CPGE ATS

Programme de colles – Semaine 5 (13 au 17 octobre 2025)

Chapitres étudiés :

- **M2 Energie mécanique (le mouvement circulaire a été vu ainsi que les coordonnées polaires)**
- **E1 Electricité en régime permanent.**
- **M3-E2 systèmes du 1er ordre**

Questions de cours (*2 questions par étudiant) :*

Toutes les réponses attendues se trouvent dans le cours, certaines sont reprécisées ci-dessous.

1) Donner les expressions du travail et de la puissance d'une force + unités.

Travail élémentaire fourni par la force $\vec{F}$ au point matériel M au cours de son déplacement élémentaire $\overrightarrow{dM}$:

$$\delta W(\vec{F})_{/R} = \vec{F}.\overrightarrow{dM}$$

Unité du travail : le joule (J)

Travail d'une force $\vec{F}$ le long d'une trajectoire donnée allant de A vers B :

$$W(\vec{F})_{A\to B} = \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{F(M)}.\overrightarrow{dM}$$

Puissance fournie par la force $\vec{F}$ au point matériel M :

$$P(\vec{F})_{/R} = \frac{\delta W(\vec{F})_{/R}}{dt} = \vec{F}.\overrightarrow{v_{M/R}}$$

Unité de la puissance : le watt (W)

2) Donner la définition de l'énergie cinétique et du théorème de l'énergie cinétique.

Energie cinétique d'un point matériel de masse *m*, en mouvement dans un référentiel *R* :

$$E_{c,M/R} = \frac{1}{2} m {v_{M/R}}^2$$

Théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel de masse m se déplaçant le long d'une trajectoire $\widehat{AB}$:

$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum W(\overrightarrow{F_n})_{A\to B}$$

Théorème de la puissance cinétique ;

$$\frac{dE_C}{dt}_{/R} = \sum P_{/R}(\overrightarrow{F_n})$$

3) Donner la définition de l'énergie potentielle, ainsi que les expressions des énergies potentielles de pesanteur et élastique.

Une force est dite **conservative** si son travail le long d'une trajectoire $\widehat{AB}$ ne dépend que des points A et B, et pas du chemin suivi pour aller de A vers B.

Dans ce cas, la force $\vec{F}$ dérive d'une **énergie potentielle *E_P*** :

$$\delta W(\vec{F}) = -dE_P$$

Energie Potentielle de Pesanteur E_{PP} mesurée le long d'un axe vertical orienté vers le haut :

$$E_{PP} = mgz + cte$$

Energie Potentielle de Pesanteur E_{PP} mesurée le long d'un axe **vertical orienté vers le bas :**

$$E_{PP} = - mgz + cte'$$

Les constantes sont déterminées à partir des Conditions aux Limites (CL)

Energie Potentielle Elastique $E_{P\,él}$ dont dérive la force de rappel élastique $\overrightarrow{F_{él}}$ exercée par un ressort de raideur *k* :

$$E_{P\,él} = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 \Rightarrow \overrightarrow{F_{él}} = -k.x.\overrightarrow{u_x} \text{ si allongement } x = l - l_0 \text{ suivant } \overrightarrow{u_x}$$

4) Donner la définition de l'énergie mécanique et du théorème de l'énergie mécanique.

Energie mécanique d'un point matériel :

$$E_m = E_C + E_P$$

Théorème de l'Energie Mécanique pour un point matériel de masse m :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}(E_C + E_P) = P(\vec{F}_{non\ conservative})$$

5) Définitions des positions d'équilibre stable et instable à partir de l'énergie potentielle.

Une position d'équilibre est **stable** si la force y ramène le point matériel lorsqu'il est faiblement éloigné. Dans ce cas, **l'énergie potentielle** est **minimale**. On a :

$$\frac{dE_P}{dx}(x_{éq}) = 0 \qquad \frac{d^2E_P}{dx^2}(x_{éq}) > 0$$

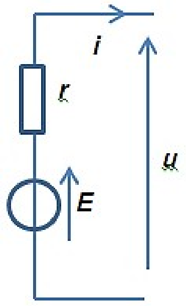
Une position d'équilibre est **instable** si la force en éloigne le point matériel lorsqu'il est faiblement éloigné. Dans ce cas, **l'énergie potentielle** est **maximale**. On a :

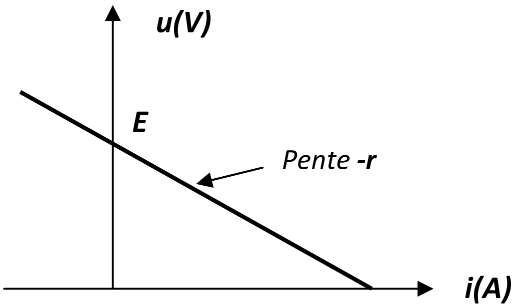
$$\frac{dE_P}{dx}(x_{éq}) = 0 \qquad \frac{d^2E_P}{dx^2}(x_{éq}) < 0$$

6) Représenter le modèle de Thévenin d'un circuit et tracer l'allure de sa caractéristique ***u = f(i)***.

