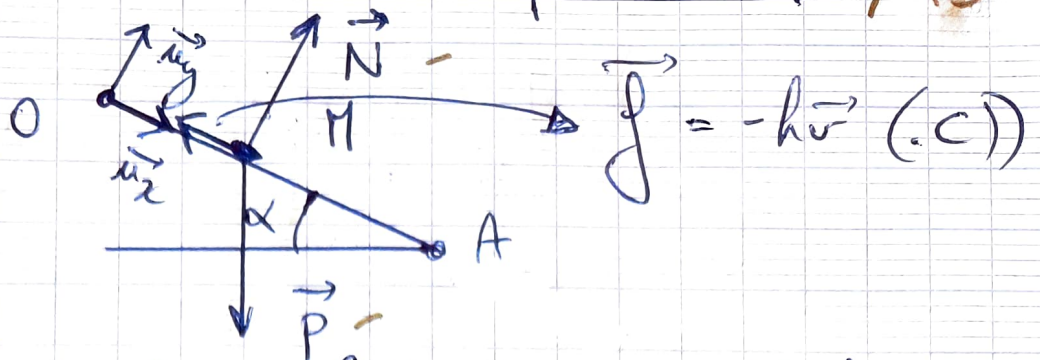


Problème : Solide sur un plan incliné /43

A/1)

2



(4)

2

$\vec{P} = m\vec{g}$ - Poids du point matériel.
 $\vec{N}$ - Normale au plan (réaction du plan, en l'absence de frottement).

2

2) $\vec{P} = mg \sin \alpha \vec{u}_x - mg \cos \alpha \vec{u}_y$

(4)

2

$\vec{N} = N \vec{u}_y$

3) Mouvement unidirectionnel suivant l'axe x, imposé par le plan.

(2)

4) Référentiel : Terre suppose galiléen.
 Système : point matériel.
 PFD :

1

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

(5)

1

$\Rightarrow mg \sin \alpha \vec{u}_x - mg \cos \alpha \vec{u}_y + N \vec{u}_y = m(\ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y)$
 Projection sur x :
 $mg \sin \alpha = m\ddot{x}$

1

$\ddot{x} = g \sin \alpha$ - (en) mouvement uniformément accéléré.

5) On intègre $\ddot{x}$ par rapport au temps :
 $\dot{x} = g \sin \alpha t + c_0$

1

1 CI : $\dot{x}(0) = 0$ - (aucune vitesse initiale).

Donc :

$$\dot{x}(0) = \underbrace{-g \sin \alpha \times 0}_{\text{maths}} + \underbrace{cte}_{\text{CI}} = 0$$

D'où :

$$cte = 0$$

On a donc :

$$\underline{\dot{x} = \dot{x}(t) = +g \sin \alpha t}$$

On intègre de nouveau par rapport au temps :

$$x(t) = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 + cte'$$

1 CI : $x(0) = 0$

D'où :

$$x(0) = \frac{1}{2} g \sin \alpha (0)^2 + \underbrace{cte'}_{\text{CI}} = 0$$

D'où :

maths

$$cte' = 0$$

On a donc :

$$\underline{x = x(t) = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2}$$

$$\textcircled{1} \text{B} / \text{C} \quad \underline{h = L \cdot \sin \alpha}$$

$$\text{AN : } h = 10 \times \sin(30^\circ) = 10 \times \frac{1}{2} = \underline{5 \text{ m}}$$

7) Axe vertical gradué vers le haut.

1

$$\Rightarrow E_p = +mgz + cte$$

Condition

limite :

$$E_p(A) = \underbrace{+mg h_A}_{\text{maths}} + \underbrace{cte}_{\text{CL}} = 0$$

1

$$\text{D'où : } cte = 0$$

Solide sur un plan incliné (version finale)

1) 8) $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

1 2) $E_m(0) = E_m(A)$
 $E_c(0) + E_{pp}(0) = E_c(A) + E_{pp}(A)$
 $\frac{1}{2}mv^2(0) + 0 = \frac{1}{2}mv^2(A) - mgh$
 Or: $v(0) = 0$
 On obtient:

$0 = \frac{1}{2}mv^2(A) - mgh$
 $mgh = \frac{1}{2}mv^2(A)$

$v(A) = \sqrt{2gh}$

7) Axe vertical gradué vers le bas:

