

CPGE ATS

Programme de colles – Semaine 7 (10 au 15 novembre 2025)

Chapitre étudié et questions de cours : M4 E3 Oscillateur harmonique

➤ Les colles du mardi 11 novembre doivent être rattrapées : contacter votre colleur

Réponses attendues en bleu.

1^{ère} question de cours : questions 1 à 7.

2^{ème} question de cours : questions 8 à 13.

- 1) Equation différentielle du deuxième ordre (oscillateur harmonique non amorti) : forme canonique + solution.

Forme canonique : $\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = cte$ avec ω_0 pulsation propre

Solution : $y(t) = SP + Y_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Y_m et φ déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général $y(0)$ et $\frac{dy}{dt}(0)$

ou

Solution : $y(t) = SP + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

A et B déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général $y(0)$ et $\frac{dy}{dt}(0)$

- 2) Equation différentielle du deuxième ordre (oscillateur harmonique amorti) : forme canonique, équation caractéristique et discriminant associé.

Formes canoniques :

$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = cte$ avec Q facteur de qualité, ω_0 pulsation propre

$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = cte$ avec $\xi = \frac{1}{2Q}$ facteur d'amortissement

$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = cte$ avec $\lambda = \xi\omega_0 = \frac{\omega_0}{2Q}$

Equation caractéristique :

$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$ Discriminant : $\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) \Rightarrow 2$ racines r_1 et r_2

- 3) La forme canonique de l'équation différentielle du deuxième ordre (oscillateur harmonique amorti) étant donnée ci-dessous, donner les conditions du régime apériodique, et la solution associée.

Forme canonique :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = cte \quad \text{avec } Q \text{ facteur de qualité, } \omega_0 \text{ pulsation propre}$$

Facteur de qualité Q	Coefficient d'amortissement ξ	Discriminant Δ	Racines r_1 et r_2	Régime	Solution
$Q < \frac{1}{2}$	$\xi > 1$	$\Delta > 0$	2 racines réelles négatives $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4Q^2} - \omega_0^2}$	Apériodique	$y(t) = SP + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

A et B déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général $y(0)$ et $\frac{dy}{dt}(0)$.

- 4) La forme canonique de l'équation différentielle du deuxième ordre (oscillateur harmonique amorti) étant donnée ci-dessous, donner les conditions du régime pseudo-périodique, et la solution associée.

Forme canonique :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = cte \quad \text{avec } Q \text{ facteur de qualité, } \omega_0 \text{ pulsation propre}$$

Facteur de qualité Q	Coefficient d'amortissement ξ	Discriminant Δ	Racines r_1 et r_2	Régime	Solution
$Q > \frac{1}{2}$	$\xi < 1$	$\Delta < 0$	2 racines complexes conjuguées $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ Ou $r_{1,2} = -\lambda \pm j\omega$ $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ $\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$	Pseudo-périodique	$y(t) = SP + e^{-\lambda t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$

A et B déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général $y(0)$ et $\frac{dy}{dt}(0)$.

- 5) La forme canonique de l'équation différentielle du deuxième ordre (oscillateur harmonique amorti) étant donnée ci-dessous, donner les conditions du régime critique, et la solution associée.

Forme canonique :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = cte \quad \text{avec } Q \text{ facteur de qualité, } \omega_0 \text{ pulsation propre}$$

Facteur de qualité Q	Coefficient d'amortissement ξ	Discriminant Δ	Racines r_1 et r_2	Régime	Solution
$Q = \frac{1}{2}$	$\xi = 1$	$\Delta = 0$	1 racine double $r = -\omega_0$	Critique	$y(t) = SP + (At + B)e^{-\omega_0 t}$

A et B déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général $y(0)$ et $\frac{dy}{dt}(0)$.

6) Donner la définition du décrétement logarithmique.

