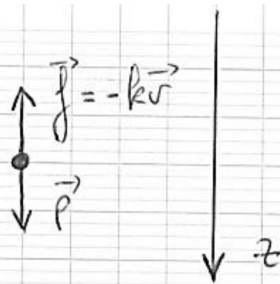


Exercice 1 : Lâcher de balle

Exercice 1.

BALLE :



$$\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$$

associé à $E_{pp} = -mgz + cte$

$$\vec{F} = -k\vec{v}$$

Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_m}{dt} = P_{nc} = P(\vec{F}) = -k\vec{v} \cdot \vec{v} = -kv^2 = -k\dot{z}^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz + cte \right) = -k\dot{z}^2$$

$$m\ddot{z} - mg = -k\dot{z} \Leftrightarrow \ddot{z}(m\ddot{z} - mg + k\dot{z}) = 0$$

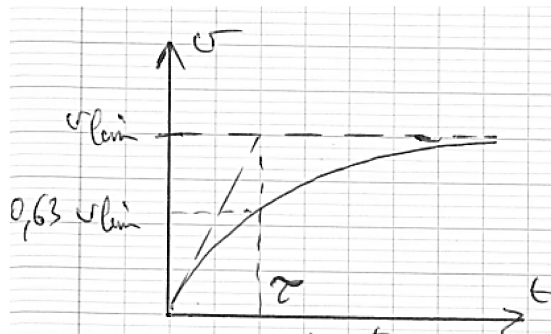
On élimine la solution $\dot{z} = 0$

On obtient :

$$m\ddot{z} - mg + k\dot{z} = 0$$

$$m \frac{dv}{dt} - mg + kv = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \quad \text{sous forme canonique.}$$



Identification :

$$\tau = \frac{m}{k}$$

$$[\tau] = \left[\frac{m}{k} \right] = \frac{kg}{N \cdot m^{-1} \cdot s}$$

$$= \frac{kg}{kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m^{-1} \cdot s} = s \quad \underline{\underline{OK}}$$

SEH : $v_H = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

SP : $v_p = \frac{mg}{k} = v_{lim}$

SG : $v = \frac{mg}{k} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

CI : $v(0) = 0 \Rightarrow \frac{mg}{k} = A = 0$

Solution : $v(t) = \frac{mg}{k} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

Exercice 2 : Hockey sur glace et dissipation d'énergie

Bilan des forces :

- poids, associé à une énergie potentielle de pesanteur constante, le mouvement étant horizontal, qu'on peut choisir nulle
- réaction normale de la glace, qui ne travaille pas et peut être associée à une énergie potentielle nulle
- frottements, associés à une puissance $P_{fr} < 0$, supposée constante.

En raison des frottements, le système n'est pas conservatif.

Théorème de la puissance mécanique (TPM) appliqué au palet dans référentiel terrestre : $\frac{dEm}{dt} = P_{fr} < 0$,

Energie mécanique : $Em = Ep + \frac{1}{2}mv^2$. En choisissant le sol comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur, le mouvement étant horizontal, on a toujours $Ep = 0$, soit $Em = \frac{1}{2}mv^2$.

On choisit comme instant initial $t_0 = 0$ (origine des temps) le moment où le palet est lancé avec la vitesse v_0 (énergie mécanique $Em_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$), et comme instant final le moment où le palet s'arrête (vitesse nulle, instant t_f , énergie mécanique $Em_f = 0$).

En intégrant entre t_0 et t_f le TPM : $\int_{Em_0}^{Em_f} dEm = \int_{t_0}^{t_f} P_{fr} dt \Leftrightarrow Em_f - Em_0 = P_{fr}(t_f - t_0)$

Finalement,
$$t_f = -\frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{P_{fr}}.$$

Vérifier l'homogénéité et le signe (cohérent car $P_{fr} < 0$), ainsi que la cohérence de l'influence des différents paramètres : plus la vitesse initiale est élevée, plus le temps nécessaire avant que le palet ne s'arrête va augmenter ; en revanche il diminue quand les frottements augmentent...

