M4 E3 OSCILLATEUR HARMONIQUE

Travaux Dirigés (2)

<u>Exercice 1 : Etude du système masse-ressort horizontal amorti</u> (*)

Considérons une masse m supposée ponctuelle reliée à un ressort horizontal de constante de raideur k et de longueur à vide l_0, la masse pouvant se déplacer horizontalement sans frottements (par exemple à l'aide d'un système d'air pulsé venant compenser son poids). L'axe (Ox) sera pris horizontal selon l'axe du ressort, avec pour origine O le point d'accroche du ressort.

On tient compte de la présence de frottements fluides dont la puissance est : $P_{nc} = -hv^2$, avec v vitesse du point matériel et h coefficient positif indépendant de cette vitesse.

1) Appliquer le théorème de la puissance mécanique et en déduire l'équation différentielle liant x et t.

2) La mettre sous forme canonique en ramenant à 1 le coefficient devant la dérivée d'ordre le plus élevé. Il apparait alors deux coefficients constants devant les deux autres termes ; déterminer la dimension de chacun d'entre eux.

Système : point M de masse m étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
BAME

E_{pp}; force de rappel du ressort : E_{pe}, réaction normale du support, orthogonale au déplacement : $W(\vec{T}) = 0$.

Energie potentielle : $E_p = E_{pe} + E_{pp} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + mgz_0 + cte = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 + cte$

Energie cinétique : $Ec = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

Energie mécanique : $Em = Ec + Ep = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 + cte$

Théorème de la puissance mécanique : $\frac{dEm}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}(x - \ell_0) = -h\dot{x}^2$ soit $\dot{x}\,[m\ddot{x} + k(x - \ell_0) + h\dot{x}] = 0$

On s'intéresse au mouvement de la bille, donc $\dot{x} \neq 0$

On obtient donc une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants liant x et t :

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = k\ell_0 \quad ou \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = k\ell_0$$

A l'équilibre, $\dot{x}_{ex} = 0$ et $\ddot{x}_{éq} = 0$, soit $x_{éq} = \ell_0$

Mise sous forme canonique : On commence par ramener à 1 le coefficient du terme de plus haut degré :

$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\ell_0 = \frac{k}{m}x_{éq}$

Dimensions des coefficients $\frac{h}{m}$ et $\frac{k}{m}$: $\left[\frac{h}{m}\right] = T^{-1}$ et $\left[\frac{k}{m}\right] = T^{-2}$.

<u>Exercice 2 : Equation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti</u> (*)

Un oscillateur harmonique amorti vérifie l'équation différentielle : $m\ddot{x} + \lambda \dot{x} + k\, x = kx_{éq}$

Il peut se mettre sous l'une de ses formes canoniques :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2\, x = \omega_0^2\, x_{éq}$$

1) Quelles sont les dimensions de ω_0, appelée pulsation propre, et Q, appelé facteur de qualité ? à quoi correspond la grandeur $x_{éq}$? Etablir leurs expressions.
2) Donner l'équation caractéristique associée, ainsi que les expressions du discriminant et du discriminant réduit associés à cette équation caractéristique.
3) Pour chacun des trois régimes possibles :
    a) Donner le nom de chaque régime ainsi que les différentes conditions associées.
    b) Donner la forme usuelle de la solution générale à l'équation homogène.

4) Etablir l'expression complète de $x(t)$ en supposant qu'à l'instant initial : vitesse initiale $v_0 = 0$, position initiale $X_0 = x_0 - x_{éq}$

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = kx_{eq}$$

$\div m$ $$\hookrightarrow \ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_{eq}.$$

Forme canonique :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$$

1) On identifie :

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{m} = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \omega_0 \frac{m}{\lambda} = \sqrt{\frac{k}{m}}\frac{m}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{km} \\ \frac{k}{m} = \omega_0^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

x_{eq} : Position à l'équilibre, en régime permanent.

Q : facteur de qualité.

