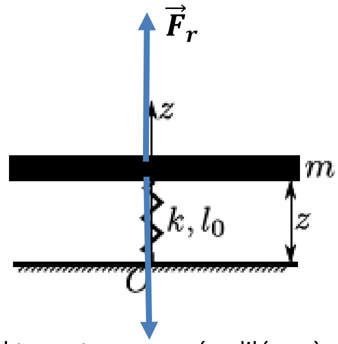
D.S. DE PHYSIQUE N°1 – CORRIGE

PROBLEME N°1 : AUTOUR DE LA RECUPERATION D'ENERGIE (ATS 2023)



1. Le système (dalle + danseur) de masse m est soumis à :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$
- la force de rappel exercée par le ressort $\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0)\,\vec{u}_z = -k(z - \ell_0)\,\vec{u}_z$

2. $\vec{P} = m\vec{g}$ liée à l'énergie potentielle de pesanteur $E_{PP} = +mgz + cte$
   $\vec{F}_r = -k(z - \ell_0)\,\vec{u}_z$ liée à l'énergie potentielle élastique $E_{Pé} = \frac{1}{2}k(z - \ell_0)^2$
3. Selon le principe fondamental de la statique appliqué au système dans le référentiel terrestre supposé galiléen, à l'équilibre :

$$-mg\vec{u}_z - k\left(z_{éq} - \ell_0\right)\vec{u}_z = \vec{0}$$

soit, en projetant selon l'axe (Oz) ascendant :

$$-mg - k\left(z_{éq} - \ell_0\right) = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{z_{éq} = \ell_0 - \frac{mg}{k}}}$$

Remarque : *vérifier la cohérence du signe obtenu ! il faut $z_{éq} < \ell_0$, cohérent avec le système qui vient comprimer par son poids le ressort*

4. Principe fondamental de la dynamique appliqué au système :

$$m\vec{a} = -mg\vec{u}_z - k\left(z_{éq} - \ell_0\right)\vec{u}_z$$

Projection sur $\vec{u}_z$

$$m\ddot{z} = -mg - k(z - \ell_0)$$

soit

$$\boldsymbol{m\ddot{z} + kz = k\ell_0 - mg}$$

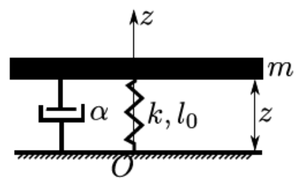
ou

$$\boxed{\boldsymbol{m\ddot{z} + kz = kz_{éq}}}$$

---

5. On ajoute la force de frottement dans l'expression du principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = -mg\vec{u}_z - k(z - \ell_0)\,\vec{u}_z - \alpha v\vec{u}_z$$



d'où en projetant sur $\vec{u}_z$

$$m\ddot{z} = -mg - k(z - \ell_0) - \alpha\dot{z}$$

soit

$$\boxed{\boldsymbol{m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = k\ell_0 - mg}}$$

---

6. Sous forme canonique :

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_{éq}$$

de la forme

$$\boldsymbol{\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e}$$

Par identification :

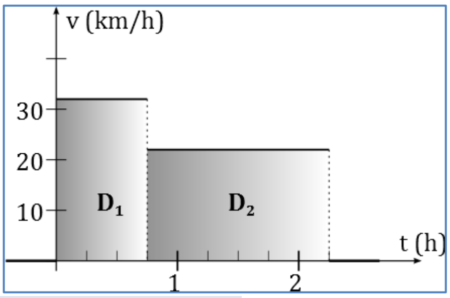
$$\boxed{\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}} \quad ; \quad \boxed{\boldsymbol{z_e =}}\ \boldsymbol{z_{éq}} \quad ; \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}}$$

Probleme N°2 : Sur la route

A) Cyclistes

1. système étudié : {cycliste + vélo} ; référentiel d'étude : référentiel terrestre supposé galiléen.

