}{2(aB)^2}} :$$

$$\delta(t) = A e^{-t/\tau} \quad \text{avec C.S. : } \delta(t=0) = \vec{v}_1(t=0) - \vec{v}_2(t=0) = \vec{v}_0 = A$$

Soit $\boxed{\delta(t) = \vec{v}_0 \exp(-t/\tau) = \vec{v}_2(t) - \vec{v}_1(t)}$

Enfinement : $\boxed{\begin{aligned} \vec{v}_1(t) &= \frac{\sigma(t) - \delta(t)}{2} = \frac{\vec{v}_0}{2} (1 + e^{-t/\tau}) \\ \vec{v}_2(t) &= \frac{\sigma(t) + \delta(t)}{2} = \frac{\vec{v}_0}{2} (1 - e^{-t/\tau}) \end{aligned}}$



$$f) q(1) : i(t) = \frac{B_0 a}{R} (\dot{v}_1 - \dot{v}_2)$$

$$i(t) = \frac{B_0 a \dot{v}_0}{R} e^{-t/\tau}$$

$$7) i = \frac{dq}{dt} \Leftrightarrow Q(t_{tot}) = \int_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} i dt = \int_0^{+\infty} \frac{B_0 a \dot{v}_0}{R} e^{-t/\tau} dt$$

$$Q(t_{tot}) = \frac{B_0 a \dot{v}_0}{R} \times (-\tau) \left[e^{-t/\tau} \right]_0^{+\infty} = \frac{m \dot{v}_0}{2 a B} = Q$$

$$8) \mathcal{E}_{Joule} = \int_0^{+\infty} R i^2 dt = \int_0^{+\infty} \frac{(B_0 a \dot{v}_0)^2}{R} e^{-2t/\tau} dt = \frac{(B_0 a \dot{v}_0)^2}{R} \times \left(\frac{-\tau}{2} \right) \left[e^{-2t/\tau} \right]_0^{+\infty}$$

$$\mathcal{E}_{Joule} = \frac{1}{4} m \dot{v}_0^2$$

$$9) \Delta \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,+\infty} - \mathcal{E}_{m,0} = \mathcal{E}_{c,+\infty} - \mathcal{E}_{c,0} + \mathcal{E}_{p,+\infty} - \mathcal{E}_{p,0}$$

avec $\Delta \mathcal{E}_p = 0$: pas de variation de altitude, $\mathcal{E}_p = \text{cte.}$

$$\text{et } \mathcal{E}_{c,+\infty} = \mathcal{E}_{1,+\infty} + \mathcal{E}_{2,+\infty} = \frac{1}{2} m (\dot{v}_{1,+\infty}^2 + \dot{v}_{2,+\infty}^2) = \frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{v}_0^2}{4} \times 2 \right)$$

$$\mathcal{E}_{c,0} = \mathcal{E}_{1,0} + \mathcal{E}_{2,0} = \frac{1}{2} m (\dot{v}_0^2 + 0) = \frac{1}{2} m \dot{v}_0^2$$

$$\text{d'où } \Delta \mathcal{E}_m = -\frac{m \dot{v}_0^2}{4}$$

Toute l'énergie mécanique perdue a été dissipée sous forme d'effet Joule

Exo EM55. Dynamo de vélo (4 fois, 2022)

1. Par définition du flux : le flux à travers une spire de surface S est :

$$\Phi_1 = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint B dS = B_0 \cos(\omega t) \iint dS = B_0 \cos(\omega t) \pi R_s^2$$

Le flux total Φ_{tot} correspond au flux à travers N spires, on a alors $\Phi_{tot} = N \Phi_1 = N B_0 \cos(\omega t) \pi R_s^2$

2. Variations du flux du champ magnétique : phénomène d'induction (loi de Faraday) :

$$\text{Loi de Faraday} \quad \underline{e} = - \frac{d\Phi_{tot}}{dt} = N B_0 \omega \sin(\omega t) \pi R_s^2$$

3. Valeur efficace en régime sinusoïdal : $U_{eff} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$ avec E_m de la fém, soit $E_m = N B_0 \omega \pi R_s^2$

$$U_{eff} = \frac{E}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} N B_0 \omega \pi R_s^2 \geq U_{min} \Leftrightarrow \omega \geq \frac{\sqrt{2} U_{min}}{N B_0 \pi R_s^2}$$

$$\omega \geq \frac{\sqrt{2} \times 1,5}{10^3 \times 50 \times 10^{-3} \times \pi \times (1,2 \times 10^{-2})^2} \approx \frac{\sqrt{2} \times 1,5}{5 \times \pi \times (1,2)^2 \times 10^{-3}} \approx \frac{\sqrt{2} \times 1,5 \times 2}{\pi \times (1,2)^2} \times 10^2 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\omega \geq \frac{\sqrt{2} \times 3}{\pi \times (1,2)^2} \times 10^2 \approx 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \approx 10^2 \cdot \frac{60}{2\pi} \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1} \approx 10^3 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$$

4. ω est la vitesse angulaire du galet de la dynamo, or ce galet étant en contact sans glissement avec la roue, la distance parcourue par le galet est la même que celle parcourue par la roue : leurs vitesses linéiques sont identiques. On a donc :

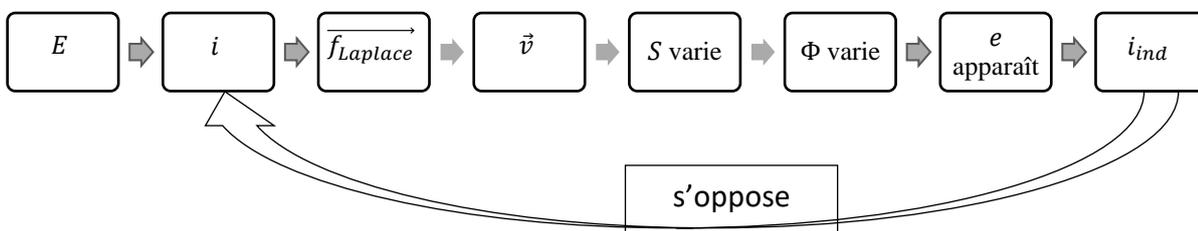
$$V_{cycl} = R_g \cdot \omega \approx 1,2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 \text{ m/s} = 1,2 \text{ m/s} \approx 4 \text{ km/h}$$

Ordre de grandeur raisonnable

Exo EM56. Haut-parleur (4 fois ; 2022)

La barre est parcourue par i en présence d'un champ \vec{B} : apparition d'une force de Laplace qui met la barre en mouvement. Induction de Lorentz. D'après la loi de Lenz, apparition d'une fém qui va s'opposer à celle du générateur.

1. Loi de Lenz :



Le mouvement de la barre doit créer un courant induit s'opposant au courant créé par la source de tension et la force de rappel du ressort ramène la barre vers sa position d'équilibre,

2. Soit avec le flux, soit avec $\mathcal{P}_L = -\mathcal{P}_{elec}$, on obtient $e = -B\ell v$
3. Loi des mailles : $E + e - Ri - L \frac{di}{dt} = E - B\ell v - Ri - L \frac{di}{dt} = 0$

4. • Système : {barre}

• Référentiel terrestre supposé galiléen

• Bilan des actions mécaniques extérieures :

– Poids perpendiculaire au mouvement et compensé par une action de liaison : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$

– Force de rappel : $\vec{F}_r = -kx \vec{u}_x$ si origine du repère correspond à la longueur à vide du ressort

– Force de Laplace : $d\vec{f}_L = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i d\ell B \vec{u}_x \Rightarrow \vec{f}_L = i\ell B \vec{u}_x$

– Force de frottement visqueux de l'air : $\vec{F}_f = -h \vec{v} = -h\dot{x} \vec{u}_x$

• Principe Fondamental de la Dynamique : $\vec{f}_L + \vec{F}_r + \vec{F}_f = m \frac{d\vec{v}}{dt}$

• Projection : $i\ell B - kx - h\dot{x} = m\ddot{x}$

$$m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = i\ell B$$

5. Bilan de puissance :

$$\begin{cases} (E) \times i = Ei - \ell Bvi - Ri^2 - iL \frac{di}{dt} = 0 \Leftrightarrow \ell Bvi = Ei - Ri^2 - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) \\ (M) \times v = mv \frac{dv}{dt} + hv^2 + kz \frac{dz}{dt} = i\ell vB = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) + hv^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} kz^2 \right) \end{cases}$$

Le terme de couplage électromagnétique est $P_{elec} = ei = -P_L = \ell Bvi$, il permet d'obtenir une seule équation :

$$Ei = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) + hv^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} kz^2 \right)$$

On en déduit le bilan énergétique suivant :

$$\underbrace{Ei}_{\substack{\text{puissance fournie} \\ \text{par le générateur}}} = \underbrace{Ri^2 + hv^2}_{\substack{\text{puissance perdue} \\ \text{par frottement}}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} kz^2 \right)}_{\text{variation d'énergie du système}}$$

Le micro transforme une puissance acoustique $\alpha \dot{x}^2$ en puissance électrique Ei .

