M3 E2–SYSTEMES DU PREMIER ORDRE

Programme ATS

2. Lois de Newton	
Mouvement vertical dans le champ de pesanteur uniforme en présence de frottement fluide.	Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la vitesse dans le cas d'une force de frottement proportionnelle à la vitesse. Déterminer la vitesse limite. Identifier et interpréter le temps caractéristique d'évolution.
	Déterminer, si elle existe, la vitesse limite dans un cas où la force de frottement n'est pas proportionnelle à celle de la vitesse. **Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure de frottements fluides.**

13. Circuits linéaires en régime transitoire	
Charge et décharge d'un condensateur dans un circuit RC série. Temps caractéristique.	Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes d'un condensateur dans le cas de sa charge par une source idéale de tension et dans le cas de sa décharge. Déterminer l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire dans un circuit RC série. **Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un circuit RC série et analyser ses caractéristiques. Confronter les résultats expérimentaux aux résultats d'un modèle.**
Energie stockée par un condensateur.	Démontrer l'expression de l'énergie stockée par un condensateur en fonction de sa charge ou de la tension entre ses bornes. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental permettant de mesurer l'énergie emmagasinée par un condensateur.**
Établissement et rupture du courant dans un circuit RL série. Temps caractéristique.	Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes d'une bobine dans le cas de l'établissement et de la rupture du courant. Déterminer l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire dans un circuit RL série. **Mesurer la valeur de l'inductance propre d'une bobine.**
Energie stockée par une bobine.	Démontrer l'expression de l'énergie stockée dans une bobine d'inductance connue. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental permettant de mesurer l'énergie emmagasinée par une bobine.**
Circuit RLC série en régime dépendant du temps. Analogie mécanique	Établir et résoudre l'équation d'évolution de la tension aux bornes du condensateur lors de sa charge ou de sa décharge, dans les différents régimes possibles. Écrire l'équation différentielle en faisant apparaitre la pulsation propre et le facteur de qualité. Décrire et exploiter les analogies avec l'oscillateur harmonique mécanique amorti. Identifier les paramètres et grandeurs analogues.

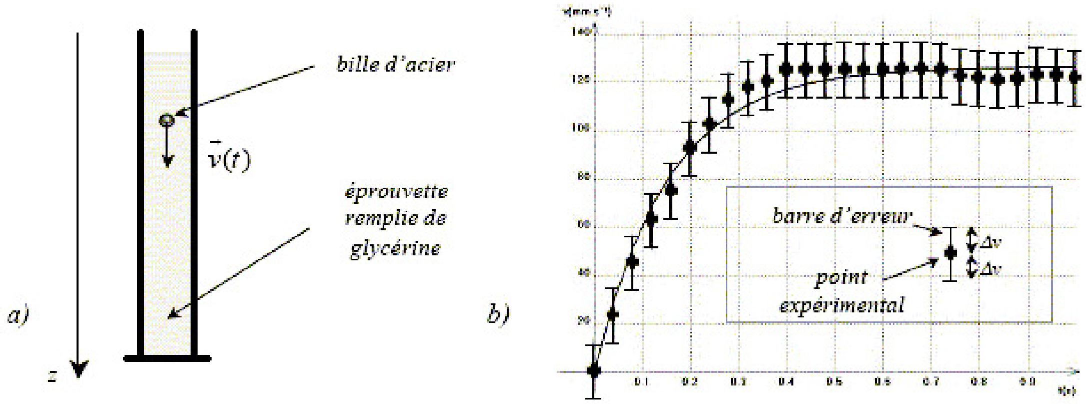
I) EXEMPLE en MECANIQUE : CHUTE VERTICALE AVEC FROTTEMENT FLUIDE

I)1) Expérience

Une bille est lâchée sans vitesse initiale dans un fluide visqueux.