ω_0 : pulsation propre.

$$[\ddot{x}] = \left[\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}\right] = [\omega_0^2 x] = m.s^{-2}$$

$[\omega_0^2 x] = m.s^{-2}$ avec $[x] = m$

d'où : $[\omega_0^2] = s^{-2}$

$[\omega_0] = s^{-1}$ (ou rad.s^{-1})

$\left[\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}\right] = m.s^{-2}$ avec $[\dot{x}] = m.s^{-1}$

$[\omega_0] = s^{-1}$

d'où : $[Q] = 1$.

2) Éq. caractéristique associée :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

Discriminant :

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

3) Voir cours :

4) $\underline{\Delta > 0 \text{ ou } Q < \frac{1}{2}}$: Régime apériodique.

SEH : $x_H = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

SP : $x_P = x_{eq}$

SG : $\underline{x(t) = x_{eq} + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}}$

CI : $x(0) = x_{eq} + X_0$

$\dot{x}(0) = 0$

$\dot{x}(t) = r_1 Ae^{r_1 t} + r_2 Be^{r_2 t}$

D'où :

$$\begin{cases} \underbrace{x(0)}_{\text{maths}} = x_{eq} + A + B \underbrace{=}_{\text{Phys/CI}} x_{eq} + X_0 \\ \underbrace{\dot{x}(0)}_{\text{maths}} = r_1 A + r_2 B \underbrace{=}_{\text{Phys/CI}} 0 \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \cancel{x_{eq}} + A + B = \cancel{x_{eq}} + X_0 & (1) \\ r_1 A + r_2 B = 0 & (2) \end{cases}$$

Résolution : (1) $\Rightarrow$ $B = X_0 - A$.

(2) $r_1 A + r_2 (X_0 - A) = 0$

$r_1 A + r_2 X_0 - r_2 A = 0$

$A(r_1 - r_2) = -r_2 X_0$

$A = -\frac{r_2}{r_1 - r_2} X_0$

$\underline{A = \frac{r_2}{r_2 - r_1} X_0}$

Avec :

$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} +/- \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$

D'où : $B = X_0 - A = X_0 + \frac{r_2}{r_1 - r_2} X_0 = \underline{\frac{r_1}{r_1 - r_2} X_0}$

$\Delta < 0$ ou $Q > \frac{1}{2}$: Régime pseudo-périodique

SEH : $x_H = e^{-\lambda t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$.

SP : $x_p = x_{eq}$

SG : $x(t) = x_{eq} + e^{-\lambda t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$

CI : $x(0) = x_{eq} + X_0$

$\dot{x}(0) = 0$

$\dot{x}(t) = e^{-\lambda t}(-\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t)$.

$-\lambda e^{-\lambda t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$.

D'où :

$$\begin{cases} \underbrace{x(0)}_{\text{maths}} = x_{eq} + A \underbrace{=}_{\text{Phys / CI}} x_{eq} + X_0 \\ \underbrace{\dot{x}(0)}_{\text{maths}} = \omega B - \lambda A \underbrace{=}_{\text{Phys / CI}} 0. \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \cancel{x_{eq}} + A = \cancel{x_{eq}} + X_0 \Rightarrow A = X_0 \\ \omega B - \lambda A = 0 \Rightarrow B = \frac{\lambda}{\omega} A \end{cases}$$

$\Delta = 0$ ou $Q = \frac{1}{2}$: Régime critique

SEH : $x_H(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$

SP : $x_p = x_{eq}$

SG : $x(t) = x_{eq} + (At + B)e^{-\omega_0 t}$

CI : $\begin{cases} x(0) = x_{eq} + X_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

$\dot{x}(t) = Ae^{-\omega_0 t} - \omega_0(At + B)e^{-\omega_0 t}$

D'où :

$$\begin{cases} \underbrace{x(0)}_{\text{maths}} = x_{eq} + B \underbrace{=}_{\text{CI}} x_{eq} + X_0 \\ \dot{x}(0) = A - \omega_0 B = 0. \end{cases}$$

On obtient :