Exercice 6 : Chute d'une gouttelette d'eau (d'après Ecrit ATS)

1) Référentiel : Terre, galiléen.
 Système : goutte d'eau
 Bilan des forces :

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z \quad (1) \quad \uparrow \vec{u}_z$$

avec :

$$m = \rho_{\text{eau}} V_{\text{eau}} = \rho_{\text{eau}} \frac{4}{3}\pi r^3$$

2) PFD :

$$\vec{f} = -6\pi\eta_{\text{air}} r \vec{v} \quad (2)$$

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = \rho_{\text{eau}} \frac{4}{3}\pi r^3 \vec{a} \quad (3)$$

Vitesse initiale nulle (+) forces suivant $\vec{u}_z$ (ou) opposée à l'autre (ou)

Donc : $\vec{v} = v \cdot \vec{u}_z$
 $\vec{a} = \dot{v} \cdot \vec{u}_z$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Poussée suivant } \vec{u}_z \\ \text{Donc : } \vec{v} = v \cdot \vec{u}_z \\ \vec{a} = \dot{v} \cdot \vec{u}_z \end{array} \right\} \begin{array}{l} -mg - 6\pi\eta_{\text{air}} r v = m \frac{dv}{dt} \\ \frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta_{\text{air}} r v}{m} = -g \end{array}$$

(1), (2) et (3)

$$\rho_{\text{eau}} \frac{4}{3}\pi r^3 g \vec{u}_z - 6\pi\eta_{\text{air}} r v \vec{u}_z = \rho_{\text{eau}} \frac{4}{3}\pi r^3 \dot{v} \vec{u}_z$$

En projetant sur $\vec{u}_z$:

$$\rho_{\text{eau}} \frac{4}{3}\pi r^3 \dot{v} + 6\pi\eta_{\text{air}} r v = -\rho_{\text{eau}} \frac{4}{3}\pi r^3 g$$

En mettant sous forme canonique :

$$\dot{v} + \frac{3 \times 6\pi\eta_{\text{air}} r}{4\pi r^3 \rho_{\text{eau}}} v = -g \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ou} \\ \tau = \frac{m}{6\pi\eta_{\text{air}} r} \end{array} \right.$$

$$\dot{v} + \frac{9\eta_{\text{air}}}{2\rho_{\text{eau}} r^2} v = -g$$

$$\tau = \frac{2\rho_{\text{eau}} r^2}{9\eta_{\text{air}}}$$

3) Vitesse limite atteinte
 $\Rightarrow \dot{r} = 0$

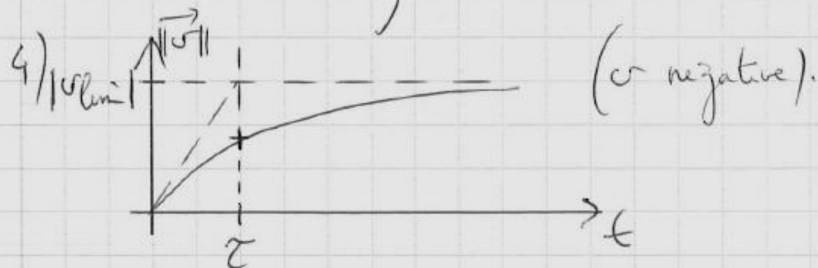
(ou)

$$\frac{9 \eta_{\text{air}}}{2 \rho_{\text{eau}} r^2} v_{\text{lim}} = -g$$

$$v_{\text{lim}} = -\frac{mg}{6\pi \eta_{\text{air}} r} \quad v_{\text{lim}} = -\frac{2r^2}{9\eta_{\text{air}}} \rho_{\text{eau}} g$$

Vectoriellement :

$$\vec{v}_{\text{lim}} = \frac{2r^2}{9\eta_{\text{air}}} \rho_{\text{eau}} \vec{g}$$