■ ONDES ELECTROMAGNETIQUES

Exo EM57. Champ variable pour un cylindre infini (2 fois, 2017)

RS : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \Rightarrow B = \frac{4\pi 10^{-7} \times 1}{2\pi \times 1} = 2 \cdot 10^{-7} T$ et $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{u}_r = \vec{0}$ avec $\lambda = 0$ (cas usuel d'un conducteur électriquement neutre)

RV : $\vec{B}(t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ et $\overrightarrow{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{E} \neq \vec{0}$

Or $\overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow B(t)$. On a donc création d'un champ électromagnétique

Exo EM58. Onde électromagnétique

1) onde électromagnétique plane progressive (OemPP), de direction de polarisation la direction du champ \vec{E} , soit ici direction de polarisation : \vec{u}_x . Sens de propagation : d'après la variable couplée espace – temps $ct - z$, propagation dans la direction de \vec{u}_z , dans le sens direct, soit selon $+\vec{u}_z$.

2) Equations de Maxwell : cas général

| | Equations de Maxwell sous forme locale |
|--|--|
| Equation de Maxwell – flux (1) Maxwell - Thomson | $\text{div } \vec{B} = 0$ <p>L'équation de Maxwell-flux indique le caractère conservatif du flux du champ magnétique à travers n'importe quelle surface fermée.</p> |
| Equation de Maxwell - Gauss (2) | $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ <p>L'équation de Maxwell-Gauss indique le caractère non conservatif du flux du champ électrique \vec{E} à travers une surface fermée contenant des charges : une densité volumique de charges ρ jouent le rôle de source de champ électrique.</p> |
| Equation de Maxwell – Faraday (3) | $\overrightarrow{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ <p>L'équation de Maxwell-Faraday indique qu'un champ magnétique $\vec{B}(t)$ variable dans le temps engendre un champ électrique \vec{E} à circulation non conservative (\Rightarrow phénomène d'induction).</p> |

| | |
|---|---|
| Equation de Maxwell – Ampère (4) | $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \vec{j}_D = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ |
| | L'équation de Maxwell-Ampère indique que les sources de champ magnétique \vec{B} sont les courants électriques \vec{j} mais aussi les champs électriques variables dans le temps. |

Dans le vide : $\vec{j} = \vec{0}$ et $\rho = 0$

| Equations de Maxwell sous forme locale | |
|---|---|
| Maxwell – flux (1) Maxwell - Thomson | $\text{div} \vec{B} = 0$ \vec{B} à flux conservatif à travers n'importe quelle surface fermée. |
| Maxwell - Gauss (MG) | $\text{div} \vec{E} = 0$ Dans le vide, \vec{E} à flux conservatif à travers n'importe quelle surface fermée. |
| Maxwell – Faraday (M.F.) | $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ un champ magnétique $\vec{B}(t)$ variable dans le temps engendre un champ électrique \vec{E} à circulation non conservative (\Rightarrow phénomène d'induction). Les lignes de \vec{E} enlacent les sources de E , soit ici $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ |
| Maxwell – Ampère (M.A.) | $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_D = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ les sources de champ magnétique \vec{B} dans le vide sont les champs électriques variables dans le temps. En régime variable, il y a couplage entre \vec{E} et \vec{B} : onde électromagnétique. Les lignes de \vec{B} enlacent les sources de \vec{B} , soit ici $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ |

3) Equation de propagation : en exploitant la relation d'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} (\vec{E})) = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} (\vec{E})) - \Delta \vec{E}$$

Avec (MG) dans le vide : $\text{div} (\vec{E}) = 0$ soit $\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} (\vec{E})) = -\Delta \vec{E}$

Avec (MF) : $\overrightarrow{\text{rot}} (\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ soit $\overrightarrow{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\Delta \vec{E}$ ou

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \Delta \vec{E} = \frac{\partial (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t}$$

Or selon (MA) dans le vide : $\overrightarrow{\text{rot}} (\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ d'où $\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Finalement $\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

4) Dimension de $\epsilon_0 \mu_0$: $[\Delta \vec{E}] = [\vec{E}] \times \frac{1}{L^2}$ $\left[\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right] = [\vec{E}] \times \frac{1}{t^2}$ Donc $[\epsilon_0 \mu_0] = \frac{1}{c^2} = \frac{T^2}{L^2}$

Célérité de l'onde électromagnétique dans le vide : $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ ou encore $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

Aussi : On a $\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right) \vec{e}_x$ et $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right) \vec{e}_x$

d'où en reportant dans $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$: $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$

5) $c \approx 3,00.10^8 \text{ m.s}^{-1}$

6) **Relation de structure** (validité : OemPP) :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E}{c} \vec{u}_y = \frac{E_0}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c}(ct - z + \phi_0)\right) \vec{u}_y$$

Méthode N°2 : Exploitation de l'équation de Maxwell Faraday (toujours valable, méthode parfois imposée) :

avec $E_y = E_z = 0$ et $E = f(z, t)$ soit $B = g(z, t)$:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \Leftrightarrow 0 = 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Leftrightarrow 0 = 0 \end{cases} \quad \text{d'où } \vec{B} = B_y \vec{u}_y \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t} = E_0 \frac{\omega}{c} \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} z + \phi_0\right)$$

En intégrant par rapport au temps, avec une constante d'intégration nulle (pas de composante continue pour une onde) :

$$B_y = \frac{E_0}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c}(ct - z + \phi_0)\right) \quad \text{et} \quad B_{0y} = \frac{kE_0}{\omega} = \frac{E_0}{c}$$

Méthode N°3 : OPPM : équation de Maxwell Faraday à l'aide de la **notation complexe**

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow -i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B} \Leftrightarrow \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$$

$$7) \quad \|\vec{\Pi}\| = \frac{\|\vec{E} \wedge \vec{B}\|}{\mu_0} = \varepsilon_0 c E^2 = \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \quad \text{et} \quad \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \|\vec{\Pi}\| \vec{u}_z$$

$$\xi = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \varepsilon_0 c \langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2$$

$$8) \quad c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$$

9) Le soleil nous chauffe ! opérations / découpes au laser ; four microonde, etc.

Exo EM59. Laser

1) **Propagation** : expression $\cos(\omega t - kx)$: propagation selon $+\vec{u}_x$

2) **Polarisation** : par définition direction du vecteur \vec{E} , soit ici (Oz)

$$3) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$$

4) **Méthode N°1** : **Relation de structure** car OPP (non valable pour une onde stationnaire par exemple !!!)

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c} = -\frac{E}{c} \vec{u}_y$$

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

Méthode N°2 : **Maxwell-Faraday** avec $E_x = 0 = E_y$ et $E = f(x, t)$ soit $B = g(x, t)$:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \vec{u}_y = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Remarque : on peut également écrire la relation générale :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \Leftrightarrow 0 = \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Leftrightarrow 0 = \frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}$$

on a donc $\vec{B} = B_y(x, t)\vec{u}_y$, avec

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = kE_0 \cos(\omega t - kx) \Leftrightarrow B_{0y} = -\frac{kE_0}{\omega} = -\frac{E_0}{c}$$

(Les composantes continues sont nécessairement nulles).

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

Méthode N°3 : OPPM : équation de Maxwell Faraday à l'aide de la **notation complexe**

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow -i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B} \Leftrightarrow \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$$

On retrouve alors la relation de structure de la méthode N°1 en repassant aux réels.

5) Expression du vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x$$

Remarque : il est cohérent de trouver un vecteur de Poynting dirigé dans le sens de propagation de l'OPPM !

6) Par définition du vecteur de Poynting qui correspond au vecteur densité de flux électromagnétique rayonnée, on a :

$$P = \iint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

Soit en considérant un vecteur de Poynting moyen uniforme sur une section droite :

$$P = \iint \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle \cdot dS = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle S$$

$$\frac{P}{S} = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \left\langle \left\| \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\| \right\rangle = \left\langle \frac{E^2}{\mu_0 c} \right\rangle = \left\langle \frac{E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)}{\mu_0 c} \right\rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle$$

Soit avec $\langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2}$

$$\frac{P}{S} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2$$

$$\Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{2P}{S} \mu_0 c} = 8,7 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \text{ et } B_0 = \frac{E_0}{c} = 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

Attention ! unités à connaître !

Version 2 : bain de soleil

Maxwell-Faraday avec $E_x = 0; B_x = 0$ et $E = f(x, t); B = f(x, t)$:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \Leftrightarrow 0 = 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Leftrightarrow 0 = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t} = k E_0 \cos(\omega t - k x) \Leftrightarrow B_{0y} = -\frac{k E_0}{\omega} = -\frac{E_0}{c} \\ 0 = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Leftrightarrow B_{0z} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k x) \vec{e}_y \quad \text{et} \quad B = \frac{E}{c}$$

$$\frac{P}{S} = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \left\langle \left\| \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\| \right\rangle = \left\langle \frac{E^2}{\mu_0 c} \right\rangle = \left\langle \frac{E_0^2 \cos^2(\omega t - k x)}{\mu_0 c} \right\rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \langle \cos^2(\omega t - k x) \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2$$

$$\Rightarrow$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{2 \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle}{c \varepsilon_0}} = \sqrt{2\mu_0 c \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{c \varepsilon_0} = \mu_0 c$$

$$\text{A.N. : } E_0 = \sqrt{2 \times 4 \times 3,14 \times 10^{-7} \times 3.10^8 \cdot 10^3} \approx 6\sqrt{2} \cdot 10^4 \approx 850 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

Aucun danger !