2. Graphe $v(t)$



3. Aire $\mathcal{A}_1$ sous la courbe pendant la 1ère période de durée $\Delta t_1 = 45\,min = \frac{3}{4}h$:

$\mathcal{A}_1 = \int_0^{\Delta t_1} v(t)dt = s(\Delta t_1) - s(t=0) =$ *distance* **distance D_1 parcourue à $v_1 = 32\ km.h^{-1}$** .

Aire sous la courbe pendant la 2nde période ($\Delta t_2 = 1h30$) : **distance D_2 parcourue à $v_2 = 22\ km.h^{-1}$**.

Aire sous la courbe totale **pendant $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$: distance totale D parcourue.**

$D_1 = v_1 \Delta t_1 = 32 \times \frac{3}{4} = 24\ km$; $D_2 = v_2 \Delta t_2 = 22 \times \frac{3}{2} = 33\ km$

Ne pas faire de conversions / A.N. avant de savoir ce qui sera utile. Ici beaucoup plus simple de conserver les vitesses en km/h et de convertir les durées en heures : obtention simple de distances en km.

$\boldsymbol{D = D_1 + D_2 = 57\ km}$

4. Durée du parcours : $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 2h15 = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{9}{4}\ h$

Distance parcourue : $D = 57\ km$.

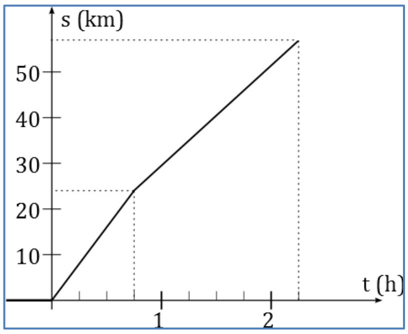
Vitesse moyenne du cycliste : $\boxed{\boldsymbol{v_{moy} = \frac{D}{\Delta t}}}$

Attention ! on ne peut utiliser ($v_1 + v_2$) / 2 ! pas les mêmes durées de parcours à chacune des vitesses, il faut bien se ramener à la définition du cours de la vitesse moyenne.

A.N. $\boldsymbol{v_{moy}} = \frac{57}{9/4} = \frac{57 \times 4}{9} = \frac{228}{9}$; $\boldsymbol{v_{moy} \approx 25\ km.h^{-1}}$

5. Graphe $s(t)$

La vitesse correspond à la pente de la courbe s(t), il faut donc représenter la diminution de pente lors du changement de phase.



6. Équation $s(t)$: mouvements correspondant à des mouvements rectilignes uniformes à vitesse constante, on a alors :

Première phase : $\boldsymbol{s(t) = v_1 t + cte} \underbrace{=}_{C.I.: s(t=0)=0} \boxed{\boldsymbol{v_1 t = s(t)}}$

Seconde phase : $\boldsymbol{s(t) = v_2 t + cte}$

Calcul de la constante :

à $t = \Delta t_1 = \frac{3}{4}\ h$, la distance parcourue est $D_1 = 24\ km$

$D_1 = v_2 \Delta t_1 + cte$ soit $cte = D_1 - v_2 \Delta t_1$

$$\boxed{\boldsymbol{s(t) = v_2 t} + D_1 - v_2 \Delta t_1}$$

$A.N.: D_1 - v_2 \Delta t_1 = 24 - 22 \times \frac{3}{4} = 24 - 16{,}5 =$ $\boldsymbol{cte = 7{,}5\ km}$

Vérification possible : $s(\Delta t_1 + \Delta t_2)$ doit donner $D = 57\ km$

$s(\Delta t_1 + \Delta t_2) = v_2(\Delta t_1 + \Delta t_2) + cte = 22 \times \frac{9}{4} + 7{,}5 = \frac{99}{2} + \frac{15}{2} = \frac{114}{2} = 57\ km$: OK

B) Un conducteur sur la route

7. Energie cinétique du système {voiture + conducteur} : $\boxed{\boldsymbol{Ec = \frac{1}{2}mv^2}}$, avec $v = V_1$ = 80 km.h^{-1} = 22,2 m.s^{-1}.