$\Rightarrow E_{pp} = -mgz + cte$
 Condition limite:

$E_{pp}(0) = -mg \times 0 + cte = 0$

Donc: $cte = 0$
 On obtient:

$E_{pp}(z) = -mgz$

Donc:

$E_{pp}(A) = -mgh$

19) A.N: $v(A) = \sqrt{2 \times 10 \times 5} = \sqrt{100} = 10 \text{ m.s}^{-1}$

Homogénéité:

$[v(A)] = [\sqrt{2gh}]$

$= (m.s^{-2} \cdot m)^{\frac{1}{2}} = (m^2.s^{-2})^{\frac{1}{2}} = m.s^{-1}$

$$\textcircled{4} \begin{array}{l} 10) \\ 2 \end{array} W(\vec{P})_{0 \rightarrow A} = \vec{P} \cdot \vec{OA} = mg \cdot L \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = mg \underbrace{L \sin \alpha}_h$$

$$2 \quad W(\vec{N})_{0 \rightarrow A} = 0 \quad \text{car } \vec{N} \perp \text{ mouvement}$$

$$\begin{array}{l} 11) \text{ Th. } E_c \\ 1 \end{array} E_c(A) - E_c(0) = \sum W(\vec{F})_{0 \rightarrow A}$$

$$\frac{1}{2} m v(A)^2 - \frac{1}{2} m \cancel{v(0)^2} = mgh$$

On trouve :

$$\textcircled{2} \quad \underline{v(A) = \sqrt{2gh}}$$

$$1 \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2(A)$$

$$1 \quad \Rightarrow v^2(A) = 2gh \Rightarrow v(A) = \sqrt{2gh}$$

$$1. \quad A.N.: v(A) = \sqrt{2 \times 10 \times 5} = \sqrt{100} = 10 \text{ m.s}^{-1}$$

Homogénéité:

$$[v(A)] = [\sqrt{2gh}]$$

$$= \left(\frac{\text{m.s}^{-2} \cdot \text{m}}{1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} = \text{m.s}^{-1}$$

① C) 12) Voir schéma.

① 13) $\vec{P} = -h\vec{v} = -h \cdot \dot{x} \vec{u}_x$

14) PFD (même méthode qu'en 4):

$$mg \sin \alpha \vec{u}_x - mg \cos \alpha \vec{u}_y + N \vec{u}_y - h \dot{x} \vec{u}_x = m(\ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y)$$

Projection sur x:

$$mg \sin \alpha - h \dot{x} = m \ddot{x}$$

ou

$$\underline{\underline{m \ddot{x} + h \dot{x} = mg \sin \alpha}}$$

On ne sait pas intégrer cette eq. diff. pour l'instant.

Problème

142

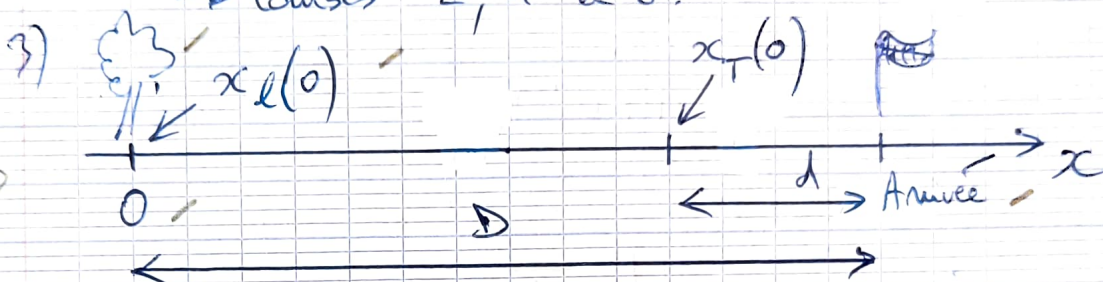
1) Référentiel Terre suppose galiléen car durées très inférieures à la période de rotation de la Terre.