La majorité des personnes ne ressentent les premiers effets des champs électriques qu'à des niveaux rarement atteints dans la vie quotidienne. Dans le cas d'un courant alternatif à 60 Hz, le champ n'est perçu qu'à partir de 3 000 V/m, sous forme de chatouillements ou de microdécharges désagréables. À partir de 10 000 V/m, on perçoit presque toujours un chatouillement. Les microdécharges peuvent être douloureuses, mais elles ne sont pas dangereuses. C'est à partir de ce niveau qu'on ressent le passage d'un courant électrique dans le corps si on touche un gros objet métallique, par exemple une automobile. À partir de 20 000 V/m, les microdécharges sont suffisamment gênantes et désagréables pour nécessiter le port d'un habit protecteur, comme le font les travailleurs qui interviennent sur les lignes électriques à haute tension (source : Le réseau électrique et la santé ; Les champs électriques et magnétiques, Dr Michel Plante, Direction – Santé et sécurité, Hydro-Québec ; http://www.hydroquebec.com/champs/pdf/pop_23_01.pdf)

En complément (D'après M. Auvray) :

Champ trop faible pour créer une ddp significative : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dx} \vec{e}_x$

$$\Rightarrow U \approx E_0 \cdot l \quad \text{avec} \quad l \approx 1 \text{ m longueur d'un humain, soit } U \approx 870 \text{ V}$$

$$\Rightarrow I = \frac{U}{R} \quad \text{avec} \quad R \approx 5000 \Omega \quad \text{d'où} \quad I = \frac{870}{5.10^3} \approx 0,17 \text{ A} = 170 \text{ mA}$$

Remarque : INRS ND 2143 <https://www.inrs.fr/media.html?refINRS=ED%204350>

L'exposition à des champs électromagnétiques de fréquence variable dans le temps génère des courants à l'intérieur du corps ($\vec{j} = \sigma \vec{E}$), ainsi qu'une absorption d'énergie dans les tissus.

Ce guide n'est fondé que sur des effets immédiats sur la santé, tels que la stimulation des muscles ou des nerfs périphériques, les chocs et brûlures provoqués par le contact avec des objets conducteurs, ou encore l'élévation de température des tissus sous l'effet de l'absorption d'énergie liée à l'exposition aux champs électromagnétiques.

Il existe trois mécanismes fondamentaux de couplage, par lesquels les champs électriques ou magnétiques de fréquence variable dans le temps interagissent avec la matière vivante

1. L'interaction **champs électriques de fréquence variable - corps humain** provoque :

- un écoulement de charges électriques (courant électrique – dépend de σ),
- la polarisation des charges liées (formation de dipôles électriques – dépend de ϵ),
- et la réorientation des dipôles électriques déjà présents dans les tissus.

Les champs électriques externes induisent, à la surface du corps exposé, une charge superficielle qui provoque, à l'intérieur du corps, l'apparition de courants dont la distribution dépend des conditions d'exposition, de la taille et de la forme du corps, ainsi que de la position du corps dans le champ.

2. L'interaction physique **champs magnétiques** de fréquence variable - **corps humain** crée des champs électriques induits et provoque la circulation de courants électriques.

3. Les champs électriques et magnétiques entraînent une **absorption d'énergie** pour des fréquences supérieures à 100 kHz et une élévation de température significatives. Dans les tissus biologiques, le débit d'absorption spécifique (DAS) est proportionnel au carré de l'intensité du champ électrique interne.

Différentes données scientifiques ont été utilisées pour l'élaboration des restrictions de base à l'exposition pour différents domaines de fréquences :

entre 1 Hz et 10 MHz, les restrictions de base s'appliquent à la densité de courant,

de façon à prévenir les effets sur les fonctions du système nerveux ;

entre 100 kHz et 10 GHz, les restrictions de base s'appliquent au DAS, de façon à prévenir l'astreinte thermique au niveau du corps entier et un échauffement local excessif des tissus ; dans le domaine compris entre 100 kHz et 10 MHz, ces restrictions s'appliquent à la fois à la densité de courant et au DAS ;

entre 10 et 300 GHz, les restrictions de base s'appliquent à la densité de puissance, de façon à prévenir un échauffement excessif des tissus à la surface du corps ou à proximité de cette surface.

Résistance du corps humain : INRS ED 6345 p41 (novembre 2019)

<https://www.inrs.fr/media.html?refINRS=ED%206345>

VALEUR DE L'IMPÉDANCE DU CORPS HUMAIN (Ω)

| Tension de contact en V | Surfaces de contact importantes | | Surfaces de contact moyennes | | Surfaces de contact faibles | |
|-------------------------|---------------------------------|--------------------|------------------------------|--------------------|-----------------------------|--------------------|
| | Conditions sèches | Conditions humides | Conditions sèches | Conditions humides | Conditions sèches | Conditions humides |
| 50 | 4 600 | 3 675 | 23 925 | 13 700 | 250 250 | 99 725 |
| 100 | 3 125 | 2 950 | 9 150 | 8 525 | 70 400 | 52 800 |
| 200 | 2 050 | 2 050 | 3 525 | 3 525 | 8 650 | 8 650 |

Les valeurs contenues dans le présent tableau sont extraites d'une spécification technique du comité électrotechnique international (CEI) intitulée « Effets du courant sur l'homme et les animaux domestiques. Partie 1: Aspects généraux ». Référence : CEI – TS 60479.

TABLEAU VII

**NIVEAUX DE RÉFÉRENCE POUR L'EXPOSITION DE LA POPULATION GÉNÉRALE À
DES CHAMPS ÉLECTRIQUES ET MAGNÉTIQUES ALTERNATIFS
(VALEURS RMS EN CONDITIONS NON PERTURBÉES) (*)**

- REFERENCE LEVELS FOR GENERAL PUBLIC EXPOSURE TO TIME-VARYING ELECTRIC AND
MAGNETIC FIELDS (UNPERTURBED RMS VALUES)

| DOMAINE DE FRÉQUENCES | INTENSITÉ DE CHAMP E (V.m ⁻¹) | INTENSITÉ DE CHAMP H (A.m ⁻¹) | CHAMP B (μT) | DENSITÉ DE PUISSANCE DE L'ONDE PLANE ÉQUIVALENTE Seq (W.m ⁻²) |
|-----------------------|---|---|--------------------------------------|---|
| jusqu'à 1 Hz | - | 3,2 x 10 ⁴ | 4 x 10 ⁴ | - |
| 1 - 8 Hz | 10 000 | 3,2 x 10 ⁴ / f ² | 4 x 10 ⁴ / f ² | - |
| 8 - 25 Hz | 10 000 | 4 000 / f | 5 000 / f | - |
| 0,025 - 0,8 kHz | 250 / f | 4 / f | 5 / f | - |
| 0,8 - 3 kHz | 250 / f | 5 | 6,25 | - |
| 3 - 150 kHz | 87 | 5 | 6,25 | - |
| 0,15 - 1 MHz | 87 | 0,73 / f | 0,92 / f | - |
| 1 - 10 MHz | 87 / f ^{1/2} | 0,73 / f | 0,92 / f | - |
| 10 - 400 MHz | 28 | 0,073 | 0,092 | 2 |
| 400 - 2 000 MHz | 1,375 f ^{1/2} | 0,0037 f ^{1/2} | 0,0046 f ^{1/2} | f / 200 |
| 2 - 300 GHz | 61 | 0,16 | 0,20 | 10 |

- (*) ● 1° f comme dans la colonne « Domaine de fréquences ».
 ● 2° A condition que les restrictions de base soient respectées et que l'on puisse exclure les effets nocifs indirects, les valeurs d'intensité de champ peuvent être dépassées.
 ● 3° Aux fréquences comprises entre 100 kHz et 10 GHz, Seq, E², H² et B² doivent être moyennés sur une période quelconque de 6 minutes.
 ● 4° Pour les valeurs de crête aux fréquences allant jusqu'à 100 kHz, voir tableau IV, note 3°.
 ● 5° Pour les valeurs de crête aux fréquences supérieures à 100 kHz, voir figures 1 et 2. Entre 100 kHz et 10 MHz, les valeurs de crête des intensités de champ sont obtenues par interpolation de 1,5 fois la valeur de crête à 100 kHz à 32 fois la valeur de crête à 10 MHz. Pour les fréquences supérieures à 10 MHz, il est suggéré que la densité de puissance de crête de l'onde plane équivalente, moyennée sur la largeur d'impulsion, ne dépasse pas 1 000 fois les restrictions Seq ou que l'intensité de champ ne dépasse pas 32 fois les niveaux d'intensité de champ donnés dans le présent tableau.
 ● 6° Aux fréquences supérieures à 10 GHz, il faut moyenner Seq, E₂, H₂ et B₂ sur une période quelconque de 68|f^{1,05} min (f étant exprimée en GHz).
 ● 7° Aucune valeur de champ E n'est donnée pour les fréquences inférieures à 1 Hz, qui correspondent en fait à des champs électriques statiques. Les charges électriques de surface ne sont pas perçues à des intensités de champ inférieures à 25 kV.m⁻¹. Il convient d'éviter les décharges d'étincelles, source de stress ou de gêne.