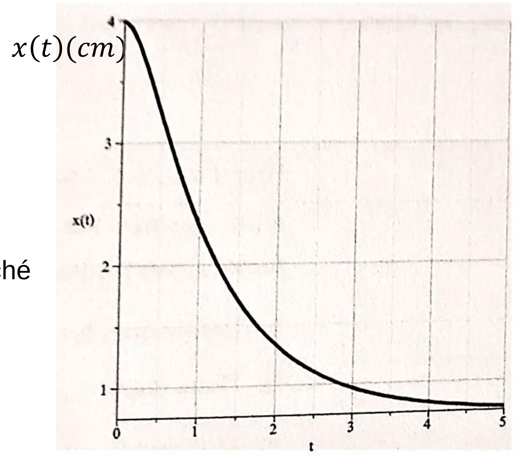
$B = X_0$

$A = \omega_0 B = \omega_0 X_0$

Exercice 3 : Analyse d'un régime transitoire à partir d'un enregistrement temporel (*)

On s'intéresse à un système masse-ressort horizontal immergé dans un fluide, formant un oscillateur harmonique amorti.

L'enregistrement de sa position repérée à partir de sa position d'équilibre est donnée ci-contre.



1) Déterminer les conditions initiales avec lesquelles on a lâché la masse.
2) Donner les caractéristiques du régime permanent atteint.
3) Définir le type de régime observé en justifiant la réponse.

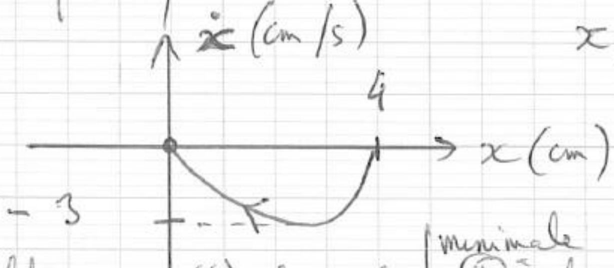
Exercice 3 : Analyse d'un régime transitoire à partir d'un enregistrement temporel

1) $x(0) = 4$ cm.
$\dot{x}(0) = 0$ (Tangente à l'origine nulle).

2) Régime permanent : $x(\infty) = 0{,}7$ cm
$\dot{x}(\infty) = 0$

3) Régime apériodique.

4) $x_{max} = 4$ cm

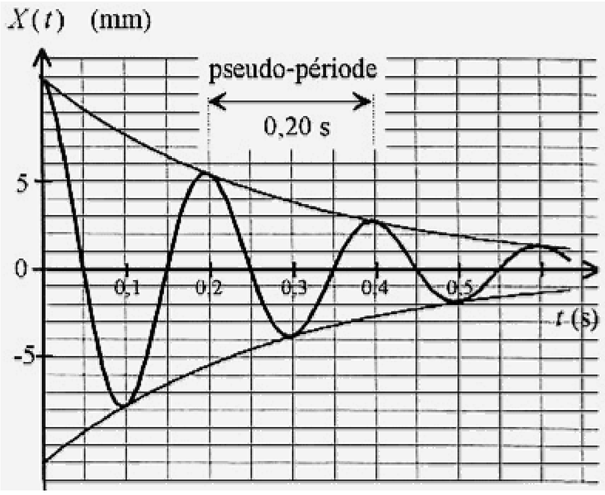


On lit sur $x(t)$ la pente ~~maximale~~ minimale, c'est à dire $\dot{x}_{min} \simeq -3$ cm/s

Exercice 4 : Analyse d'un tracé ; régime pseudo-périodique (**)

On réalise le relevé expérimental ci-contre.

Déterminer la période propre, la fréquence propre, le facteur de qualité et le temps de relaxation de cet oscillateur amorti.