Il faut évaluer la masse de la voiture (plus celle du conducteur éventuellement). En première approximation, on peut prendre $\boldsymbol{m} \approx$ **1 tonne** (Une recherche bibliographique indique que le poids moyen des voitures en France est de 1250 kg).

Pour simplifier les calculs, la masse ayant été sous-estimée, on peut choisir $v \approx 23$ m.s^{-1}.

A.N. : $\boldsymbol{Ec} \approx$ **530 kJ**

---

8. Le mouvement est rectiligne uniforme pendant la phase de réaction, on a donc : $\dot{x} = V_1$
soit en intégrant la vitesse par rapport au temps entre l'instant $t_a = 0$ où le conducteur voit l'arbre et l'instant t_f où il se met à freiner :

$D_r = x(t_f) - x(t_a) = \int v(t)dt = V_1 t_f$ avec $t_f = \tau_r = 2s$, le conducteur mettant $\tau_r = 2$s à réagir.

$\boxed{\boldsymbol{D_r = V_1 \tau_r}}$. A.N. : $\boldsymbol{D_r = 44,4\ m}$

La distance parcourue avant que le conducteur ne commence à freiner est de 44 m.

---

9. La voiture roule à la vitesse V_1 jusqu'à l'instant t_f, puis freine avec une accélération a_2 constante ; on a alors un mouvement rectiligne uniformément accéléré.

En intégrant une première fois l'accélération par rapport au temps : $v(t) = \int a_2 dt + A = a_2 t + A$ avec A constante d'intégration.

Conditions initiales : on peut choisir comme nouvel instant initial le moment où le conducteur se met à freiner, la voiture roulant alors à la vitesse V_1, soit $v(t = 0) = V_1 = A$, soit $\boxed{\boldsymbol{v(t) = a_2 t + V_1}}$

---

10. On intègre une seconde fois pour trouver la position : $x(t) = \int v(t)dt + B$ avec B constante d'intégration.

Avec $v(t) = a_2 t + V_1$, on a $x(t) = \frac{1}{2}a_2 t^2 + V_1 t + C$, C constante d'intégration

En choisissant comme nouvelle origine des positions la position de la voiture au moment où le conducteur se met à freiner, on a $x(t = 0) = 0 = C$, soit $\boxed{\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2}a_2 t^2 + V_1 t}}$.

---

11. La voiture s'arrête lorsque sa vitesse devient nulle, soit à l'instant t_2 tel que $v(t_2) = a_2 t_2 + V_1 = 0$ ou encore $\boxed{t_2 = -\frac{V_1}{a_2}}$.

---

12. La distance parcourue pendant la phase de freinage est alors :

$$D_f = x(t_2) = \frac{1}{2}a_2 {t_2}^2 + V_1 t_2 = \frac{1}{2}a_2\left(\frac{V_1}{a_2}\right)^2 - \frac{{V_1}^2}{a_2} = \boxed{\boldsymbol{-\frac{1}{2}\frac{{V_1}^2}{a_2} = D_f}}$$

La distance totale parcourue est finalement la somme de ces deux distances :

$\boxed{\boldsymbol{D_t = D_f + D_r = V_1\tau_r - \frac{1}{2}\frac{{V_1}^2}{a_2}}}$; **A.N. :** $\boldsymbol{D_t = 49,3\ m}$ soit $\boldsymbol{D_t \approx 94\ m}$

Vérification de l'homogénéité :

$\left[\frac{1}{2}\frac{{V_1}^2}{a_2}\right] = [V_1]^2.[a_2]^{-1}$ avec $[a_2] = L.T^{-2}$, soit $\left[\frac{1}{2}\frac{{V_1}^2}{a_2}\right] = (L.T^{-1})^2.L^{-1}.T^2 = L = [D_f]$: homogène

