Exercice 8 : Skieur

On étudie le mouvement d'un skieur descendant une piste selon la ligne de plus grande pente faisant un angle α avec l'horizontale. L'air exerce une force de frottement supposée telle que sa puissance est égale à $P_1 = -\lambda v^2$, où λ est un coefficient constant positif et v la vitesse du skieur. La force de frottement exercée par la neige a une puissance $P_2 = -f\, m\, g\, v \cos\alpha$ avec f le coefficient de frottement solide. On choisit comme origine de l'axe *Ox* de la ligne de plus grande pente la position initiale du skieur, supposé partir à l'instant initial avec une vitesse négligeable.

1. Déterminer la dimension de λ.

2. Déterminer l'énergie potentielle du skieur en fonction de m, g, x et α.

3. Peut-on appliquer la conservation de l'énergie mécanique ?

4. Déterminer l'équation différentielle du mouvement grâce à une étude énergétique. L'écrire sous la forme $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_m}{\tau}$. Donnez les expressions de v_m et τ.

5. Donner l'expression de la vitesse $v(t)$ puis de l'équation horaire $x(t)$.

6. Montrer que le skieur atteint une vitesse limite v_{lim}. AN : calculer v_{lim} avec λ = 1,0 SI, f = 0,90, g = 10 m.s^{-2}, m = 80 kg et α = 45°.

7. Calculer littéralement et numériquement la date t_1 où le skieur a une vitesse égale à $v_{lim}/2$.

8. Déterminer la distance d_1 parcourue par le skieur à t_1.

9. A la date t_1, le skieur tombe. On néglige alors la résistance de l'air, et on considère que le coefficient de frottement sur le sol est multiplié par 10. Donner la nouvelle équation différentielle du mouvement.

10. Déterminer la vitesse puis l'équation de la trajectoire en fonction de g, α, f, t, v_{lim} et d_1, en prenant comme nouvelle origine des temps la date t_1.

11. Calculer la distance d_2 parcourue par le skieur avant de s'arrêter.

Système : skieur ; Réf : terrestre, BdF : poids, frottements

1. $[\lambda] = \frac{[P]}{[v]^2} = \frac{[E]}{T} \times \frac{1}{[v]^2} = \frac{[m][v]^2}{T} \times \frac{1}{[v]^2} = M.T^{-1}$

2. $E_p = -mgy \ \ avec \ \sin\alpha = \frac{y}{x} \ \ d'où \ \ y = x\sin\alpha \ \ et \ E_p = -mgx \ \sin\alpha$

3. Frottements : E_m ne se conserve pas

4. $\frac{dE_m}{dt} = P_{nc}$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 - mgx\sin\alpha$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2} \times 2 \times m\, \dot{x}\, \ddot{x} - mg\dot{x}\sin\alpha \quad et \quad P_{nc} = -f\, m\, g\, \dot{x}\cos\alpha - \lambda\dot{x}^2 \quad d'où$$

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} = g(\sin\alpha - f\ \cos\alpha)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m}v = \frac{v_m}{\tau} \quad avec\ \ \tau = \frac{m}{\lambda} \ \ et\ v_m = \tau g(\sin\alpha - f\ \cos\alpha) = \frac{mg}{\lambda}(\sin\alpha - f\ \cos\alpha)$$

5. $\boxed{v = v_m\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$

$$x = v_m\left(t + \tau\ \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) + cte \ \ avec\ x(0) = 0 = \tau\, v_m + cte \Rightarrow cte = -\tau\, v_m$$

$$\boxed{x = v_m\left(t + \tau\ \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \tau\right)}$$

6. $v_{lim} = \lim_{t\to\infty} v(t) = v_m$

$$AN: v_{lim} = \frac{10 \times 80}{1}(\sin 45° - 0.9 \times \cos 45°) = 57\ m.s^{-1} = 206\ \text{km.h}^{-1}$$

7. $v = \frac{v_{lim}}{2} = v_{lim}\left(1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right)\right) \Longrightarrow 1 - \frac{1}{2} = e^{-\frac{t_1}{\tau}} = \frac{1}{2}$

$$-\frac{t_1}{\tau} = \ln 2 \Longrightarrow t_1 = -\tau \ln\frac{1}{2} = \tau \ln 2 = \frac{80}{1}\ln 2 = 55\ s$$

8. Distance parcourue $d_1 = x(t_1)$

$d_1 = x(t_1) = 874\ m$

9. $\ddot{x} = g(\sin\alpha - 10\,f\ \cos\alpha)$

10. Nouvelle origine des temps : point de chute

$\dot{x} = g(\sin\alpha - 10\,f\ \cos\alpha)t + cte$ avec $\dot{x}(0) = \frac{v_{lim}}{2} \Rightarrow cte = \frac{v_{lim}}{2}$

$$\boxed{\dot{x} = g(\sin\alpha - 10\,f\ \cos\alpha)t + \frac{v_{lim}}{2}}$$

$$x = \frac{1}{2}\ g(\sin\alpha - 10\,f\ \cos\alpha)t^2 + \frac{v_{lim}}{2}\ t + cte \quad avec\ x(0) = d_1$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}\ g(\sin\alpha - 10\,f\ \cos\alpha)t^2 + \frac{v_{lim}}{2}\ t + d_1}$$

11. Distance d_2 obtenue pour $\dot{x} = 0$

$$g(\sin\alpha - 10\,f\ \cos\alpha)t_A + \frac{v_{lim}}{2} = 0 \Rightarrow t_A g(\sin\alpha - 10\,f\ \cos\alpha) = -\frac{v_{lim}}{2}$$

$$t_A = -\frac{v_{lim}}{2g(\sin\alpha - 10\,f\ \cos\alpha)} \approx 0{,}5\ s$$

$$d_2 = x(t_A) = \frac{-{v_{lim}}^2}{8g(\sin\alpha - 10\,f\ \cos\alpha)} + d_1 = 7{,}1 + d_1 = 881\ m$$