https://www.youtube.com/watch?v=wp3cptyuwGI

Enregistrement de la **vitesse en fonction du temps $v = f(t)$:**



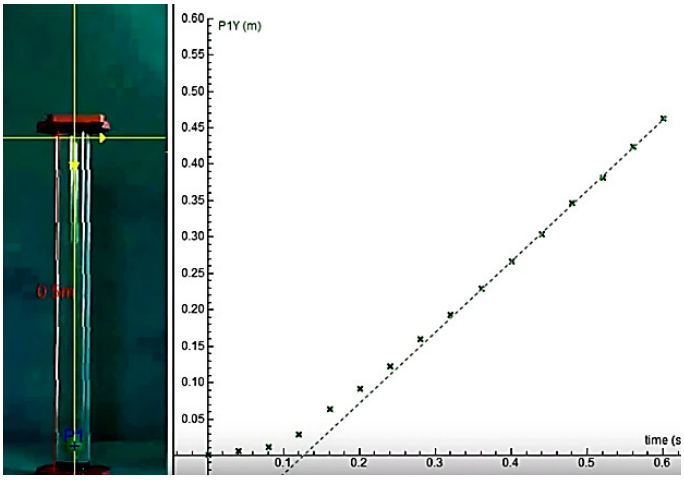
Observations :

- La bille accélère (sa vitesse v augmente) puis atteint une vitesse limite constante,
- Après un **régime transitoire** (v variable), le **régime permanent** peut être décrit par une vitesse $v = cte$ de la bille, qui correspond un Mouvement de type Rectiligne Uniforme (**MRU**),
- L'allure de $v = f(t)$ est de type **exponentiel** puis **constant** (sera mis en équation par la suite).

Enregistrement de la **position en fonction du temps $z = f(t)$** :

On distingue de nouveau :

- Un **régime transitoire**, pendant lequel $z = f(t)$ est de forme exponentielle,
- Un **régime permanent** de type MRU, pendant lequel $z = f(t)$ est linéaire.



I)2) Bilan des forces appliquées sur la bille

Schéma : (axe z orienté vers le bas)

Système : Bille, assimilée à un point matériel M, de masse *m*

Référentiel : Terrestre, supposé galiléen

Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (**BAME**) appliquées sur la bille :

- Poids :
- Poussée d'Archimède :

Poussée d'Archimède : Un système immergé dans un fluide subit de la part de ce fluide une force verticale vers le haut égale à l'opposé du poids du volume de fluide déplacé.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\Pi_a} = -\rho_{fluide}.V.g.\overrightarrow{u_z}}$$

- Force de frottement du fluide sur la bille :

$$\vec{f} = -h.\overrightarrow{v_{M/fluide}} = -h.\overrightarrow{v_{M/R}} = \boldsymbol{-h.\vec{v}}$$

Remarque sur la poussée d'Archimède :

Poids : $\vec{P} = \rho_{solide}.V.g.\overrightarrow{u_z}$

$\overrightarrow{\Pi_a} = -\rho_{fluide}.V.g.\overrightarrow{u_z}$

⇨ **Poids apparent** : $\boldsymbol{\overrightarrow{P_a} = \vec{P} + \overrightarrow{\Pi_a}} =$

I)3) Equation différentielle de la vitesse de la bille

a) A partir du PFD, établir l'équation différentielle de la vitesse de la bille ; on négligera la poussée d'Archimède.

PFD : $\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{extsurM}} = \boldsymbol{m}.\overrightarrow{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{M}\,/\,\boldsymbol{R}}}$

La vitesse v est définie par une équation différentielle du premier ordre, car regroupant la fonction $v(t)$ et sa dérivée par rapport au temps $\frac{dv}{dt}(t)$.

b) A partir du Théorème de la puissance mécanique, retrouver l'équation différentielle précédente.