La distance parcourue entre le moment où le conducteur voit l'arbre et le moment où la voiture s'arrête est de 94 m, alors que la distance le séparant de l'arbre lorsqu'il le voit est de 50 m. **Il y a donc choc.**

C) Course de voitures telecommandees

Les deux voitures ont des mouvements rectilignes de même type : première phase correspondant à un mouvement rectiligne uniformément accéléré (accélération constante), suivi d'une seconde phase correspondant à un mouvement rectiligne uniforme (vitesse constante).

On choisit comme origine des temps l'instant $t = 0$ du départ.

13. Obtention de la vitesse en intégrant l'accélération $a_A = cte$ de la voiture d'Anas par rapport au temps :

$v_A(t) = \int a_A dt + A \underbrace{=}_{a_A = cte} a_A t + A$ avec A constante d'intégration.

- Détermination de la Constante d'Intégration à l'aide des Conditions Initiales :

La voiture A est initialement immobile, soit : $v_A(t=0) \underbrace{=}_{\text{C.I.de l'enonce}} 0 \underbrace{=}_{\substack{formule \\ \text{à } t=0}} A,$

Conclusion :

$$\boxed{v_A(t) = a_A t}.$$

---

14. La première phase se termine lorsque la vitesse limite $V_A =$ 12 km·h⁻¹ est atteinte, soit à l'instant τ_A tel que :

$$v_A(\tau_A) \underbrace{=}_{\text{def de } \tau_A} V_A \underbrace{=}_{\substack{formule \\ \text{à } \tau_A}} a_A \tau_A$$

Soit

$$\boxed{\tau_A = \frac{V_A}{a_A}}$$

A.N. : conversion de la vitesse en unité S.I. : $V_A = \frac{12.10^3}{3{,}6.10^3} = \frac{120}{36} = \frac{6\times20}{6\times6} = \frac{10}{3} \approx 3{,}3$ m.s⁻¹.

$$\tau_A = \frac{10}{3\times2} = \frac{5}{3} \approx \mathbf{1,7\ s \approx \tau_A}$$

---

15. Les mouvements des deux voitures étant strictement de même nature, on obtiendrait de la même manière

$v_B(t) = a_B t$ et

$$\boxed{\tau_B = \frac{V_B}{a_B}}$$

A.N. : conversion de la vitesse en unité S.I. : $V_B = \frac{10.10^3}{3{,}6.10^3} = \frac{100}{36} = \frac{5\times2\times5\times2}{3\times2\times3\times2} = \frac{25}{9} = 3 - \frac{2}{9} \approx 2{,}8$ m.s⁻¹.

$$\tau_B = \frac{25}{9\times3} = \frac{25}{27} \approx \mathbf{0,9\ s \approx \tau_B}$$

---

16. Distances parcourues aux instants τ_i :

Obtention de la position $x_A(t)$ de la voiture d'Anas à un instant quelconque de la première phase en intégrant l'accélération $v_A = a_A t$ par rapport au temps :

$$x_A(t) = \int v_A(t)dt + B \quad \text{avec } B \text{ constante d'intégration}$$

$$x_A(t) = \int a_A t dt + B = \frac{1}{2}a_A t^2 + B$$

- Détermination de la Constante d'Intégration à l'aide des Conditions Initiales :

La voiture A est initialement au point O origine de l'axe, soit : $x_A(t=0) \underbrace{=}_{\text{C.I.de l'enonce}} 0 \underbrace{=}_{\substack{formule \\ \text{à } t=0}} B,$

Conclusion : $x_A(t) = \frac{1}{2}a_A t^2$ et $\boxed{x_A(\tau_A) = \frac{1}{2}a_A {\tau_A}^2 = \frac{1}{2}\frac{{V_A}^2}{a_A}}$