Electricité, les effets sur l'organisme, valeur des seuils INRS ED 6345 p13 à 16 (novembre 2019)

Concernant la sécurité des personnes, il existe principalement trois seuils : perception, tétanisation, fibrillation ventriculaire. La valeur de ces seuils dépend de la nature du courant (alternatif ou continu) et de la durée de passage du courant dans le corps humain.

EFFETS DU COURANT ÉLECTRIQUE SUR L'HOMME

| Effets | Intensités en courant alternatif en mA | Intensités en courant continu en mA |
|---|--|-------------------------------------|
| Perception cutanée | 0,5 | 2 |
| Contracture entraînant une incapacité de lâcher-prise | 5 à 10 | 25 |
| Fibrillation ventriculaire | 40 (6,8 s) | 140 (6,8 s) |
| Fibrillation ventriculaire | 260 (0,2 s) | 260 (0,2 s) |
| Fibrillation ventriculaire | 500 (0,01 s) | 500 (0,01 s) |

Source : IEC TR 60479-5:2007

Exo EM60. OPPM (3 fois, 2021)

- $\omega = 2\pi f$; $\lambda = c/f$; $\sigma = 1/\lambda$; $k = 2\pi/\lambda$.
- $\vec{E} = E_0 \cos\left(2\pi f\left(t - \frac{y}{c}\right) + \varphi\right) \vec{e}_x$; $\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos\left(2\pi f\left(t - \frac{y}{c}\right) + \varphi\right) \vec{e}_z$
- $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2\left(2\pi f\left(t - \frac{y}{c}\right) + \varphi\right) \vec{e}_y$
- Rayonnement solaire ; laser de découpe ; etc.
- $I = \langle \Pi \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2$ puisque $P_{moy} = \iint_{surf\ unité} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S}$

Exo EM61. Propagation d'une OPPM (2 fois ; 2018)

Onde électromagnétique plane progressive

Direction et le sens de propagation de l'onde : $\vec{k} = +k\vec{e}_x$.

Direction de polarisation : $\vec{E} = E \vec{e}_y$

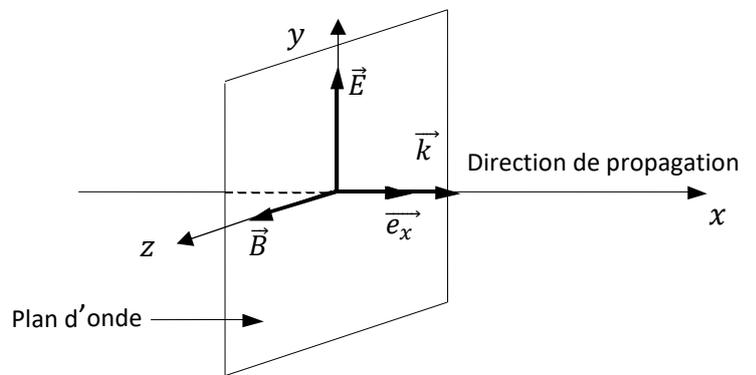
$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$$

$$T = 2 \cdot 10^{-15} \text{ s} ; f = \frac{1}{T} = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz} ;$$

$\lambda = cT = 6 \cdot 10^7 \text{ m} = 600 \text{ nm}$: visible (rouge) ; $E_0 = 1 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

Tracé fonction sinusoïdale de x avec $\lambda = 600 \text{ nm}$: $E(t, x)$ à $t = 0$ ressemble à la courbe donnée, mais x en abscisse

$E(t, x)$ à $t = T/4$ semblable, déplacée d'un quart de longueur d'onde vers la droite.



$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = + \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$$

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_x$$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = c\varepsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle \vec{e}_x = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2} \vec{e}_x$$

Exo EM62. Laser - bis (3 fois ; 2021)

- $\vec{E}(z, t)$ donc onde plane, expression complexe donc onde monochromatique. Sens de propagation : d'après la variable couplée espace - temps $z - \omega t$, propagation dans la direction de \vec{u}_z , dans le sens direct, soit selon $+\vec{u}_z$. Direction de polarisation = direction du champ \vec{E} : (Ox)
- $\lambda = 13 \mu\text{m}$: Domaine infra-rouge
- $\omega = kc$ et $2\pi f = kc$
- relation de structure (OPP) :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \exp(i(kz - \omega t)) \vec{e}_y$$

Ou encore, équation de Maxwell Faraday en complexes :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow i\vec{k} \wedge \vec{E} = -(-i\omega\vec{B}) \Leftrightarrow \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega\vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c} \exp(i(kz - \omega t)) \vec{e}_y$$

Avec $\vec{k} = k\vec{e}_z$

5) $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e}_z$

6) $\text{div} \vec{E} = 0 \Leftrightarrow i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$; $\text{div} \vec{B} = 0 \Leftrightarrow i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$;

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow i\vec{k} \wedge \vec{E} = -(-i\omega\vec{B}) ; \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

1) $\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cos^2(kz - \omega t) \vec{u}_z$ ATTENTION : pas de notation complexe !!!

Rappels

On associe à toute composante monochromatique $f(M, t) = f_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$ du champ ou du potentiel électromagnétique une écriture complexe $\underline{f}(M, t)$ et une amplitude complexe \underline{f}_m :

$$\underline{f}(M, t) = f_m \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)) = \underline{f}_m \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$$

de sorte que :

$$\underline{f}_m = f_m \exp(i\varphi) \quad f(\vec{r}, t) = \text{Re} \left(\underline{f}(\vec{r}, t) \right)$$

Exo EM63. Onde électromagnétique (2 fois ; 2018)

Énoncé des équations de Maxwell sans et avec charges et courants : cf. cours

\vec{E} et \vec{k} perpendiculaires, par exemple

$$\vec{k} = k\vec{e}_x ; \vec{E} = E_y \left(t - \frac{x}{c} \right) \vec{e}_y ; \vec{B} = \frac{E_y \left(t - \frac{x}{c} \right)}{c} \vec{e}_z ; \text{OPPH en cpx : } \underline{\vec{E}} = E_0 \exp \left(i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{e}_y$$

Exo EM64. Onde (1 fois, 2022)

1) Onde non plane car dépendant à la fois de x et z , progressive (cf couplage espace temps : variable $\omega t - kx$ dans l'argument du cos ; polarisée rectilignement car direction fixe : \vec{e}_y ; pseudo harmonique car variation sinusoïdale en x mais modulation d'amplitude dans la direction z via $E_0 f(z)$)

2) Cf cours

3) MG dans le vide : $\text{div} \vec{E} = 0$ soit $\frac{\partial E}{\partial y} = 0$ avec $\frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial (E_0 f(z) \cos(\omega t - kx))}{\partial y} = 0$ soit $0 = 0$: sans intérêt

4) Equation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial E_y}{\partial z} \vec{u}_x + \frac{\partial E_y}{\partial x} \vec{u}_z = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} : \text{pas de composante sur } \vec{u}_y \text{ pour } - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \text{ donc } B_y = 0$$

Exo EM65. Réflexion d'une onde

1. Onde plane, progressive (suivant les z croissants), harmonique, polarisée rectilignement (suivant x).

2. Onde réfléchie plane progressive (suivant les z décroissants), harmonique, de même fréquence que l'onde incidente, polarisée rectilignement.

Intérieur du conducteur : champ électrique nul

Relation de passage : $\vec{E}_{cond} - (\vec{E}_l + \vec{E}_r)(z = 0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$ ou $\vec{0} - E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x - \vec{E}_0 \cos(\omega t + \varphi) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$

d'où $\vec{E}_0 \cos(\omega t + \varphi) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z - E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$

d'où $\sigma = 0$; $\vec{E}_0 = E_0 \vec{u}_x$ et $\varphi = \pi$.

3. $\vec{B}_l = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$; $\vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kz) \vec{u}_y$.

4. $\vec{J}_s = 2 \frac{E_0}{c\mu_0} \cos(\omega t) \vec{u}_x$

5. $\vec{E}_{tot} = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kz) \vec{u}_x$; $\vec{B}_{tot} = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kz) \vec{u}_y$. Onde stationnaire.

6. $\vec{\Pi}_l = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z$; $\vec{\Pi}_r = -\frac{E_0^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t + kz) \vec{u}_z$; $\vec{\Pi}_{tot} = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \sin(2\omega t) \sin(2kz) \vec{u}_z$

Version 2 : Onde em + Miroir (énoncé incertain) (2 fois, 2022)

Conducteur parfait

La conductivité est supposée infinie, la résistivité est supposée nulle, ce qui signifie qu'on néglige les pertes par effet Joule dans le matériau.