2) Tatie : MRU

→ Courbes 1, 3 et 5

même MRUA au début

→ Courbes 2, 4 et 6.



$$x_T(0) = D - d = 99,5 \text{ m}$$

$$\dot{x}_T(0) = v_1$$

4) le mouvement de la Tatie est uniforme

$$\dot{x}_T(t) = \dot{x}_T(0) = v_1$$

On intègre par rapport au temps :

$$x_T(t) = v_1 t + cte_1$$

CI : $x_T(0) = cte_1 = D - d$

D'où :

$$x_T(t) = v_1 t + D - d$$

5) A $t = t_T$:

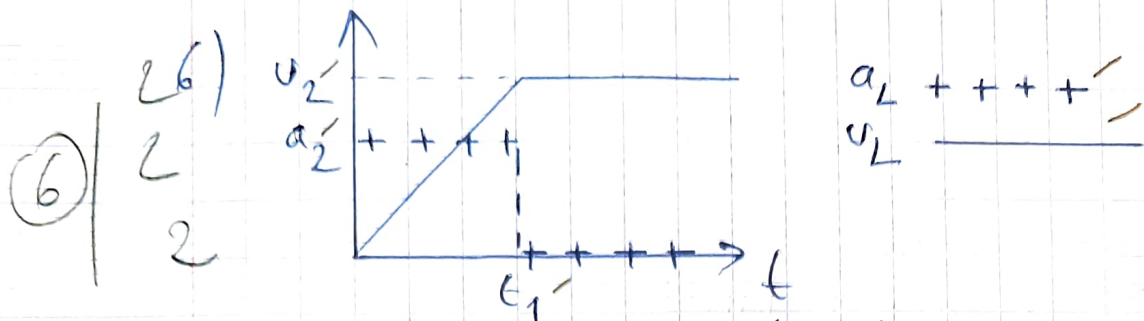
$$x_T(t_T) = v_1 t_T + D - d = \cancel{D} - d = \cancel{D}$$

$$\Leftrightarrow v_1 \cdot t_T = d$$

d'où : $t_T = \frac{d}{v_1} = \frac{9,50}{\left(\frac{0,36}{3,6}\right)} = 5 \text{ s}$

$\Delta v_1 = 0,36 \text{ km.h}^{-1}$

$$= \frac{0,36}{3,6} \text{ m.s}^{-1} = 0,1 \text{ m.s}^{-1}$$



7) $x_L(0) = 0$ (départ à $x = 0$)
 $\dot{x}_L(0) = v_L(0) = 0$ (départ "arrêt")

Accélération du lièvre:

Mouvement Rectiligne Uniformément Accéléré (MRUA)

$a_L(t) = a_2$

On intègre par rapport au temps:

$v_L(t) = a_2 t + cte_2$

CI: $v_L(0) = 0$ d'où $cte_2 = 0$

D'où: $v_L(t) = a_2 t$

On intègre de nouveau par rapport au temps:

$x_L(t) = \frac{1}{2} a_2 t^2 + cte_3$

CI: $x_L(0) = 0 \Rightarrow cte_3 = 0$

D'où: $x_L(t) = \frac{1}{2} a_2 t^2$

8) A $t = t_1$, $v_L(t_1) = v_2$
d'où:

$v_2 = a_2 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_2}{a_2}$

A.N.:

$t_1 = \frac{\left(\frac{72}{36}\right)}{(5,0)} = \frac{20}{5} = 4 \text{ s}$

Donc :

$$x_1 = x_2(t_1) = \frac{1}{2} a_2 t_1^2 = \frac{1}{2} \times 5,0 \times 4^2 = \underline{40 \text{ m}}$$

$$\begin{aligned} 9) \quad t_L &= t_1 + t_2 \\ &= t_1 + \frac{D - x_1}{v_2} \end{aligned}$$

$$t_L = 4 + \frac{100 - 40}{\left(\frac{72}{3,6}\right)} = 4 + \frac{60}{20} = \underline{7 \text{ s}}$$

$$\begin{aligned} 10) \quad t_t &= 5 \text{ s} \\ t_L &= 7 \text{ s} \end{aligned}$$

la Tatue arrive avant le lièvre,

le lièvre arrive avec $(t_L - t_t) = 2 \text{ s}$ de retard.

la table est renversée !