A.N. : $x_A(\tau_A) = \frac{1}{2}\times 2 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} = 3 - \frac{2}{9} \approx \mathbf{2,8\ m < L = 15\ m}$

De même, on a $x_B(t) = \int a_B t dt + C = \frac{1}{2}a_B t^2$ soit $\boxed{x_B(\tau_B) = \frac{1}{2}a_B {\tau_B}^2 = \frac{1}{2}\frac{{V_B}^2}{a_B}}$

A.N. : $x_B(\tau_B) = \frac{1}{2}\times 3 \times \left(\frac{25}{27}\right)^2 \approx \frac{3}{2}\times 0{,}9^2 \approx \mathbf{1,3\ m < L = 15\ m}$

Au moment du changement de phase, aucune des deux voitures n'a franchi la ligne d'arrivée ; elles atteignent donc leurs vitesses limites pendant la course.

17. Loi horaire x_A lors de la deuxième phase du mouvement : cette 2ème phase commence à partir de l'instant τ_A, soit de l'instant où la voiture A atteint sa vitesse limite V_A, avec ensuite un mouvement rectiligne uniforme à cette vitesse.

On a alors $x_A(t) = \int v_A(t)dt + D = V_A t + D$ avec D constante d'intégration

- Détermination de la Constante d'Intégration à l'aide des Conditions Initiales :

La voiture A est au début de la 2ème phase au point $x_A(\tau_A) = \frac{1}{2}a_A\tau_A^2 = \frac{1}{2}\frac{V_A^2}{a_A}$, soit :

$$x_A(\tau_A) \underbrace{=}_{\substack{C.I.de\\ l'enonce}} \frac{1}{2}\frac{V_A^2}{a_A} \underbrace{=}_{\substack{formule\\ \text{à } t=0}} V_A\tau_A + D = \frac{V_A^2}{a_A} + D = \frac{1}{2}\frac{V_A^2}{a_A} \qquad \text{soit} \quad D = -\frac{1}{2}\frac{V_A^2}{a_A}$$

Conclusion : $\forall t > \tau_i$ $\boxed{x_A(\boldsymbol{t}) = V_A t - \frac{1}{2}\frac{V_A^2}{a_A}}$ de même : $\boxed{x_B(t) = V_B t - \frac{1}{2}\frac{V_B^2}{a_B}}$

18. Afin de savoir qui gagne la course, il faut chercher quel est le temps t_{fi} où la voiture i franchit la ligne d'arrivée, soit atteint la position $x_i(t_{fi}) = L$. On a donc :

$$x_A(t_{fA}) = V_A t_{fA} - \frac{1}{2}\frac{V_A^2}{a_A} = L \qquad \text{soit} \qquad t_{fA} = \frac{1}{V_A}\left(L + \frac{1}{2}\frac{V_A^2}{a_A}\right) = \boxed{\frac{L}{V_A} + \frac{1}{2}\frac{V_A}{a_A} = t_{fA}}$$

A.N. : $t_{fA} = \frac{15}{10} \times 3 + \frac{1}{2} \times \frac{10}{3\times2} = 4{,}5 + \frac{5}{6} \approx 4{,}5 + 0{,}9 \approx \boldsymbol{5{,}4\ s = t_{fA}}$

De la même manière, $\boxed{\frac{L}{V_B} + \frac{1}{2}\frac{V_B}{a_B} = t_{fB}}$

A.N. : $t_{fB} = \frac{15}{25} \times 9 + \frac{1}{2} \times \frac{25}{9\times3} = \frac{3}{5} \times 9 + \frac{1}{2} \times \frac{25}{27} \approx 6 + 0{,}4 \approx \boldsymbol{6{,}4\ s = t_{fB}}$

$\boldsymbol{t_{fB} > t_{fA}}$, c'est Anas qui gagne la course.