Equation :

$u = E - ri$





7) Donner la relation entre *u* et *i* pour un condensateur. Donner l'expression de l'énergie stockée dans le condensateur. Interpréter le signe de la puissance (charge ou décharge du condensateur).

$\boldsymbol{i = C\frac{du}{dt}}$ en **convention récepteur**

Energie stockée : $\boldsymbol{E_C = \frac{1}{2}Cu^2}$

Si $p = u.i > 0$, le condensateur se charge

Si $p = u.i < 0$, le condensateur se décharge

8) Donner la relation entre *u* et *i* pour une bobine parfaite. Donner l'expression de l'énergie stockée dans la bobine. Interpréter le signe de la puissance (magnétisation ou démagnétisation de la bobine).

$\boldsymbol{u = L\frac{di}{dt}}$ en **convention récepteur**

Energie stockée : $\boldsymbol{E_L = \frac{1}{2}Li^2}$

Si $p = u.i > 0$, la bobine se magnétise

Si $p = u.i < 0$, la bobine se démagnétise

Pour la question 7 et 8, attention de bien définir la convention (par un schéma).

9) Donner la forme canonique de l'équation différentielle du premier ordre pour la fonction $y(t)$, ainsi que la forme générale de sa solution :

Forme canonique : $\boldsymbol{\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau}y = cte}$ avec τ constante de temps

Solution : $y(t) = SP + Ke^{-\frac{t}{\tau}}$

K déterminée à partir de la condition initiale, en général y(0)

Démos de cours :

10) Bille de masse m lâchée dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ et subissant une force de frottement fluide $\vec{f} = -h\vec{v}$. A partir du PFD, établir l'équation différentielle de la vitesse de la bille ; la mettre sous forme canonique, identifier la constante de temps τ.

BAME :

$\vec{P} = mg\overrightarrow{u_z}$ (axe *z* orienté vers la bas)

Poussée d'Archimède négligée

Force de frottement fluide $\vec{f} = -h\overrightarrow{v_{M/R}} = -h\vec{v} = -hv\overrightarrow{u_z}$

PFD : $\sum \overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext\ sur\ M}} = \left(\frac{\boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{M/R}}}}{\boldsymbol{dt}}\right) = \boldsymbol{m}.\overrightarrow{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{M/R}}}$

$\vec{P} + \cancel{\overrightarrow{\Pi_a}} + \vec{f} = m\vec{a}$

$m\vec{g} - h\vec{v} = m\vec{a}$

$mg\overrightarrow{u_z} - hv\overrightarrow{u_z} = m\frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_z}$

Projection sur $\overrightarrow{u_z}$:

$mg - hv = m\frac{dv}{dt}$

Ou : $m\frac{dv}{dt} + hv = mg$

En considérant $m \neq 0$, et en divisant par m, on obtient, sous forme canonique : $\boxed{\boldsymbol{\frac{dv}{dt} + \frac{h}{m}v = g}}$

Forme canonique standard :

$\boxed{\boldsymbol{\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}y(t) = \frac{1}{\tau}h(t)}}$

Par identification : $\boldsymbol{\tau = \frac{m}{h}}$

11) Bille de masse m lâchée dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ et subissant une force de frottement fluide $\vec{f} = -h\vec{v}$. A partir du théorème de la puissance mécanique, établir l'équation différentielle de la vitesse de la bille ; la mettre sous forme canonique, identifier la constante de temps τ.