Force conservative : $\vec{P} = mg\overrightarrow{u_z}$, associée à l'énergie potentielle de pesanteur $E_{PP} = -mgz + cte$ (axe z orienté vers la bas)

Force non conservative : force de frottement fluide $\vec{f} = -h.\overrightarrow{\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{M/R}}} = -h.\vec{v}$

dont la puissance est $P(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v} = -h.\vec{v} \cdot \vec{v} = -h.v^2$

Energie cinétique de la bille : $E_{c,M/R} = \frac{1}{2}m{v_{M/R}}^2 = \frac{1}{2}mv^2$

Théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}(E_C + E_P) = \sum P_{Forces\ non\ cons}$$

II) GENERALISATION : EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE

II)1) Forme canonique des équations du 1er ordre à coefficients constants

Les équations du 1er ordre à coefficients constants se présentent sous la forme

$$a\frac{dy(x)}{dx} + by(x) = f(x)$$

où a et b sont des coefficients **constants** et $y(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions quelconques de la variable x.

Forme canonique : s'obtient en ramenant à 1 le coefficient du terme de plus haut degré :

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}t} + \frac{b}{a}y(x) = \frac{1}{a}f(x)$$

En physique, il s'agit usuellement d'équations différentielles par rapport à la variable de temps, soit :

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{b}{a}y(t) = \frac{1}{a}f(t)$$

On pose : $\tau = \frac{a}{b}$

Par analyse dimensionnelle de l'équation différentielle précédente, on a bien $[\tau] = s$: τ est homogène à un temps.

C'est une **constante de temps** ou un **temps caractéristique** du phénomène physique étudié.

La forme canonique de l'équation différentielle est donc : $\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}y(t) = \frac{1}{a}f(t)$

II)2) Résolution de l'équation différentielle

Dans le cas de la **bille qui chute dans un fluide**, avec frottement visqueux, l'équation différentielle obtenue est :

Il s'agit d'une **équation différentielle du 1er ordre linéaire à coefficients constants**, avec **second membre** constant.

5 étapes sont nécessaires :

a) Solution de l'équation différentielle homogène (SEH) :

On appelle équation différentielle homogène, l'équation différentielle obtenue en enlevant le second membre, soit l'équation différentielle : $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = 0$

Les solutions de cette équation différentielle homogène (SEH) sont de la forme :

$$v_H(t) = A.exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

où A est une constante qui sera déterminée à partir des conditions initiales.

Vérification :

b) **Solution particulière (SP)** de l'équation différentielle = une solution simple de l'équation différentielle, de même forme que le second membre.

c) **Solution générale (SG)** = somme de la solution de l'équation différentielle homogène (SEH) et de la solution particulière (SP).
SG = SEH + SP

Remarque : Il y une infinité de solutions mathématiques (autant que de valeurs de A), mais il y a une seule solution physique, qui est déterminée grâce aux conditions initiales.

d) **Condition(s) initiale(s)** (CI) : La connaissance de $v(0)$ ou bien $\frac{dv}{dt}(0)$ est nécessaire pour déterminer *la* **solution physique *unique***.

Considérons que la bille est lâchée sans vitesse initiale, on a donc : $\boldsymbol{v(0) = 0.}$

e) Détermination de la **constante d'intégration A** à partir des conditions initiales.

Physiquement : $v(0) = 0$

Mathématiquement : $v_G(t = 0) =$

Conclusion : la solution de l'équation différentielle s'écrit :

$\boldsymbol{v(t) =}$ avec $\boldsymbol{\tau = \frac{m}{h}}$

Homogénéités :

$[\tau] =$

$\left[\frac{mg}{h}\right] =$

Remarque : Par intégration, on obtient l'équation de $\boldsymbol{z(t)}$:

$z(t) = \int v(t).dt = \int \frac{mg}{h}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)dt$

