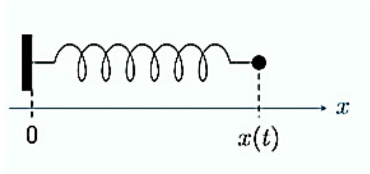
# M4 E3 OSCILLATEUR HARMONIQUE

## Travaux Dirigés

### Exercice 1 : Oscillateur masse-ressort horizontal

On considère un système masse-ressort horizontal.

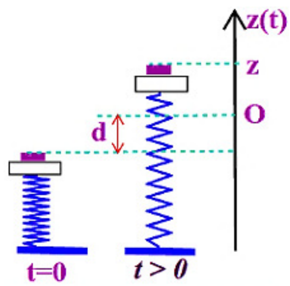



Le solide attaché à l'extrémité du ressort est modélisé par un point matériel de masse *m*. La constante de raideur du ressort vaut *k*, sa longueur à vide vaut $l_0$.

Le système évolue sans frottement sur un plan horizontal.

1) Faire le bilan des forces appliquées sur la masse *m*. Les représenter sur un schéma.
2) En appliquant le PFD, établir l'équation du mouvement, c'est-à-dire l'équation différentielle vérifiée par *x(t)*.Mettre l'équation sous forme canonique. Déterminer la pulsation propre $\omega_0$du système.
3) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle précédente.
4) On donne les conditions initiales : $x(0) = X_1$ ; $v(0) = 0$. Déterminer les constantes *A* et *B*. Donner la solution physique de l'équation de mouvement.
5) Tracer l'évolution de *x* en fonction du temps. Quelle est l'amplitude du mouvement ?

### Exercice 2 : Oscillateur masse-ressort vertical




On considère un système masse-ressort maintenu verticalement par un dispositif dont on néglige les effets.

Le solide attaché à l'extrémité du ressort est modélisé par un point matériel de masse *m*. La constante de raideur du ressort vaut *k*, sa longueur à vide vaut $l_0$.

Le système évolue sans frottement.

La position $z = 0$ correspond à la longueur à vide du ressort.

1) Faire le bilan des forces appliquées sur la masse *m*. Les représenter sur un schéma.
2) En appliquant le PFD, établir l'équation du mouvement, c'est-à-dire l'équation différentielle vérifiée par *z(t)*.Mettre l'équation sous forme canonique. Déterminer la pulsation propre $\omega_0$ du système.

On donne la solution générale de l'équation différentielle : $z(t) = A + B\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3) Montrer que cette expression est bien solution de l'équation du mouvement, si *A*a une valeur particulière. A quoi correspond cette valeur de *A* ?
4) On donne les conditions initiales : $z(0) = Z_0$ ; $v(0) = 0$. Déterminer les constantes *A* et *B*. Donner la solution physique de l'équation de mouvement.
5) Tracer l'évolution de *z* en fonction du temps. Quelle est l'amplitude du mouvement ?

**Exercice 3 : Oscillateur masse-ressort vertical (2)**

L'oscillateur de démonstration est modélisé par un ressort de longueur naturelle $L_0$ et de raideur $k$. Ce ressort est attaché à une ficelle en un point $O$ supposé fixe et pend verticalement. Un cylindre de masse $m$ est fixée à son autre extrémité. La position du cylindre est repérée par sa cote $z$, définie le long d'un axe $(Oz)$ orienté vers le bas et dont l'origine est fixée au point d'attache du ressort.

**1 -** Établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ et l'écrire sous forme canonique. En déduire la période des oscillations et comparer au cas horizontal.

**2 -** Déterminer la position d'équilibre $z_{éq}$. Commenter physiquement le résultat.

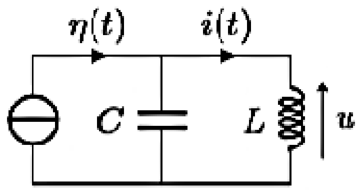
**3 -** Le cylindre est lâché sans vitesse initiale à partir d'une position $z_0$ obtenue en étirant le ressort par rapport à la position d'équilibre. Déterminer la loi horaire $z(t)$.

**4 -** L'énergie potentielle du cylindre peut s'écrire sous la forme

$$E_p(z) = \frac{1}{2}k(z - L_0)^2 - mgz$$

Que représentent chacun des termes? Montrer que la solution générale obtenue traduit bien la conservation de l'énergie mécanique du cylindre.

**Exercice 4 : Etude énergétique d'un oscillateur harmonique électrique**




Dans le circuit représenté ci-contre, le générateur de courant, supposé idéal, est brusquement éteint. On le modélise par un échelon de courant $\eta(t)$, passant de $I_0$à 0 à l'instant $t = 0$. On note $E_{TOT}= E_C + E_L$ l'énergie électrique totale stockée dans le condensateur et la bobine.