Force conservative : $\vec{P} = mg\overrightarrow{u_z}$, associée à l'énergie potentielle de pesanteur $E_{PP} = -mgz + cte$ (axe z orienté vers la bas)

Poussée d'Archimède négligée

Force non conservative : force de frottement fluide $\vec{f} = -h\overrightarrow{v_{M/R}} = -h\vec{v}$ dont la puissance est $P_{non\ cons} = \vec{f}.\vec{v} = -h\vec{v}.\vec{v} = -hv^2$

Energie cinétique de la bille : $E_{c,M/R} = \frac{1}{2} m v_{M/R}{}^2 = \frac{1}{2} m v^2$

Théorème de l'énergie mécanique :

$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}(E_C + E_P) = \sum P_{non\ cons}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 - mgz\right) = -hv^2$

$m\frac{dv}{dt}v - mgv = -hv^2$

Ou : $v\left(m\frac{dv}{dt} + hv\right) = vmg$

En considérant $v \neq 0$, on obtient :

$\boldsymbol{m\frac{dv}{dt} + hv = mg}$

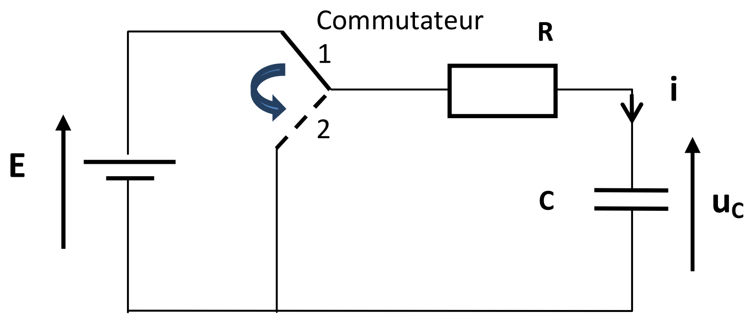
En considérant $m \neq 0$, et en divisant par m, on obtient, sous forme canonique : $\boxed{\boldsymbol{\frac{dv}{dt} + \frac{h}{m}v = g}}$

Forme canonique standard :

$\boxed{\boldsymbol{\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}y(t) = \frac{1}{\tau}h(t)}}$

Par identification : $\boldsymbol{\tau = \frac{m}{h}}$

12) Montage :



Commutateur en **position 1** : Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\boldsymbol{u_C(t)}$ et la mettre sous forme canonique. Identifier la constante de temps τ caractéristique du régime transitoire. Résoudre cette équation différentielle compte-tenu de la condition initiale $u_C(0) = 0$.

Appliquer la loi des mailles : $E - u_R - u_C = 0$

Appliquer la loi entre *u* et *i* pour chaque récepteur. $u_R = R.i$ et $i = C\frac{du_C}{dt}$, d'où :

$$E - RC\frac{du_C}{dt} - u_C = 0$$

On obtient sous forme canonique :

$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{1}{RC}E$

On identifie la constante de temps de temps : $\tau = RC$.

SEH : $u_{CH} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

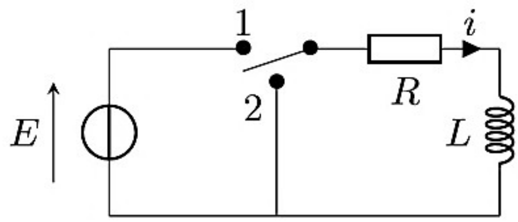
SP : $u_{CP} = E$

SG : $u_C = u_{CH} + u_{CP} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E$

CI : Physiquement : $u_C(0) = u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ (la tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas subir de discontinuité ; le condensateur est initialement déchargé). Mathématiquement : $u_C(0) = A + E$ d'où : $A = -E$

Solution : $u_C = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

13) Montage :



Le commutateur est en **position 1** et permet la **magnétisation de la bobine**. Etablir l'équation différentielle vérifiée par *i(t). M*ettre cette équation différentielle sous forme canonique. Identifier la constante de temps τ caractéristique du régime transitoire. Résoudre cette équation différentielle en tenant compte de la condition initiale suivante : A *t* = 0, la bobine est démagnétisée, c'est-à-dire que le courant la traversant est nul.

Appliquer la loi des mailles : $E - u_R - u_L = 0$

Appliquer la loi entre u et i pour chaque récepteur. $u_R = R.i$ et $u_L = L\frac{di}{dt}$, d'où :

$$E - R.i - L\frac{di}{dt} = 0$$

On obtient sous forme canonique :

$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$

On identifie la constante de temps de temps : $\tau = \frac{L}{R}$.

SEH : $i_H = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

SP : $i_P = \frac{E}{R}$

SG : $i = i_H + i_P = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$

CI : Physiquement : $i(0) = i(0^+) = i(0^-) = 0$ (le courant dans une bobine ne peut pas subir de discontinuité ; la bobine est initialement démagnétisée). Mathématiquement : $i(0) = A + \frac{E}{R}$ d'où : $A = -\frac{E}{R}$

Solution : $i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

Suivi d'un ou deux exercices proposés par le colleur.