Dans le cas du régime pseudo-périodique :

Décrétement logarithmique : $\delta = \ln \left[\frac{y(t) - y(\infty)}{y(t+T) - y(\infty)} \right] = \ln \left[\frac{1}{e^{-\lambda T}} \right] = \lambda T = \frac{\omega_0}{2Q} T$

avec $y(t)$ et $y(t+T)$ valeurs de 2 « maxima » successifs

7) Donner les analogies mécanique – électricité.

Mécanique	Electricité
Position x (m)	Charge q (C)
Vitesse v (m.s ⁻¹)	Intensité i (A)
Masse m (kg)	Inductance L (H)
Raideur k (N.m ⁻¹)	$\frac{1}{C}$ avec Capacité C (F)
Frottement h (N.m ⁻¹ .s)	Résistance R (Ω)
Force F (N)	Tension u (V)

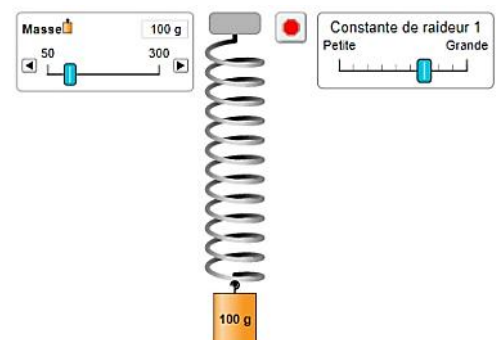
Démos de cours :

- 8) Système masse-ressort vertical : A partir du PFS, établir l'expression de la longueur à l'équilibre.

Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Système : Masse m supposée ponctuelle

BAME :



Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = +mg\vec{u}_z$ (Axe z orienté vers le bas)

Force de rappel : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_s = -k(l - l_0)\vec{u}_z$

Principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \text{ c'est-à-dire } mg\vec{u}_z - k(l - l_0)\vec{u}_z = m\ddot{z}\vec{u}_z$$

Détermination de la longueur du ressort à l'équilibre l_{eq} :

En projetant sur l'axe z :

$$mg - k(l - l_0) = m\ddot{z} = 0$$

On obtient : $l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$

- 9) Système masse-ressort vertical : A partir du PFD, établir l'expression de l'équation différentielle du mouvement.

Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Système : Masse m supposée ponctuelle

BAME :

Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = +mg\vec{u}_z$ (Axe z orienté vers le bas)

Force de rappel : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_s = -k(l - l_0)\vec{u}_z$

Principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \text{ c'est-à-dire } mg\vec{u}_z - k(l - l_0)\vec{u}_z = m\ddot{z}\vec{u}_z$$

En projetant sur l'axe z :

$$mg - k(l - l_0) = m\ddot{z}$$

Equation différentielle vérifiée par la position $z = l - l_{eq}$:

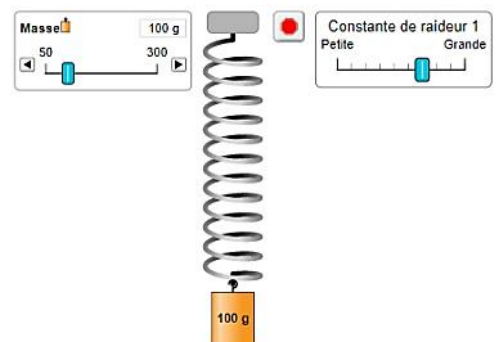
$$mg - k(l - l_{eq} + l_{eq} - l_0) = m\ddot{z}$$

$$\text{Avec : } mg - k(l_{eq} - l_0) = 0 \text{ (Equilibre)}$$

$$\text{On obtient : } -k(l - l_{eq}) = -kz = m\ddot{z} = m \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\text{D'où : } \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m}z = 0 \text{ Equation différentielle linéaire d'ordre à coefficients constants}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z = 0 \text{ Forme canonique}$$