5) Avec $\eta_{\text{air}} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ (oubli de donnée)

$$\begin{aligned} v_{\text{lim}} &= \frac{2 \times (0,01 \cdot 10^{-3})^2}{9 \times 2 \cdot 10^{-5}} \times 10^3 \times 10 \\ &= \frac{1}{9} \times 10^{-4} \times 10^{-6} \times 10^{+5} \times 10^4 \times 10 \\ &= \frac{1}{9} \cdot 10^{-1} \approx 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

$$\Delta t = \frac{H}{v_{\text{lim}}} = \frac{500}{1,1 \cdot 10^{-2}} = 45 \cdot 10^3 \text{ s} \approx 12 \text{ h}$$

6) Conclusion : Temps trop long - les gouttelettes ne chutent pas : elles sont entraînées par le vent

Etude des oscillations d'un pendule (ATS 2020)

1. On donne : $v = l\dot{\theta}$ (mouvement circulaire)
d'où :

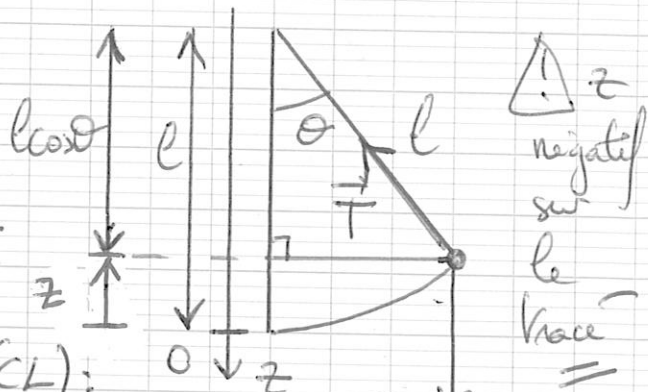
$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2}}$$

2. $E_p = -mgz + cte$ car z décroît vers le bas.

$$z = l\cos\theta - l$$

d'où :

$$E_p = -mgz + cte \\ = mgl(1 - \cos\theta) + cte$$



Condition aux limites (CL):

$$E_p(0) = mgl(1 - \cos 0) + cte = 0$$

d'où : $cte = 0$

$$\underline{\underline{E_p(\theta) = mgl(1 - \cos\theta)}}$$

Remarque : Seule $E_p = E_{pp} = -mgz + cte$ est prise en compte car :

BALANCE :

$\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$ associée à $E_{pp} = -mgz + cte$
 $\vec{T}$ ne travaille pas, associée à une $E_p = 0$

3. On donne E_p par rapport à θ :

$$\frac{dE_p}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} (mgl(1 - \cos\theta))$$

$$= \frac{d}{d\theta} (mgl - mgl\cos\theta)$$

$$= mgl\sin\theta$$

$$\frac{dE_p}{d\theta} = 0 \iff mgl \sin \theta = 0$$

obtenus pour :

$$\theta = 0 \text{ } [\pi]$$

$$\textcircled{\text{car}} \left(\begin{array}{l} \theta = 0 \\ \theta = \pi \end{array} \right) \quad 2 \text{ positions d'équilibre.}$$

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} (mgl \sin \theta) = mgl \cos \theta$$

$$\underline{\theta = 0} \Rightarrow \frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = mgl \cos(0) = mgl > 0$$

Position d'équilibre stable

$$\underline{\theta = \pi} \Rightarrow \frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = mgl \cos(\pi) = -mgl < 0$$

Position d'équilibre instable

4. Théorème de la Puissance (Mécanique) :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} (E_p + E_c) = \sum P_{nc}$$

E_p : Energies Potentielles de la masse m

E_c : Energie cinétique de la masse m

$\sum P_{nc}$: Puissance des forces non conservatives.

5. Ici : $P_{nc} = 0$ (Pas de frottement).

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left(mgl - mgl \cos \theta + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \right)$$

$$= mgl \dot{\theta} \sin \theta + m l^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = 0$$

Attention : On dérive par rapport au temps
et θ est une fonction qui dépend du temps.