Condition initiale : $z(0) = 0$

Mathématiquement : $z(t = 0) = \frac{m^2 g}{h^2} + B$

On en déduit : $B = -\frac{m^2 g}{h^2}$

D'où : $\boldsymbol{z(t)} =$

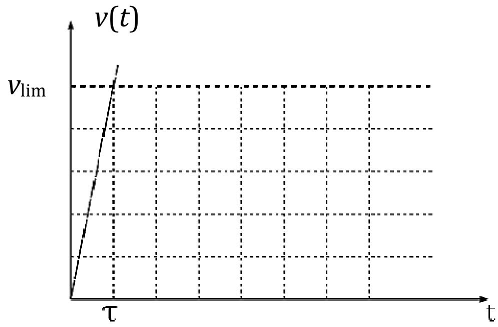
II)3) Temps caractéristiques d'un régime transitoire

■ Temps caractéristique pour un système du premier ordre

Pour tout système du 1er ordre de forme canonique $\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} y(t) = \frac{y_0(t)}{\tau}$, la grandeur $\boldsymbol{\tau}$ est homogène à un **temps** et correspond au **temps caractéristique** du système.

Dans le cas de la **bille qui chute dans un fluide** :

1) Montrer que v tend vers une valeur limite $v_{lim} = g\tau = \frac{mg}{h}$,
et exprimer en fonction de v_{lim} : $v(\tau), v(3\tau)$ et $v(5\tau)$.
2) Rechercher l'instant t_i tel que la tangente à l'origine à la courbe $v(t)$ atteigne la valeur v_{lim}(intersection de la tangente en zéro avec l'asymptote à la courbe). Tracer l'allure de la courbe.



La tangente à l'origine coupe l'asymptote à la date $t = \tau$.

Interprétation qualitative

Nous avons vu que **la tangente à l'origine** de la courbe $v(t)$ **croise l'asymptote pour $t = \tau$.** De plus, pour $t >> \tau$, $v(t)$ tend vers sa valeur limite constante, et l'accélération devient nulle.

- **Interprétation qualitative du temps caractéristique τ** (ou **temps de relaxation du système**) **:**

Grandeur indiquant **l'ordre de grandeur de la durée du phénomène transitoire,** ou encore **l'ordre de grandeur de la durée pour atteindre la valeur asymptotique (**c'est à dire le **régime permanent).**

Interprétation quantitative

- Après un temps τ, la vitesse de la bille atteint environ 63 % de sa valeur finale ;
- La vitesse atteint 99 % de sa valeur finale (ou ne diffère que de 1% de sa valeur finale) pour $t = 5\tau$.

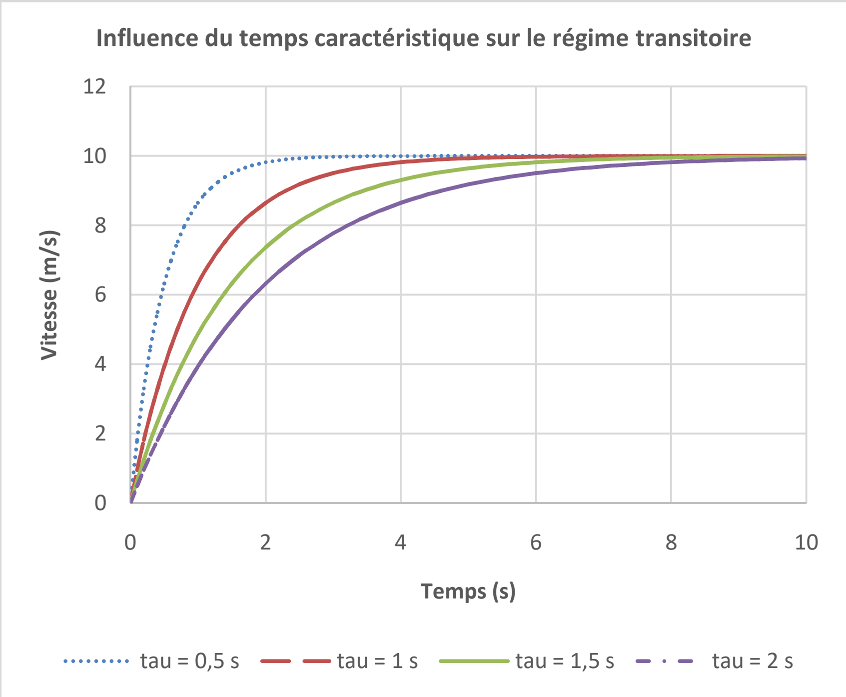
De façon générale, on appelle :