10) Résoudre l'équation différentielle homogène (SEH) de la fonction $z(t)$ suivante :

$$\frac{d^2 z}{dt^2}(t) + \omega_0^2 z(t) = 0$$

On donne les 2 conditions initiales :

$z(0) = z(t=0) = Z_0$ (Elongation initiale non nulle)

$\dot{z}(0) = \dot{z}(t=0) = 0$ (Vitesse initiale nulle)

a) Solution de l'équation homogène (SEH) : $z_H(t) = Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ou $A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

b) Solution particulière (SP) : Ici : $z_P(t) = 0$

c) Solution générale (SG) : $z(t) = z_H(t) + z_P(t) = Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ou $A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

d) Conditions initiales (CI) : 2 conditions initiales sont nécessaires

$z(0) = z(t=0) = Z_0$ (Elongation initiale non nulle)

$\dot{z}(0) = \dot{z}(t=0) = 0$ (Vitesse initiale nulle)

e) Détermination des constantes d'intégration :

$z(t) = Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ou $A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

$\dot{z}(t) = -\omega_0 Z_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ ou $-\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t)$

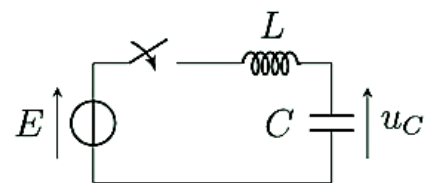
$z(0) = Z_m \cos(\varphi)$ ou A mathématiquement et $z(0) = Z_0$ physiquement

$\dot{z}(0) = -\omega_0 Z_m \sin(\varphi)$ ou $\omega_0 B$ mathématiquement et $\dot{z}(0) = 0$ physiquement

On en déduit : En prenant $\varphi = 0$, on obtient $Z_m = Z_0$

Ou : $A = Z_0, B = 0$

11) Pour le circuit ci-contre (interrupteur fermé à $t = 0$) : Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur. La mettre sous forme canonique, identifier la constante introduite.



Appliquer la loi des mailles : $E - u_L - u_C = 0$

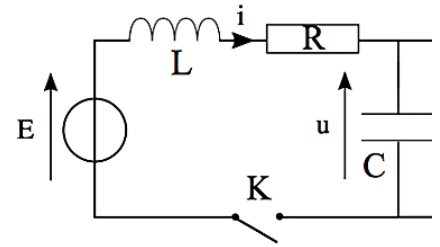
Appliquer la loi entre u et i pour chaque récepteur. $u_L = L \frac{di}{dt}$; $i = C \frac{du_C}{dt}$

On obtient : $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{1}{LC} E$

Sous forme canonique :

$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$, avec , en identifiant : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pulsation propre (rad.s⁻¹)

- 12) Pour le circuit ci-contre (interrupteur fermé à $t = 0$) : Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes du condensateur. La mettre sous forme canonique, identifier les constantes introduites.



Appliquer la loi des mailles : $E - u_L - u_R - u = 0$

Appliquer la loi entre u et i pour chaque récepteur. $u_L = L \frac{di}{dt}$; $i = C \frac{du}{dt}$; $u_R = R \cdot i$

On obtient sous forme canonique :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = \frac{1}{LC} E$$

On identifie à la forme canonique suivante :

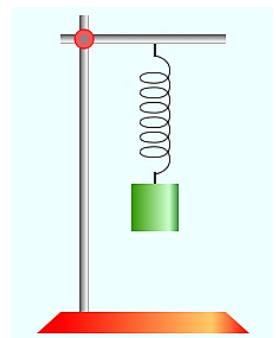
$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E$$

On détermine par identification :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ pulsation propre (rad.s}^{-1}\text{)}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ facteur de qualité (sans dimension)}$$

- 13) Pour le système masse-ressort amorti ci-contre, on écarte la masse de sa position d'équilibre ; déterminer l'équation du mouvement. La mettre sous forme canonique ; identifier les constantes introduites.



Graduer axe z vers le bas.