\vec{j} non infini donc $\vec{E} = \vec{0}$ dans un conducteur parfait

Relation de Maxwell-Faraday : $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$

Il ne peut donc pas exister dans un conducteur parfait de champ magnétique variable, or on s'intéresse à la propagation d'une onde, donc à un champ variable dans le temps.

On en déduit $\vec{B} = \vec{0}$ dans un conducteur parfait

Modèle du conducteur parfait

Un conducteur parfait est caractérisé par une **conductivité γ** infinie ; on a alors $\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{B} = \vec{0}$

Remarque (hors-programme) : En réalité, le passage du vide au conducteur n'est pas abrupt. On peut montrer qu'il existe une faible épaisseur δ , appelée épaisseur de peau sur laquelle les champs décroissent exponentiellement. Cette épaisseur, dans laquelle existe des courants peut s'exprimer en fonction de μ_0 , γ et ω , pulsation de l'onde monochromatique incidente :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma \mu_0 \omega}}$$

On constate que δ diminue lorsque γ augmente et lorsque ω augmente.

Pour de l'argent, de conductivité $\gamma = 6.10^7 \text{ S.m}^{-1}$, avec $\omega = 10^8 \text{ rad.s}^{-1}$, on a $\delta = 1,6.10^{-5} \text{ m} = 16 \mu\text{m}$. L'approximation d'une épaisseur de peau nulle est donc correcte lorsqu'on considère des conducteurs de dimension égale ou supérieure au centimètre.

Discontinuités des champs à l'interface entre conducteur et vide

Rappels

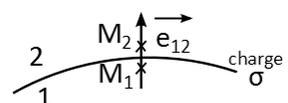
Le champ électrique subit une discontinuité finie à la traversée d'une surface chargée :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{12}$$

Lors de la **traversée d'une surface chargée** :

La composante **tangentielle** du champ électrique est **continue**

La composante **normale** du champ électrique est **discontinue**.

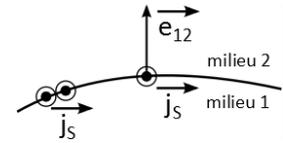


Le champ magnétique subit une discontinuité finie à la traversée d'une nappe de courant surfacique :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12}$$

La **composante tangentielle** du champ magnétique est **discontinue** lors de la traversée d'une nappe surfacique.

La **composante normale** du champ magnétique est **continue** lors de la traversée d'une nappe surfacique.



Supposons qu'un conducteur parfait occupe le demi-espace $x > 0$ alors que le demi-espace $x < 0$ est vide.

Soit ici :

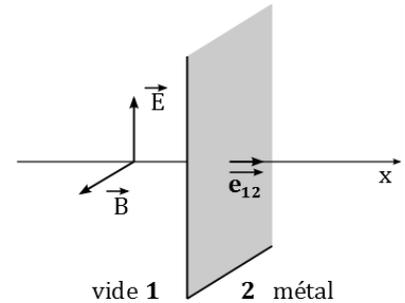
$\vec{E}_1 = \vec{E}(0^-)$ champ à la limite du conducteur, côté vide

$\vec{E}_2 = \vec{0}$ champ dans le conducteur, près de l'interface

$\vec{B}_1 = \vec{B}(0^-)$ champ à la limite du conducteur, côté vide

$\vec{B}_2 = \vec{0}$ champ dans le conducteur, près de l'interface

$\vec{e}_{12} = \vec{e}_x$

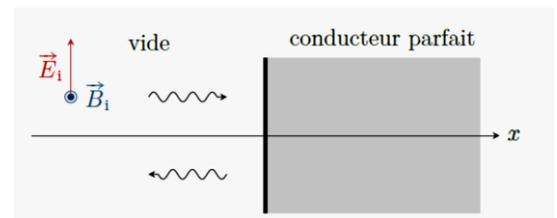


D'après les relations de passage rappelées, on a alors :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{12} = \vec{0} - \vec{E}(0^-) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \quad (1)$$

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12} = \vec{0} - \vec{B}(0^-) \quad \Rightarrow \quad \vec{B}(0^-) = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x \quad (2)$$

On considère une OemPPH se propageant dans le vide selon \vec{e}_x , polarisée rectilignement suivant \vec{e}_y , rencontrant un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$.



Pour une onde incidente de pulsation ω :

$$\vec{E}_i(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

Le champ magnétique est déterminé grâce à la relation de structure : $\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ Schéma E. Thibierge

$$\vec{B}_i(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z \quad \text{avec } B_0 = \frac{E_0}{c}$$

À la limite du conducteur ($x = 0^-$), on a pour les champs incidents :

$$\vec{E}_i(0^-, t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y$$

$$\vec{B}_i(0^-, t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

Le champ \vec{E}_i ne satisfait pas à la relation de continuité **(1)** donnée ci-dessus, il doit apparaître un champ réfléchi \vec{E}_r de sorte que $\vec{E}_i + \vec{E}_r$ vérifie la relation de continuité.

Le champ électrique incident, en arrivant sur le métal, crée un courant variable \vec{j}_s (sur une profondeur très faible), lui-même source d'un champ magnétique variable. Ce champ magnétique induit un champ électrique (relation de Maxwell-Faraday) qui va s'opposer au champ incident, empêchant la pénétration du champ électrique dans le métal.

Il apparaît une onde réfléchie, qui va se propager suivant $-\vec{e}_x$.

Soient \vec{E}_r et \vec{B}_r les champs électrique et magnétique réfléchis. Les relations de passage impliquent :

$$\vec{E}_i(0^-, t) + \vec{E}_r(0^-, t) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \quad (1) \quad \vec{B}_i(0^-, t) + \vec{B}_r(0^-, t) = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x \quad (2)$$

$$\vec{E}_r(0^-, t) = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \quad (1) \quad \vec{B}_r(0^-, t) = -B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z - \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x \quad (2)$$

Du fait de la linéarité des équations de Maxwell, l'onde réfléchi a la même pulsation que l'onde incidente.

D'après les caractéristiques du champ électrique, il est nécessairement orthogonal à la direction de propagation, et n'a donc pas de composante selon \vec{e}_x avec $\vec{E}_r(0^-, t) \cdot \vec{e}_x = 0$

En projetant la relation de passage sur \vec{e}_x , on obtient donc :

Espace 21

$$\vec{E}_r(0^-, t) \cdot \vec{e}_x = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x \Leftrightarrow 0 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

On en déduit qu'il n'y aura pas de charge statique sur le conducteur : $\sigma = 0$;

Espace 22

En projetant la relation de passage sur \vec{e}_z :

$$\vec{E}_r(0^-, t) \cdot \vec{e}_z = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0$$

Le champ réfléchi n'a pas de composante selon \vec{e}_z

En projetant la relation de passage sur \vec{e}_y :

Espace 23

$$\vec{E}_r(0^-, t) \cdot \vec{e}_y = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = -E_0 \cos(\omega t)$$

Soit, en l'absence de composante de $\vec{E}_r(0^-, t)$ selon \vec{e}_x et \vec{e}_z :

$\vec{E}_r(0^-, t) = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y$, avec de plus une propagation selon $-\vec{e}_x$:

Espace 24

$$\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y = E_0 \cos(\omega t + kx + \pi) \vec{e}_y$$

L'onde réfléchi a la même pulsation que l'onde incidente ; le champ électrique réfléchi a la même amplitude que le champ incident et subit un déphasage de π .

Le champ électrique résultant est nul sur la surface du conducteur, ainsi qu'à l'intérieur de celui-ci.

On a établi à l'aide de la relation de structure $\vec{B}_i(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$ avec $B_0 = \frac{E_0}{c}$. De même :

$$\vec{B}_r(x, t) = \frac{(-\vec{e}_x) \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{(-\vec{e}_x) \wedge (-E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y)}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$$

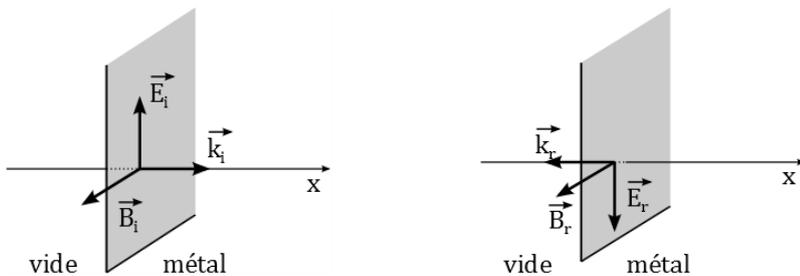
Espace 25

$$\vec{B}_r(x, t) = B_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z \quad \text{avec } B_0 = \frac{E_0}{c}$$

Le champ magnétique réfléchi a la même amplitude et la même phase que le champ incident.