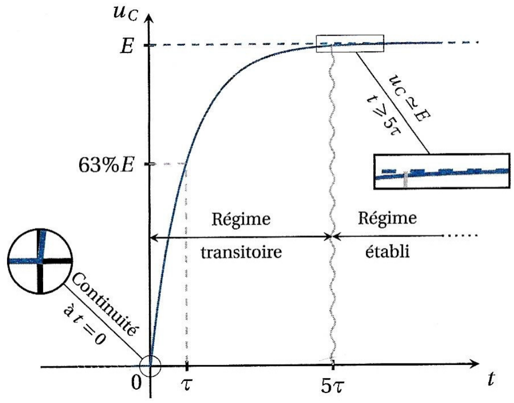
- **Temps de montée** (pour une **charge**) le temps nécessaire à la tension pour passer de 10% à 90% de sa valeur finale (on trouve ici $\tau_M \approx 2{,}2\ \tau$).

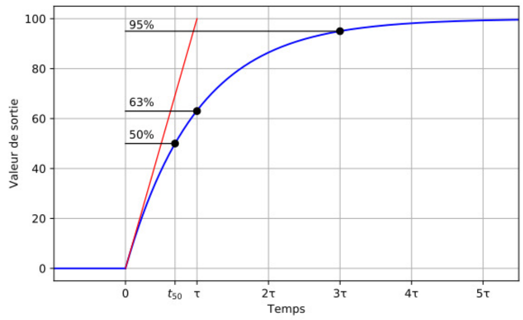
- **Temps de réponse à x%** la durée au bout de laquelle la tension étudiée ne diffère que de x% de sa valeur finale à l'équilibre(on trouve ici$t_{R\,5\%} \approx 3\tau$).

Après un temps de quelques τ, les grandeurs correspondent pratiquement à celles du régime permanent.