19. Pour que Bérénice gagne la course, il faut une longueur de piste L^*telle que : $\boldsymbol{t_{fB} < t_{fA}}$, soit

$$\frac{L^*}{V_B} + \frac{1}{2}\frac{V_B}{a_B} < \frac{L^*}{V_A} + \frac{1}{2}\frac{V_A}{a_A} \qquad \text{soit} \qquad \frac{L^*}{V_B} - \frac{L^*}{V_A} < \frac{1}{2}\frac{V_A}{a_A} - \frac{1}{2}\frac{V_B}{a_B} \qquad \text{ou encore} \quad L^*\left(\frac{1}{V_B} - \frac{1}{V_A}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{V_A}{a_A} - \frac{V_B}{a_B}\right)$$

$$L^*\left(\frac{V_A - V_B}{V_A V_B}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{V_A}{a_A} - \frac{V_B}{a_B}\right)$$

$$\boxed{L^* < \frac{1}{2}\left(\frac{V_A}{a_A} - \frac{V_B}{a_B}\right)\frac{V_A V_B}{V_A - V_B}}$$

A.N. : $L^* < 6{,}2\ m$

Remarque : il est cohérent de trouver une longueur inférieure à $L = 15\ m$: la voiture de Bérénice accélère plus vite que celle d'Anas mais a une vitesse limite plus faible, son avantage se perd donc avec la distance et elle a intérêt à courir sur des courtes distances.

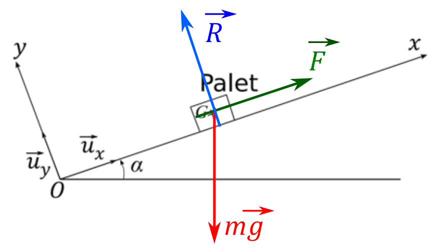
PROBLEME N°3 : ETUDE DU MOUVEMENT D'UN PALET SUR LA GLACE

(CCINP TSI 2020)

1. Le système étudié est le palet supposé ponctuel, étudié dans le référentiel terrestre considéré galiléen.

Durant la propulsion, le palet est soumis à :

- **son poids**, $m\vec{g}$, vertical vers le bas
- **la réaction de la glace**, $\vec{R}$, perpendiculaire au plan incliné tant que les frottements sont négligés
- **la force de propulsion**, $\vec{F}$, exercée par la crosse



2. Principe fondamental de la dynamique appliqué au palet de masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}$$

Avec dans la base $\mathcal{B}(\overrightarrow{u_x};\ \overrightarrow{u_y})$: $\underbrace{\vec{a} = \begin{vmatrix} a \\ 0 \end{vmatrix}}_{\substack{mouvement\ rectiligne \\ selon\ (Ox)}}$; $m\vec{g} = \begin{vmatrix} -mg\sin(\alpha) \\ -mg\cos(\alpha) \end{vmatrix}$; $\vec{R} = \begin{vmatrix} 0 \\ R \end{vmatrix}$ et $\vec{F} = \begin{vmatrix} F \\ 0 \end{vmatrix}$

Projection sur l'axe $(\overrightarrow{u_x})$, avec a la norme de l'accélération : $ma = -mg\sin\alpha + 0 + F$

D'où la force de propulsion : $F = ma + mg\sin\alpha$

$$\boxed{\boldsymbol{F = m(a + g\sin\alpha)}}$$

---

3. Mouvement uniformément accéléré :

$$\boldsymbol{a = cte}$$

La vitesse est nulle initialement, et on suppose qu'après $\Delta t = 0{,}5\ s$ elle vaut $v_{WR} = 50\ m.s^{-1}$.