Caractéristiques de l'onde réfléchi par un conducteur parfait suite à une incidence normale

- * L'onde réfléchi a la même pulsation et la même amplitude que l'onde incidente.
- * Déphasage de π sur l'interface pour le champ électrique.
- * Pas de déphasage sur l'interface pour le champ magnétique



Charges, courants sur l'interface

Nous avons établi l'absence de charges surfaciques à la surface du conducteur parfait : $\sigma = 0$

Relation de passage pour le champ magnétique : $\vec{B}_i(0^-, t) + \vec{B}_r(0^-, t) = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x$

Or $\vec{B}_i(0^-, t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ et $\vec{B}_r(0^-, t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ d'où

$$2 B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x$$

Espace 26

\vec{j}_s EST LE COURANT SUR L'INTERFACE, DONC PAS DE COMPOSANTE SUIVANT \vec{e}_x

LE PRODUIT VECTORIEL PAR \vec{e}_x donne une composante sur \vec{e}_z , donc pas de composante sur \vec{e}_y :

\vec{j}_s NE PEUT AVOIR QU'UNE COMPOSANTE SUR \vec{e}_y :

$$2 B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z = -\mu_0 (j_s)_y \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x \quad \text{soit avec} \quad -\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \mu_0 (j_s)_y = 2 B_0 \cos(\omega t)$$

$$\vec{j}_s = 2 \frac{E_0}{c \mu_0} \cos(\omega t) \vec{e}_y$$

Ce résultat doit pouvoir être retrouvé, et non être appris par cœur !

La réflexion d'une OemPPH sous incidence normale sur un plan conducteur parfait induit un courant surfacique dans la direction du champ électrique incident et une charge surfacique nulle.

Remarque : les électrons libres du métal sont mis en mouvement par le champ électrique incident, il est donc logique que les courants surfaciques créés soient parallèles au champ électrique incident.

Superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchi

| Champ électrique incident | Champ électrique réfléchi |
|---|---|
| $\vec{E}_i(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$ | $\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$ |
| Champ magnétique incident | Champ magnétique réfléchi |
| $\vec{B}_i(x, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$ | $\vec{B}_r(x, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$ |

Champ électrique résultant

D'après le principe de superposition, $\vec{E}(x, t) = \vec{E}_i(x, t) + \vec{E}_r(x, t)$

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y - E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$$

Or $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$ soit ici

$$\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx) = -2 \sin \frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2} \sin \frac{\omega t - kx - \omega t - kx}{2}$$

$$\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx) = -2 \sin(\omega t) \sin(-kx)$$

Soit

$$\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$$

L'onde totale n'est plus progressive : on n'a plus la forme $\omega t \pm kx$ ou $x \pm ct$, mais un découplage entre les dépendances spatiales et temporelles.

L'onde résultante est une **onde stationnaire**.

Animation Java : site F/Legrand : <http://www.f-legrand.fr/scidoc/simul/ondes/reflexionConducteur.html>

Champ magnétique résultant

Attention !! une **onde stationnaire (OS) n'est pas une OPP** !! le champ magnétique résultant ne peut donc se calculer à partir de la relation de structure. Il faut **sommer les champs magnétiques incident et réfléchi calculés séparément**.

$$\vec{B}(x, t) = \vec{B}_i(x, t) + \vec{B}_r(x, t)$$

$$\vec{B}(x, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z + \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$$

Or $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ soit ici
 $\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx) = 2 \cos(\omega t) \cos(kx)$

$$\vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z$$

Les 2 champs résultants ont la même nature : l'onde résultante est une onde stationnaire et non plus une onde progressive.

Exo EM66. Réflexion d'une onde sur un miroir (2018)

OPPH se propageant suivant les x croissants, polarisée selon \vec{e}_y

Pas de champ transmis $\vec{E}_2 = \vec{0}$ car conducteur parfait. Relation de passage :

$$\vec{E}_2(0, t) - \vec{E}_1(0, t) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \text{ avec } \vec{E}_2(0, t) = \vec{0}, \vec{E}_1 = \vec{E}_i(0, t) + \vec{E}_r(0, t), \vec{n}_{12} = +\vec{e}_x$$

Projection sur \vec{e}_y : $E_{r0} = -E_{0i}$. Le champ électrique réfléchi a la **même amplitude** que le champ incident. Le champ réfléchi subit un **déphasage de π** .

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}_i}{c} = B_{0i} \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_z = \frac{E_{0i}}{c} \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_z$$

$$\vec{B}_r = \frac{-\vec{e}_x \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{-\vec{e}_x \wedge (-E_{0i} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y)}{c} = \frac{E_{0i}}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z = \vec{B}_i$$

$$\vec{\Pi}_i = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{E_{0i}^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x \Rightarrow \langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{E_{0i}^2}{2 \mu_0 c} \vec{u}_x$$

$$\vec{\Pi}_r = \frac{\vec{E}_r \wedge \vec{B}_r}{\mu_0} = -\frac{E_{0i}^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t + kx) \vec{u}_x \Rightarrow \langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{E_{0i}^2}{2 \mu_0 c} \vec{u}_x$$

Conclusion : $\langle \vec{\Pi}_i \rangle = -\langle \vec{\Pi}_r \rangle$. L'énergie électromagnétique transportée par l'onde incidente se réfléchit entièrement à la surface du conducteur parfait

Exo EM67. Cavité résonante

1. Onde plane (ne dépend que de la variable x , champ constant dans le plan $x = cte$), polarisée rectilignement (cf vecteur : selon \vec{e}_y), stationnaire (de la forme $F(x)G(t)$ et non de la forme d'une onde progressive avec couplage des variables d'espace et de temps : $f(x \pm ct)$).

2. cours : Equations de Maxwell

| | | Régime variable dans le vide |
|-----------------------------------|----|--|
| Maxwell-Gauss | MG | $\text{div}(\vec{E}) = 0$ |
| Maxwell-Faraday | MF | $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ |
| Maxwell-Ampère | MA | $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ |
| Maxwell-flux (ou Maxwell-Thomson) | MΦ | $\text{div}(\vec{B}) = 0$ |

en exploitant la relation d'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E}$$

Avec (MG) dans le vide : $\text{div}(\vec{E}) = 0$ soit $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = -\Delta \vec{E}$

Avec (MF) : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ soit $\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\Delta \vec{E}$ ou

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \Delta \vec{E} = \frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t}$$

Or selon (MA) dans le vide : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ d'où $\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Finalement $\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ on pose $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

on aboutit à l'équation de d'Alembert, qui donne ici :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

3. On injecte le champ donné dans l'équation de d'Alembert, en calculant les différentes dérivées partielles première puis seconde :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = E_0 f'(x) \cos(\omega t) \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = E_0 f''(x) \cos(\omega t)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\omega E_0 f(x) \sin(\omega t) \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 f(x) \cos(\omega t)$$

Soit $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ donne

$$E_0 f''(x) \cos(\omega t) = -\frac{1}{c^2} \omega^2 E_0 f(x) \cos(\omega t) \Leftrightarrow f''(x) = -\frac{1}{c^2} \omega^2 f(x)$$

On trouve donc bien une équation différentielle $f'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 f = 0$, de type oscillateur harmonique spatial :

solutions de la forme $f(x) = A \cos\left(\frac{\omega}{c} x\right) + B \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right)$

4. 1^{ère} condition aux limites (C.L.1) : \vec{E} est nul en $x = 0$ (conducteur parfait) : $\forall t, \vec{E}(x = 0, t) = \vec{0}$.

$$\text{D'où } f(x = 0) = A = 0 \text{ et } f(x) = B \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right)$$

De même C.L.2 : \vec{E} est nul en $x = a$ (conducteur parfait) : $\forall t, \vec{E}(x = a, t) = \vec{0}$.

D'où $f(x = a) = B \sin\left(\frac{\omega}{c} a\right) = 0$, avec $B \neq 0$; soit $\frac{\omega_n}{c} a = n\pi$, n entier naturel

$f(x) = B \sin(\omega_n t)$ avec $\omega_n = n \frac{\pi c}{a}$, n entier naturel.

Exo EM68. Représentation spatiale et temporelle d'une onde stationnaire (2 fois, 2023)

a. Polarisation rectiligne suivant \vec{u}_y .

- b. Séparation des variables t et x , donc onde stationnaire.
- c. $\lambda = a/2$; $f = 2c/a$.
- d. fonction sinus, 1 période, amplitude maximale (E_0)
- e. Nœuds en $a/4, a/2, 3a/4$ et aux extrémités ; ventres en $a/8, 3a/8, 5a/8$ et $7a/8$.