Allure des courbes



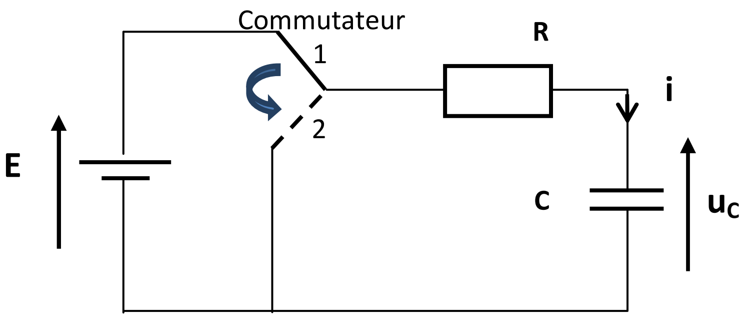




III) EXEMPLE en ELECTRICITE : CHARGE ET DECHARGE D'UN CONDENSATEUR

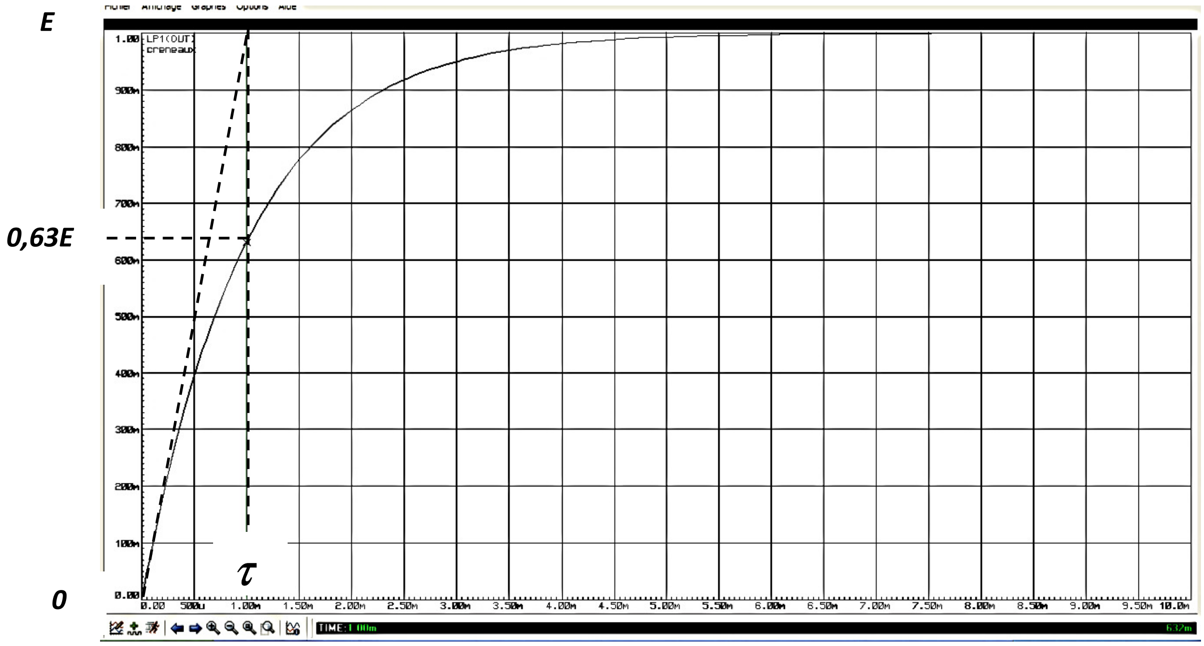
III)1) Modélisation et équation différentielle

Montage :



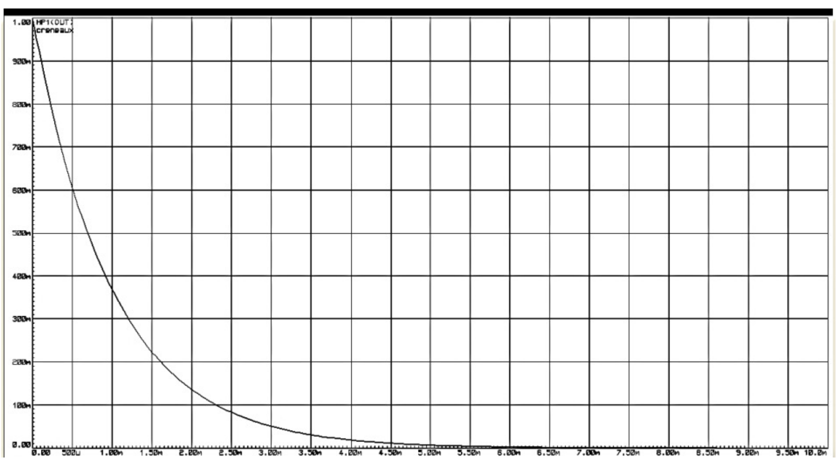
- Commutateur en **position 1** : Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ et la mettre sous forme canonique ; identifier la constante de temps τ caractéristique du régime transitoire.

u_C en fonction du temps :



- Commutateur en **position 2** : Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ et la mettre sous forme canonique.

u_C en fonction du temps :



III)2) Résolution de l'équation différentielle

Dans le cas du condensateur qui se **charge**, résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\boldsymbol{\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = \frac{1}{\tau} E}$$

Propriété du condensateur : La tension du condensateur ne peut pas subir de discontinuité.

- Résoudre cette équation différentielle en tenant compte de la condition initiale suivante : A *t* = 0, le condensateur est déchargé.