L'accélération étant constante, par intégration par rapport au temps :

$$v(t) = \int a(t)dt + cte = at + cte$$

D'où $$v(t_2) - v(t_1) = a(t_2 - t_1)$$

Soit ici $a = \frac{v_{WR} - 0}{\Delta t}$ et donc

$$\boxed{\boldsymbol{F = m\left(\frac{v_{WR}}{\Delta t} + g\sin\alpha\right)}}$$

A.N. : $F = 0{,}16 \times \left(\frac{50}{0{,}5} + 10 \times \sin(20°)\right) = 0{,}16 \times (100 + 10 \times 0{,}34) = 0{,}16 \times (103{,}4) = 16 \times 1{,}034$

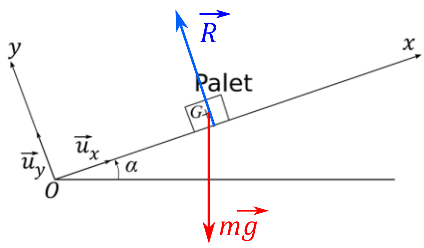
$$\boldsymbol{F \approx 16\ N}$$

---

4. Le palet est maintenant soumis à deux forces seulement.

Le palet est en mouvement vers le haut, **le poids a donc un caractère résistant** $(m\vec{g} \cdot \vec{v} < 0)$.

La réaction de la glace est sans effet car à tout instant orthogonale au mouvement $(W = \vec{R} \cdot \vec{v} = 0)$: son travail est toujours nul, elle est donc sans conséquence sur l'énergie du système.



---

5. On reprend la projection du principe fondamental de la dynamique sur (Ox) en l'absence de propulsion :

$$ma = -mg\sin\alpha$$

d'où pour l'accélération du palet : $\underbrace{\boldsymbol{\ddot{x} = a}}_{\substack{\boldsymbol{mouvement\ rectiligne} \\ \boldsymbol{selon\ (Ox)}}} = \boldsymbol{-g\sin\alpha} = \frac{d\dot{x}}{dt} = cte$

Cette accélération est constante, mouvement rectiligne uniformément accéléré.

En intégrant par rapport au temps :

$$\dot{x} = -gt\sin\alpha + cte$$

Détermination de la constante d'intégration à l'aide des conditions initiales :

vitesse initiale $v(t = 0) \underbrace{=}_{\substack{C.I. \\ \text{énoncé}}} v_0 = v_{WR} \underbrace{=}_{\substack{formule \\ \text{à } t=0}} cte$, donc

$$\boldsymbol{\dot{x} = -gt\sin\alpha + v_0}$$

En intégrant à nouveau par rapport au temps :

$$x = -\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha + v_0 t + cte$$

Détermination de la constante d'intégration à l'aide des conditions initiales : Le palet est initialement à l'origine, soit $x(t = 0) \underbrace{=}_{\substack{C.I. \\ \text{énoncé}}} 0 \underbrace{=}_{\substack{formule \\ \text{à } t=0}} cte$ donc

$$\boxed{\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha + v_0 t}}$$

---

6. Arrêt du palet à l'instant t_{ar} tq $\dot{x}(t_{ar}) = 0 = -g t_{ar} \sin\alpha + v_0$

$$\boldsymbol{t_{ar} = \frac{v_0}{g \sin\alpha}}$$

Distance parcourue : correspond à la position à l'instant t_{ar}, soit

$$d = x(t_{ar}) = -\frac{1}{2} g t_{ar}^2 \sin\alpha + v_0 t_{ar}$$

$$d = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g \sin\alpha}\right)^2 \sin\alpha + v_0 \frac{v_0}{g \sin\alpha}$$

On obtient bien l'expression donnée

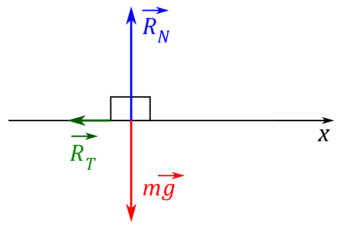
$$\boxed{\boldsymbol{d = \frac{v_0^2}{2g \sin\alpha}}}$$

---

7. Les forces de **frottements** ne sont **pas conservatives, leur travail n'est pas nul sur un parcours fermé** (il est toujours négatif), et l'expression du travail entre deux points dépend du chemin suivi (longueur du trajet), il ne peut donc s'exprimer comme la variation d'une fonction énergie potentielle .