1) Exprimer la dérivée $\frac{dE_{TOT}}{dt}$ en fonction de $i$ et $\frac{di}{dt}$.
2) Justifier qualitativement que $E_{TOT}$ est constante. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $i$. La mettre sous forme canonique $\frac{d^2i}{dt^2} + {\omega_0}^2 i = 0$ ; donner l'expression de la pulsation propre $\omega_0$. Retrouver cette équation différentielle en appliquant les lois de Kirchoff.
3) A partir de considérations physiques, établir les conditions initiales $i(0)$ et $\frac{di}{dt}(0)$.
4) En déduire l'expression de $i(t)$.

**Exercice 5 : Mobile lié par deux ressorts**

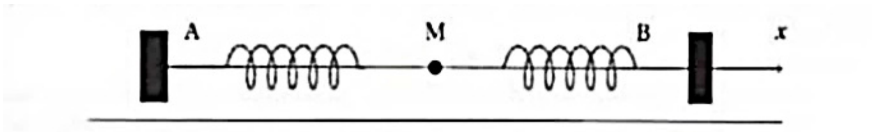
On considère un mobile supposé ponctuel de masse $m$, astreint à glisser le long d'une tige horizontale de direction $Ox$, et maintenu par deux ressorts identiques, de même raideur $k$ et de même longueur au repos $l_0$, dont les extrémités sont fixées en deux points A et B (schéma page suivante).

Dans la position d'équilibre du système, les longueurs des ressorts sont identiques et valent $l_{éq}$.

La position du point M est décrite par $x(t)$, écart par rapport à la position d'équilibre.

On néglige tout frottement.

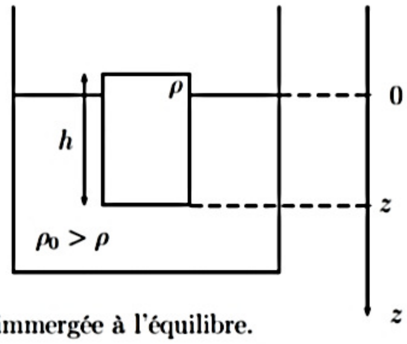
A $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position $x_0$.




1) Exprimer les tensions exercées par les deux ressorts sur la masse, puis la tension totale.
2) Etablir l'équation différentielle dont $x(t)$ est solution et montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation propre $\omega_0$et la période $T_0$, en fonction de $k$ et $m$.
3) Déterminer l'expression de $x$ en fonction de $t$, en tenant compte des conditions initiales.
4) L'énergie mécanique du système est-elle conservée ? Donner l'expression de l'énergie cinétique $E_m$ du mobile, et en déduire celle de son énergie potentielle élastique $E_{pé}$.

## Exercice 6 : Immersion d'un cylindre

**Un cylindre de section $s = 1\ \mathrm{cm}^2$, de hauteur $h = 10$ cm et de densité 0,6 (masse volumique $\rho$) est placé dans l'eau (masse volumique $\rho_0$). Un système annexe, non représenté sur la figure, maintient son axe de révolution vertical.**



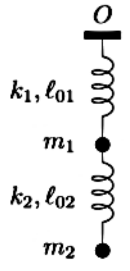

**1. Déterminer $z_0$ la hauteur immergée à l'équilibre.**

**2. Quelle est la force à exercer sur le cylindre pour l'immerger en entier ?**

On écarte le cylindre de sa position d'équilibre. On note $\varepsilon = z - z_0$ l'écart par rapport à la position d'équilibre.

3. En appliquant le PFD au cylindre, établir l'équation différentielle du mouvement (équation différentielle vérifiée par $\varepsilon$). Montrer que la pulsation propre $\omega_0$ peut s'écrire : $\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho h}}$. En déduire l'expression de la période propre $T_0$. Vérifier l'homogénéité du résultat (dimensions des grandeurs $\omega_0$ et $T_0$).

## Exercice 7 : Deux ressorts à la verticale (Oral PT)




**1 -** Si un ressort possède une raideur $k$, quelle est la raideur d'un demi-ressort ?

**2 -** On considère le système ci-contre où $k_i$ et $\ell_{0i}$ sont les raideurs et longueurs à vide des ressorts. Déterminer les allongements $\Delta\ell_1$ et $\Delta\ell_2$ à l'équilibre.

**3 -** Établir les équations différentielles vérifiées par les écarts $z_1$ et $z_2$ aux positions d'équilibre.

**4 -** La masse $m_2$ est maintenant supposée maintenue dans sa position d'équilibre. La masse $m_1$ est alors déplacée de $Z_d$ de sa position d'équilibre et lâchée sans vitesse initiale. Trouver l'équation $z_1(t)$ régissant le mouvement de $m_1$.

**5 -** Quel est le rapport entre les deux premières questions de l'exercice ?