TSI CCP 2013 1

(6) 3

1. $\vec{P}' = m\vec{g}' = -mg\vec{u}_z$ - Verticale, vers le bas -
 $\|\vec{P}'\| = mg$

3

$\vec{T} = -k(z - l_0)\vec{u}_z$ - Verticale, sens changeant
 $\|\vec{T}'\| = k|z - l_0|$

1

2. Equilibre $\sum \vec{F}' = \vec{0}$
 $\vec{P}' + \vec{T}' = \vec{0}$

(3) 1

$-mg - k(z_e - l_0) = 0$
 $-mg - kz_e + kl_0 = 0$
 $-mg + kl_0 = kz_e$

1

$-\frac{mg}{k} + l_0 = z_e$ (1)

1

3. $\sum \vec{F} = m\vec{a}' = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

1

$-mg\vec{u}_z - k(z - l_0)\vec{u}_z = m\ddot{z}\vec{u}_z$

1

$-mg\vec{u}_z - k(z - z_e + z_e - l_0)\vec{u}_z = m\ddot{z}\vec{u}_z$

1

$-mg - k(z_e - l_0) - k(z - z_e) = m\ddot{z}$
 $= 0$ d'après (1)

(4)

$-kz + kz_e = m\ddot{z}$

$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_e$ (2)

3

4. $z(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + z_e$

1 1

(7)

1 1

A.N: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10^5}{10^{-3}}} = 10 \text{ rad.s}^{-1}$
 $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,63 \text{ s}$

$$7. \quad \|\vec{F}\| = |k| \|\vec{v}\|$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 N $m.s^{-1}$

(2)

k en $N.s.m^{-1}$
 cad $kg.m.s^{-2}.s.m^{-1}$
 cad $kg.s^{-1}$

$$8. \quad \vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$$

$$\vec{T} = -k(z - l_0)\vec{u}_z$$

} Déjà évalué (4)

$$\vec{F} = -h\vec{v} = -h\dot{z}\vec{u}_z, \text{ verticale, de sens opposé à la vitesse, } \|\vec{F}\| = h|\dot{z}|$$

Véhicule à l'équilibre

$\Rightarrow$ même bilan qu'en 2).

9. En ajoutant $\vec{F}$ au bilan de 3), on obtient.

(3)

$$-k(z - z_e) - h\dot{z} = m\ddot{z}$$

$$m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = kz_e$$

$$\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_e$$

10.

Equation caractéristique:

$$r^2 + \frac{h}{m}r + \frac{k}{m} = 0$$

$$\Delta = \frac{h^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}$$

1^{er} cas: $\Delta > 0 \quad \frac{h^2}{m^2} > 4\frac{k}{m} \Leftrightarrow h > 2\sqrt{km}$
 Régime aperiodique (voir Q.11)

Problème ouvert / 15

Monieur (+) van = Véhicule A
Madame = Véhicule B

Chaque véhicule a son propre MRU.

Conditions initiales :

$$x(0) = 0 \leftarrow x=0 = \text{Ponton de la pause}$$

$t=0$ = fin de la pause

Equation du véhicule A :

$$x_A = v_A \left(t + \frac{1}{4} \right)$$

$$\left| \begin{array}{l} v_A = 90 \text{ km/h} \\ x_A \text{ en km, } t \text{ en h.} \end{array} \right.$$

Temps de pause

Equation du véhicule B :

$$x_B = v_B \cdot t$$

$$\left| \begin{array}{l} v_B = 120 \text{ km/h} \\ x_B \text{ en km, } t \text{ en h.} \end{array} \right.$$

1) Le véhicule A rejoint le véhicule B lorsque :

$$\Leftrightarrow x_A = x_B$$

$$\Leftrightarrow v_A \left(t + \frac{1}{4} \right) = v_B \cdot t$$

$$\Leftrightarrow v_A \cdot t + \frac{1}{4} v_A = v_B \cdot t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} v_A = (v_B - v_A) \cdot t$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{v_A}{(v_B - v_A) \cdot 4} = \frac{90}{(120 - 90) \times 4} = \frac{90}{30 \times 4} = \frac{90}{120} = \frac{3}{4} \text{ h} = t_f$$

Madame rejoint Monieur en $\underline{\underline{3/4 \text{ h} = t_f}}$

* Redac / 5
* Calculs (+) résultats du 1) / 5

* Calculs (+) résultats du 2) / 5

2) Distance parcourue :

$$x_A(t_f) = v_A \left(t_f + \frac{1}{4} \right)$$

$$= 90 \times \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) = \underline{90 \text{ km}}$$

(a)

$$x_B(t_f) = v_B \cdot t_f$$
$$= 120 \times \frac{3}{4} = \underline{90 \text{ km}}$$