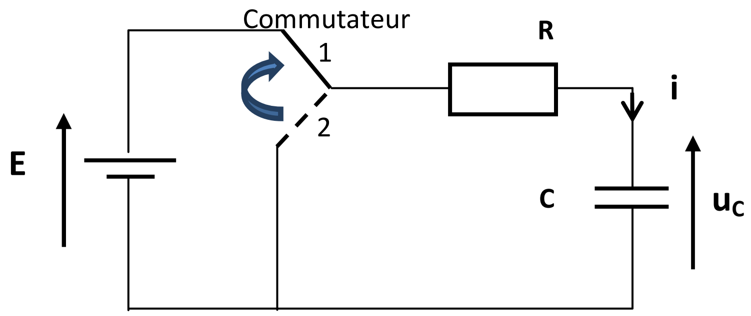
Dans le cas du condensateur qui se **décharge**, résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\boldsymbol{\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = 0}$$

Propriété du condensateur : La tension du condensateur ne peut pas subir de discontinuité.

- Résoudre cette équation différentielle en tenant compte de la condition initiale suivante : A *t* = 0, le condensateur est chargé sous ta tension $u_C = E$.

III)3) Bilan de puissances lors de la charge du condensateur



Commutateur en **position 1** :

- Puissance électrique **fournie**par le générateur :

- Puissance électrique **consommée** par la résistance :

- Energie stockée par le condensateur :

Loi des mailles :

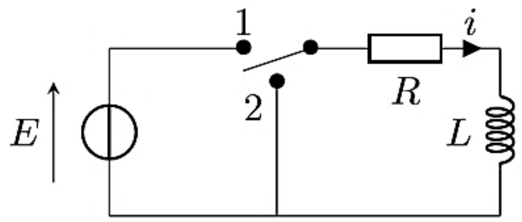
En multipliant par $\boldsymbol{i}$, on obtient :

IV) EXEMPLE en ELECTRICITE : MAGNETISATION ET DEMAGNETISATION D'UNE BOBINE

Propriétés de la bobine :Le courant dans une bobine ne peut pas subir de discontinuité.

IV)1 Magnétisation de la bobine

Le commutateur est en **position 1** et permet la **magnétisation de la bobine**.



- Etablir l'équation différentielle vérifiée par *i(t). M*ettre cette équation différentielle sous forme canonique. Identifier la constante de temps τcaractéristique du régime transitoire.

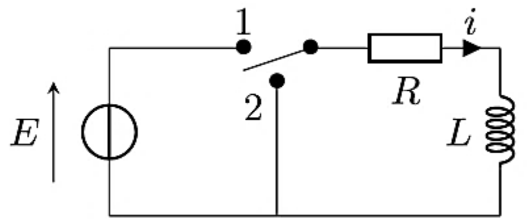
- Résoudre cette équation différentielle en tenant compte de la condition initiale suivante : A t = 0, la bobine est démagnétisée, c'est-à-dire que le courant la traversant est nul.

- Tracer ***i*** en fonction du temps en faisant apparaître le temps caractéristique τ.

- Faire un bilan de puissances et identifier les différents termes.

IV)2) Démagnétisation de la bobine

Le commutateur est en **position 2** et permet la **démagnétisation de la bobine**.



- Etablir l'équation différentielle vérifiée par *i(t). M*ettre cette équation différentielle sous forme canonique.

- Résoudre cette équation différentielle en tenant compte de la condition initiale suivante : A t = 0, la bobine est magnétisée : $i(t=0)=\frac{E}{R}$.

V) ANALOGIES MECANIQUE / ELECTRICITE

Ce tableau des équivalences sera repris et complété par la suite.

Mécanique	**Electricité**
Position x (m)	
Vitesse v (m.s^{-1})	
Masse m (kg)	
Raideur k (N.m^{-1})	
Frottement h (N.m^{-1}.s)	
Force F (N)	