Exo EM69. Equation des télégraphistes

Loi des mailles : $u(x + dx, t) + \lambda dx \frac{\partial i}{\partial t} - u(x, t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial i}{\partial t}$ (1)

Loi des nœuds : $i(x, t) = i(x + dx, t) + \gamma dx \frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial i}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial u}{\partial t}$ (2)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \stackrel{\text{dérivée de (1)}}{\text{par rapport à } x} = -\lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -\lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = -\lambda \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right) \stackrel{\text{équation (2)}}{=} + \lambda \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ et}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \stackrel{\text{dérivée de (2)}}{\text{par rapport à } x} = -\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \stackrel{\text{équation (1)}}{=} + \lambda \gamma \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

Équations de propagation de D'Alembert, de la même forme que celles des ondes mécaniques sur une corde (cf. hypothèses dans le cours) ou électromagnétiques :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

Célérité de l'onde (vitesse de propagation) : $c = \frac{1}{\sqrt{\lambda \gamma}}$

INTERFERENCES

Exo EM70. Fentes d'Young (5 fois, 2019)

- a. Addition possible car ondes cohérentes (issues d'une même source) ?? ou linéarité donc principe de superposition ?!!

- b. Cf cours

Calcul direct

Expression des vibrations de S_1 et S_2 en M :

$$\begin{aligned} \underline{s_1}(M, t) &= a \cdot e^{j(\omega t - k \cdot r_1)} & s_1(M, t) &= s_0 \cos(\omega t - k \cdot r_1) \\ \underline{s_2}(M, t) &= a \cdot e^{j(\omega t - k \cdot r_2)} & s_2(M, t) &= s_0 \cos(\omega t - k \cdot r_2) \end{aligned}$$

Expression des intensités de S_1 et S_2 en M :

$$I_1 = \langle s_1^2 \rangle = \frac{1}{2} s_0^2 \text{ et } I_2 = \langle s_2^2 \rangle = \frac{1}{2} s_0^2 \text{ car } \langle \cos^2 f(t) \rangle = \frac{1}{2}$$

Dans la suite, on pose : $\frac{1}{2} s_0^2 = I_0$

Expression de l'intensité résultante en M :



Attention : l'intensité est une grandeur quadratique (non linéaire), il faut impérativement travailler avec l'onde résultante

$$I = \langle s^2 \rangle = \langle (s_1 + s_2)^2 \rangle = \langle s_1^2 \rangle + \langle s_2^2 \rangle + 2\langle s_1 \cdot s_2 \rangle = I_0 + I_0 + I_{12}$$

$$I_{12} = 2\langle s_1 \cdot s_2 \rangle = 2\langle s_0^2 \cos(\omega t - kr_1) \cos(\omega t - kr_2) \rangle = 2s_0^2 \langle \cos(\omega t - kr_1) \cos(\omega t - kr_2) \rangle$$

$$\cos(A) \cdot \cos(B) = \frac{\cos(A - B) + \cos(A + B)}{2}$$

avec $A = \omega t - kr_1$ et $B = \omega t - kr_2$ soit $A - B = k(r_2 - r_1)$ et $A + B = 2\omega t - (kr_1 + kr_2)$

$$I_{12} = s_0^2 \langle \cos(-kr_1 + kr_2) + \cos(2\omega t - (kr_1 + kr_2)) \rangle \\ = s_0^2 \langle \cos(-kr_1 + kr_2) \rangle + s_0^2 \langle \cos(2\omega t - (kr_1 + kr_2)) \rangle$$

Or, $\langle \cos(f(t)) \rangle = 0$ donc $\langle \cos(2\omega t - (kr_1 + kr_2)) \rangle = 0$ et

$$I_{12} = s_0^2 \cos(kr_2 - kr_1) = 2I_0 \cos(kr_2 - kr_1)$$

Finalement,

$$I = 2I_0 + 2I_0 \cos(kr_2 - kr_1) = \boxed{2I_0(1 + \cos(k(r_2 - r_1))) = I}$$

Méthode complexe

Formule fondamentale des interférences

La superposition des deux ondes en M donne :

$$\underline{s}(M, t) = \underline{s}_1(M, t) + \underline{s}_2(M, t)$$

$$\underline{s}(M, t) = s_0 \exp [j(\omega t - kr_1 + \alpha)] + s_0 \exp [j(\omega t - kr_2 + \alpha)]$$

$$\underline{s}(M, t) = s_0 \exp [j(\omega t + \alpha)] (\exp (-jkr_1) + \exp (-jkr_2))$$

$$\underline{s}^*(M, t) = s_0 \exp [-j(\omega t + \alpha)] (\exp (+jkr_1) + \exp (+jkr_2))$$

L'intensité lumineuse en M est

$$I(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} \underline{s} \cdot \underline{s}^*$$

$$\underline{s} \cdot \underline{s}^*(M, t) = (s_0 \exp (j(\omega t + \alpha)) [\exp (-jkr_1) + \exp (-jkr_2)]) \\ \times (s_0 \exp (-j(\omega t + \alpha)) [\exp (+jkr_1) + \exp (+jkr_2)])$$

$$\underline{s} \cdot \underline{s}^*(M, t) = s_0^2 \exp (-j(\omega t + \alpha)) \exp (j(\omega t + \alpha)) [\exp (-jkr_1) + \exp (-jkr_2)] [\exp (+jkr_1) \\ + \exp (+jkr_2)]$$

Avec $\exp (-j(\omega t + \alpha)) \exp (j(\omega t + \alpha)) = \exp(0) = 1$

$$\underline{s} \cdot \underline{s}^*(M, t) = s_0^2 [\exp (-jkr_1) + \exp (-jkr_2)] [\exp (+jkr_1) + \exp (+jkr_2)]$$

$$\underline{s} \cdot \underline{s}^*(M, t) = s_0^2 [\exp (-jkr_1 + jkr_1) + \exp (-jkr_1 + jkr_2) + \exp (+jkr_1 - jkr_2) + \exp (-jkr_2 + jkr_2)]$$

$$\underline{s} \cdot \underline{s}^*(M, t) = s_0^2 [2 + \exp (jk(r_2 - r_1)) + \exp (-jk(r_2 - r_1))]$$

$$\underline{s} \cdot \underline{s}^*(M, t) = s_0^2 [2 + 2\cos(k(r_2 - r_1))]$$

Remarque : on pouvait également utiliser la propriété suivante :

$$|\underline{s}|^2 = |\underline{s}_1|^2 + |\underline{s}_2|^2 + 2 \operatorname{Re} (\underline{s}_1 \cdot \underline{s}_2^*)$$

Que l'on peut démontrer en effectuant le calcul suivant :

$$|\underline{s}|^2 = |\underline{s}_1 + \underline{s}_2|^2 = \underline{s} \cdot \underline{s}^* = (\underline{s}_1 + \underline{s}_2) \cdot (\underline{s}_1^* + \underline{s}_2^*) = |\underline{s}_1|^2 + |\underline{s}_2|^2 + \underline{s}_1 \cdot \underline{s}_2^* + \underline{s}_2 \cdot \underline{s}_1^*$$

avec $\underline{z} + \underline{z}^* = 2 \operatorname{Re}(\underline{z})$

En divisant par 2 :

$$I(M) = \frac{1}{2} \underline{s} \cdot \underline{s}^* = s_0^2 [1 + \cos(k(r_2 - r_1))] \quad \text{avec } s_0^2 = 2I_0$$

Finalement, $I = 2 I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) \right)$ avec $I_0 = a^2$

- c. ordre d'interférence : $p = \frac{\delta}{\lambda}$
- d. frange noire si $p = n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$; frange brillante si $p = n$, $n \in \mathbb{N}$; $|p(M_1)| = 3$.
- e. franges horizontales perpendiculaires au plan de figure, équidistantes

$\Delta p = 1$ entre deux franges brillantes ou deux franges sombres (consécutives)

éventuellement, expression de l'interfrange en fonction de la distance entre les trous et de la distance entre les trous et l'écran.

f. On utilise des fentes (horizontales) plutôt que des trous pour avoir une figure plus lumineuse.

g. $\lambda = \frac{ai}{D}$ avec notations habituelles

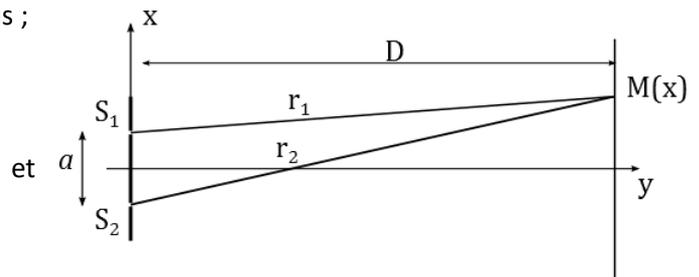
Exo EM71. Interférences lumineuses (2018)

1. cours : $\delta = \frac{ax}{D}$ si $\delta = SS_2M - SS_1M$ (cf démo ci-dessous)

On place un écran parallèle au plan percé des deux trous ;

Soit D la distance entre l'écran et (S_1S_2) .