---

8. Le palet est à présent soumis à trois forces, représentées ci-contre.



Principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R_N} + \vec{R_T}$$

Avec dans la base $\mathcal{B}(\vec{u_x}; \vec{u_y})$:

$$\underbrace{\vec{a} = \begin{vmatrix} a \\ 0 \end{vmatrix}}_{\substack{mouvement\ rectiligne \\ selon\ (Ox)}} \quad ; \quad m\vec{g} = \begin{vmatrix} 0 \\ -mg \end{vmatrix} ; \quad \vec{R_N} = \begin{vmatrix} 0 \\ R_N \end{vmatrix} ; \quad \vec{R_T} = \begin{vmatrix} -R_T \\ 0 \end{vmatrix}$$

Projection suivant (Oy) : $\quad 0 = -mg + R_N$

Donc $\quad \boldsymbol{R_N = mg}$

Le palet étant en mouvement, $\quad \boldsymbol{R_T = f_D\, R_N} \quad$ avec $f_D = 0{,}050$ puisque le palet est en caoutchouc.

Soit $\quad R_T = f_D\, mg \quad$ et

$$\boldsymbol{\vec{R_T} = -f_D\, mg\, \vec{u_x}}$$

Travail élémentaire de $\vec{R_T}$:

$$\delta W_{\vec{R_T}} = \vec{R_T} \cdot d\vec{M} = -f_D\, mg\, dx$$

Le travail de $\vec{R_T}$ est donc

$$W_{\vec{R_T}} = \int \vec{R_T} \cdot d\vec{M} = \int -f_D\, mg\, dx$$

$$\boxed{\boldsymbol{W_{\vec{R_T}} = -f_D\, mg\, x}}$$

---

9. On applique dans le référentiel terrestre supposé galiléen le théorème de l'énergie mécanique au palet entre l'instant initial et l'instant où il s'arrête :

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = W_{nc}$$

La composante normale de travaille pas, étant à tout instant normale au déplacement

Le poids dérive de l'énergie potentielle de pesanteur : $E_{pp} = +mgz + cte$ avec z altitude

La seule force non conservative est la composante tangentielle de la réaction. Finalement :

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = W_{nc} = W_{\vec{R_T}} = \Delta E_c + \Delta E_{pp}$$

L'énergie potentielle de pesanteur est constante puisque le mouvement est horizontal : $\Delta E_{pp} = 0$ soit

$$\Delta E_m = \Delta E_c = W_{\overrightarrow{R_T}} = -f_D\, mg\, x$$

Donc, l'état final correspondant au palet arrêté avec une vitesse nulle :

$$E_{cf} - E_{ci} = -f_D\, mg\, x_f$$

$$0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -f_D\, mg\, x_f$$

La distance nécessaire à l'arrêt du palet est

$$\boxed{\boldsymbol{x_f = \frac{v_0^2}{2 f_D g}}}$$

Remarque : Validation de la formule *: elle est homogène, la distance augmente avec la vitesse initiale et diminue lorsque les frottements augmentent*

Application numérique : $x_f = \frac{50^2}{2\times 0{,}05\times 10} = \frac{50^2}{1}$ $\boldsymbol{x_f = 2500\, m}$

Il faut 2,5 km au palet pour s'arrêter.

La longueur d'une patinoire est $\ell = 60\, m$. Soit N le nombre de fois où la patinoire est parcourue avant que le palet ne s'arrête :

$$\boxed{\boldsymbol{N = \frac{x_f}{\ell}}} = \frac{2500}{60} = \frac{125}{3} \approx 42$$

Le palet pourrait parcourir 42 longueurs de patinoires avant de s'arrêter.

Remarque : Il est donc légitime de négliger les frottements subis par le palet.