Prendre l'origine de l'axe au point de fixation du ressort.

Référentiel : Terrestre, supposé galiléen

Système : Masse m .

Bilan des forces extérieures appliquées :

$$\text{Poids : } \vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$$

$$\text{Force de rappel élastique : } \vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_s \text{ avec } \vec{u}_s \text{ vecteur sortant du ressort.}$$

$$\vec{u}_s = \vec{u}_z \text{ et } l = z$$

$$\text{On obtient : } \vec{F} = -k(z - l_0)\vec{u}_z$$

$$\text{Force de frottement fluide : } f = -h\vec{v} = -h\dot{z}\vec{u}_z$$

$$\text{PFD : } \sum \vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{z}\vec{u}_z$$

En projetant sur z on obtient :

$$mg - k(z - l_0) - h\dot{z} = m\ddot{z}$$

Sous forme canonique :

$$\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k}{m}l_0$$

On identifie à la forme canonique suivante :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = g + \frac{k}{m}l_0$$

On détermine par identification :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ pulsation propre (rad.s}^{-1}\text{)}$$

$$Q = \frac{1}{h}\sqrt{mk} \text{ facteur de qualité (sans dimension)}$$

Puis : de 1 à 2 exercices proposés par le colleur.

Programme ATS

5. Oscillations libres au voisinage d'une position d'équilibre stable	
Oscillations non amorties au voisinage d'une position d'équilibre.	Expliquer qualitativement l'existence d'oscillations autour d'une position d'équilibre stable dans le cas d'une particule soumise à une force conservative dans un mouvement à un degré de liberté. Déterminer des caractéristiques du mouvement connaissant l'énergie mécanique du système.
<i>Oscillateur harmonique non amorti.</i> <i>Énergie potentielle.</i> <i>Équation d'évolution ; solutions générales.</i> <i>Période et pulsation propres des oscillations.</i> <i>Interprétation énergétique des oscillations harmoniques non amorties.</i>	<i>Établir et exploiter l'équation d'évolution d'un oscillateur harmonique non amorti à un degré de liberté. Résoudre cette équation connaissant les conditions initiales du mouvement.</i> <i>Exprimer l'énergie mécanique d'un oscillateur en fonction de l'amplitude des oscillations.</i> <i>Représenter les variations en fonction du temps des énergies potentielle, cinétique et mécanique d'un oscillateur harmonique non amorti.</i>
Oscillateur harmonique amorti. Régimes d'évolution libre (apériodique, critique et pseudopériodique). Facteur de qualité. Temps caractéristiques d'évolution.	Établir l'équation différentielle du mouvement d'un système masse-ressort en présence d'une force de frottement dont la valeur est proportionnelle à celle de la vitesse. Écrire l'équation différentielle en faisant apparaître la pulsation propre et le facteur de qualité. Résoudre et interpréter les solutions de cette équation différentielle. Identifier le régime d'évolution à partir de représentations graphiques des variations de la position ou de la vitesse au cours du temps. Dans le cas d'un régime pseudopériodique, identifier un temps caractéristique d'amortissement et un temps caractéristique d'oscillation. Relier qualitativement le facteur de qualité au nombre d'oscillations visibles. Étudier expérimentalement les différents régimes d'oscillation d'un oscillateur harmonique mécanique amorti. Déterminer les paramètres caractéristiques de cet oscillateur : pulsation propre et facteur de qualité.

13. Circuits linéaires en régime transitoire

Circuit RLC série en régime dépendant du temps. Analogie mécanique.	Établir et résoudre l'équation d'évolution de la tension aux bornes du condensateur lors de sa charge ou de sa décharge, dans les différents régimes possibles. Écrire l'équation différentielle en faisant apparaître la pulsation propre et le facteur de qualité. Décrire et exploiter les analogies avec l'oscillateur harmonique mécanique amorti. Identifier les paramètres et grandeurs analogues.
---	--