Les deux sources ont pour coordonnées : $S_1 \begin{vmatrix} \frac{a}{2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ et $S_2 \begin{vmatrix} -\frac{a}{2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$



Le point d'observation sur l'écran : $M \begin{vmatrix} x \\ D \\ z \end{vmatrix}$

On cherche à évaluer $\delta = r_2 - r_1 = S_2M - S_1M$, sachant que la distance $a = S_1S_2$ est très faible devant D :
 $a \ll D \quad x \ll D \quad z \ll D$

$$r_1 = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2 + z^2} = D \left(1 + \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

on effectue un développement limité à l'ordre 1 en $\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2$ et $\left(\frac{z}{D}\right)^2$: $\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2 = \beta \ll 1$

Avec DL1 en 0 : $(1 + \beta)^\alpha = 1 + \alpha\beta + o(\beta)$

$$r_1 \approx D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2 \right) \right)$$

$$r_2 = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + D^2 + z^2} = D \left(1 + \left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

on effectue un développement limité à l'ordre 1 en $\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2$ et $\left(\frac{z}{D}\right)^2$: $\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2 \ll 1$

$$r_2 \approx D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x+\frac{a}{2}}{D} \right)^2 + \left(\frac{z}{D} \right)^2 \right) \right)$$

$$\delta = r_2 - r_1 = D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x+\frac{a}{2}}{D} \right)^2 + \left(\frac{z}{D} \right)^2 \right) - 1 - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x-\frac{a}{2}}{D} \right)^2 + \left(\frac{z}{D} \right)^2 \right) \right)$$

$$\delta = \frac{D}{2} \left(\left(\frac{x+\frac{a}{2}}{D} \right)^2 - \left(\frac{x-\frac{a}{2}}{D} \right)^2 \right) = \frac{1}{2D} \left(\left(x + \frac{a}{2} \right)^2 - \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{2D} (ax + ax)$$

D'où, finalement :

$$\delta = r_2 - r_1 = \frac{ax}{D}$$

2. Construction graphique et analogie entre triangle de gauche et celui de droite. Attention aux signes.

3. Ordre 0 : correspond à une différence de marche nulle soit $\delta = \frac{ax_{01}}{D} + \frac{aX}{L} = 0$ $x_{01} = -\frac{DX}{L}$.

4. L'intensité résultant des interférences dues à chacune des sources primaires est une fonction sinusoïdale de x . Les deux sinusoïdes ont la même période (interfrange) car les longueurs d'onde sont les mêmes. La somme des deux intensités peut être constante si les deux sinusoïdes sont en opposition de phase.

Il faut que les franges claires de l'une correspondent aux franges sombres de l'autre.

x est sur une frange claire de (1) si $x = x_{01} + i n_1$ n_1 entier quelconque

x est sur une frange sombre de (2) si $x = x_{02} + i \left(n_2 + \frac{1}{2} \right)$ n_2 entier quelconque

Les deux coïncident si $x_{01} + i n_1 = x_{02} + i \left(n_2 + \frac{1}{2} \right)$

soit $x_{01} - x_{02} = i \left(n_2 - n_1 + \frac{1}{2} \right) = i \left(n + \frac{1}{2} \right)$ n entier quelconque

Exo EM72. Interférences (1 fois, 2019)

1. $I(M) = 2 I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} \right) \right) ;$

2. $I(M) = 2 I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} \right) \right)$ franges rectilignes perpendiculaires au plan de figure ;

3. On remplace les trous d'Young par des fentes d'Young, perpendiculaires au plan de figure ;

4. $\delta(M) = \frac{ax}{D} ; p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda} = \frac{ax}{\lambda D} = \frac{2.10^{-4} \times 9.10^{-3}}{6.10^{-7} \times 2} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1,5 ; p$ demi-entier : frange noire.

Exo EM73. Interférences (2018)

Avec un système comme les fentes d'Young, on ne peut pas produire des interférences avec la lumière du soleil car les ondes ne sont pas cohérentes (division du front d'onde).

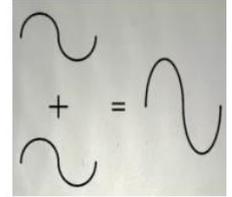
Néanmoins, on peut observer des interférences avec le soleil sur des bulles de savon, une tache d'huile sur la route (interférences par division d'amplitude).

Exo EM74. Du Laser aux fentes d'Young (1 fois, 2023)

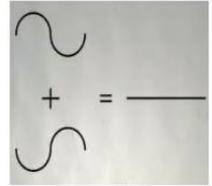
Exo EM75. Interférences (1 fois, 2023)

Succession de franges horizontales brillantes et sombres perpendiculaires au plan de figure, équidistantes : figure d'interférence.

S_1 et S_2 sont éclairés par le même faisceau laser : ce sont deux sources ponctuelles, cohérentes (même fréquence et déphasage constant). Par ailleurs, S_1 et S_2 étant de petite dimension, ils diffractent la lumière. Dans la zone de recouvrement des deux faisceaux diffractés (appelé champ d'interférence), les deux signaux peuvent s'additionner.



Si les deux signaux arrivent en phase, ils forment une interférence constructive, on observe une frange lumineuse.



Si les deux signaux arrivent en opposition de phase, ils créent une interférence destructive, on observe une frange sombre.

On peut additionner les deux signaux car l'équation de propagation de d'Alembert est linéaire : les ondes électromagnétiques vérifient le théorème de superposition. Les deux ondes sont cohérentes, l'intensité sur l'écran n'est pas la somme des intensités de chacune des sources mais il faut rajouter un terme d'interférence.

$$\underline{s} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 = a[\exp(j(\omega t - kr_1)) + \exp(j(\omega t - kr_2))]$$
$$\underline{s} = a \exp(j\omega t) [\exp(-kr_1) + \exp(-kr_2)]$$

Conjugué de \underline{s} : $\underline{s}^* = a \exp(-j\omega t) [\exp(+kr_1) + \exp(+kr_2)]$

On a la formule :

$$I = 2I_0(1 + \cos \Delta\phi) = 2I_0(1 + \cos(k\delta)) = 2I_0\left(1 + \cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda}\right)\right) = 2I_0(1 + \cos(2\pi p))$$

$\Delta\phi = kr_2 - kr_1$: différence de phase

$\delta = r_2 - r_1$: différence de marche

$p = \frac{\delta}{\lambda}$: l'ordre d'interférence

Démonstration en écriture complexe :

Calcul de l'intensité résultante : $I = \langle s^2 \rangle$

Pour une onde, $s_1 = \text{Re}(\underline{s}_1) = a \cos(\omega t - kr_1)$

$$I_0 = \langle s_1^2 \rangle = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2} \underline{s}_1 \cdot \underline{s}_1^*$$

Pour deux ondes, $I = \langle s^2 \rangle = \frac{1}{2} \underline{s} \cdot \underline{s}^*$

$$\underline{s} \cdot \underline{s}^* = (a \exp(j\omega t) [\exp(-jkr_1) + \exp(-jkr_2)]) \times (a \exp(-j\omega t) [\exp(+jkr_1) + \exp(+jkr_2)])$$

$$\underline{s} \cdot \underline{s}^* = a^2 \exp(j\omega t) \exp(-j\omega t) \times [\exp(-jkr_1) + \exp(-jkr_2)] \times [\exp(+jkr_1) + \exp(+jkr_2)]$$

$$\underline{s} \cdot \underline{s}^* = a^2 [\exp(-jkr_1) + \exp(-jkr_2)] \times [\exp(+jkr_1) + \exp(+jkr_2)]$$

$$\underline{s} \cdot \underline{s}^* = a^2 (1 + \exp(-jkr_1)\exp(+jkr_2) + \exp(-jkr_2)\exp(+jkr_1) + 1)$$

$$\underline{s} \cdot \underline{s}^* = a^2 (1 + \exp(jk(r_2 - r_1)) + \exp(-jk(r_2 - r_1)) + 1)$$

$$\underline{s} \cdot \underline{s}^* = a^2 (2 + 2 \cos(k(r_2 - r_1)))$$

$$I = \frac{1}{2} \underline{s} \cdot \underline{s}^* = a^2 (1 + \cos(k(r_2 - r_1))) = \boxed{2 I_0 (1 + \cos(k(r_2 - r_1))) = I}$$

On appelle $p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$ l'ordre d'interférence. On peut aussi écrire :

$$I = 2 I_0 (1 + \cos(k(r_2 - r_1))) = 2 I_0 (1 + \cos(kp\lambda)) \text{ or } k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \text{d'où :}$$

$$I = 2 I_0 (1 + \cos(2\pi p))$$

Franges brillantes obtenues pour une intensité maximale :

$$\cos(2\pi p) = 1 \Rightarrow 2\pi p = 2n\pi \Rightarrow p = n, n \in \mathbb{N}$$

Les valeurs entières de l'ordre d'interférence p correspondent à des franges brillantes.

Franges sombres obtenues pour une intensité minimale :

$$\cos(2\pi p) = -1 \Rightarrow 2\pi p = (2n + 1)\pi \Rightarrow p = n + \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}$$

Les valeurs demi-entières de l'ordre d'interférence p correspondent à des franges sombres.

$p = 2$ ($p = 0$ au centre) et $\Delta p = 1$ entre deux franges brillantes ou deux franges sombres (consécutives)

$$i = \frac{\lambda D}{a} \Rightarrow \lambda = \frac{ia}{D}$$

Rq : On utilise des fentes (horizontales) plutôt que des trous pour avoir une figure plus lumineuse.