On obtient :

$$\underline{m l \dot{\theta} (g \sin \theta + l \ddot{\theta}) = 0}$$

d'où : $m \neq 0, l \neq 0, \ddot{\theta} \neq 0$ (absurde)

En divisant par l :

$$g \sin \theta + l \ddot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Par identification :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Homogénéité :

$$[\omega_0] = \left[\sqrt{\frac{g}{l}} \right] = \left(\frac{m \cdot s^{-2}}{m} \right)^{\frac{1}{2}} = s^{-1} \quad \text{OK}$$

rad.s⁻¹

6. On observe :

$\theta = 0 \rightarrow$ Minimum d'énergie potentielle
 $\Leftrightarrow$ Position d'équilibre stable

$\theta = \pi$ ou $\theta = -\pi$

$\rightarrow$ Maximum d'énergie potentielle
 $\Leftrightarrow$ Position d'équilibre instable.

7. Le système est conservatif : l'énergie mécanique se conserve.

$$E_m(\theta) = E_c(\theta) + E_p(\theta) = E_m(0)$$

$$E_m(0) = E_c(0) + E_p(0)$$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 + 0$$

$$= \frac{1}{2} \times 0,2 \times (10)^2 = 0,1 \times 10 = \underline{1J}$$

8. Position angulaire θ_0 maximale atteinte lorsque
 $v = 0$ (ou) $E_c(\theta_0) = 0$
 par conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m(\theta_0) = E_m(0)$$

$$E_c(\theta_0) + E_p(\theta_0) = E_c(0) + E_p(0)$$

$$0 + mgl(1 - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$1 - \cos\theta_0 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{gl}$$

$$1 - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{gl} = \cos\theta_0$$

A.N:

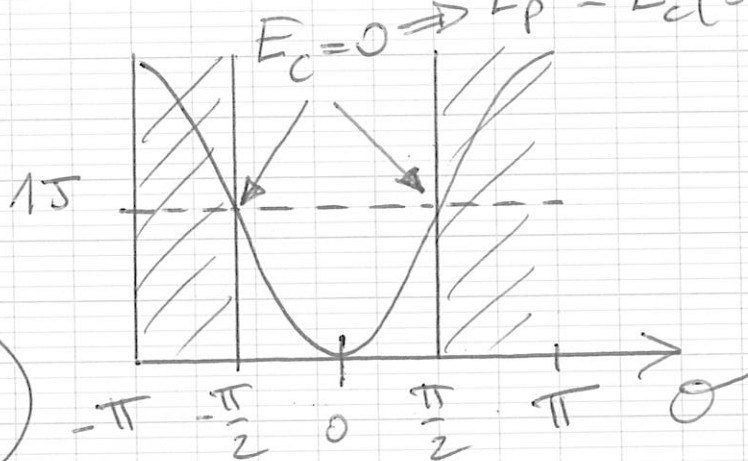
$$1 - \frac{1}{2} \times \frac{(10)^2}{10 \times 1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{3} \text{ ou } -\frac{\pi}{3}$$

$$E_c = 0 \Rightarrow E_p = E_c(0) = \frac{1}{2}mv_0^2 = 1J$$

Conradiction
Erreur de sujet

Conectif:
 $E_{pmax} = 2J$
 $= 4J$



Point de potentiel. $\theta_0 = \frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2}$

$$9. E_m(\theta_1 = \frac{\pi}{4}) = E_m(0)$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgl(1 - \cos\theta_1) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\text{avec } \cos\theta_1 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v_1^2 + 2gl(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = v_0^2$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gl\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

AN:

$$v_1 = \sqrt{10 - 2 \times 10 \times 1 \times \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$= \underline{2 \text{ m.s}^{-1}}$$

10. Pour que la bille effectue un tour complet, il faut qu'elle atteigne $\theta = \pi$
 $\Rightarrow E_p = mgl(1 - \cos \pi) = 2mgl$
 ... avec une vitesse nulle.

$$\begin{aligned} E_m(0) &= E_m(\theta) \\ E_c(0) + \cancel{E_p(0)} &= \cancel{E_c(\theta)} + E_p(\theta) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 2mgl$$

$$v_0^2 = 4gl$$

$$v_0 = \sqrt{4gl}$$

$$v_0 = \sqrt{4 \times 10 \times 1} = \underline{6,2 \text{ m.s}^{-1}}$$