Exercice 4 : Analyse d'un tracé ; régime pseudo-périodique

* $X(\infty) = 0$

graph :

$X(0) = 11\ mm$

$X(T) = 5{,}5\ mm$

$X(2T) = 2{,}8\ mm$

$X(3T) = 1{,}3\ mm$

$$\delta_1 = \ln\left(\frac{X(0) - X_\infty}{X(T) - X_\infty}\right) = 0{,}69$$

$$\delta_2 = \ln\left(\frac{X(T) - X_\infty}{X(2T) - X_\infty}\right) = 0{,}68$$

$$\delta_3 = \ln\left(\frac{X(2T) - X_\infty}{X(3T) - X_\infty}\right) = 0{,}77$$

Concl :

$\delta \simeq 0{,}7 = cte$

* lecture graphique pseudo-période :

$T = 0{,}2\ s$

* On exploite le décrément logarithmique :

$$\delta = \lambda T = \frac{\omega_0 T}{2Q}$$

On détermine l'amortissement λ :

$$\lambda = \frac{\delta}{T} = \frac{0{,}7}{0{,}2} = 3{,}5\ s^{-1}$$

* On en déduit le temps de relaxation τ :

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3{,}5} = 0{,}29\ s$$

* Pseudo-pulsation :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}2} = 10\pi = 31{,}4\ rad.s^{-1}$$

* Pseudo-fréquence

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 5\ Hz$$

* Pulsation propre :

On sait que :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

D'où :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$$

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \lambda^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \lambda^2} = \sqrt{31{,}4^2 + 3{,}5^2} = 31{,}6\ rad.$$

Remarque : $\omega_0 \simeq \omega$ car $\lambda \ll \omega$

* Fréquence propre :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 5,03\ \mathrm{Hz} \simeq f = 5\ \mathrm{Hz}$$

* Période propre :

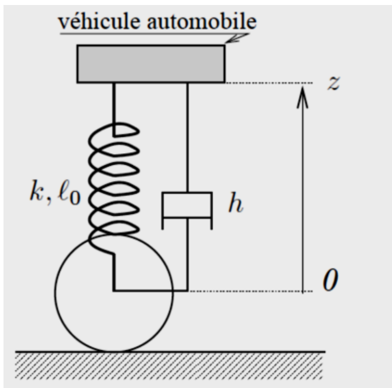
$$T_0 = \frac{1}{f_0} \simeq \frac{1}{f} \simeq T = 0,2\ \mathrm{s}$$

* Facteur de qualité :

$$\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{31,6}{2 \times 3,5} = 4,5$$

Exercice 5 : Suspension de voiture (**)



On modélise l'amortisseur d'une roue de voiture à l'aide d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, en parallèle avec un amortisseur de coefficient de frottement fluide h, correspondant à une puissance des forces de frottement $P_{fr} = -hv^2$.

Une masse $\frac{m}{4}$ est posée sur ce dispositif et peut se déplacer verticalement sur l'axe (Oz) lié au référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ supposé galiléen.

On donne $m = 1\,200$ kg.

1) Lors du changement d'une roue, on soulève la masse $\frac{m}{4}$ d'une hauteur d = 25 cm, ce qui correspond au moment où la roue (de masse négligeable) ne touche plus le sol : la longueur du ressort vaut alors 40 cm, et on peut alors considérer qu'aucune force ne s'exerce plus sur le ressort (alors qu'à l'équilibre, le ressort est comprimé par le poids du véhicule). Montrer que la constante de raideur du ressort vaut $k = \frac{mg}{4d}$.
2) Déterminer et calculer h afin que le dispositif fonctionne en régime critique (la roue étant sur le sol à l'arrêt et la masse $\frac{m}{4}$ en mouvement vertical).
3) On enfonce la masse $\frac{m}{4}$ d'une hauteur d' = 5 cm et on lâche le système à $t = 0$ sans vitesse initiale. Déterminer l'évolution de l'altitude z de la masse $\frac{m}{4}$.
4) On charge maintenant l'amortisseur au maximum : la masse totale du véhicule vaut m = 1 700 kg. Déterminer les paramètres Q et ω_0 de l'amortisseur.
5) Tracer l'allure de sa réponse lorsqu'on enfonce de x_0 = 5 cm la masse $\frac{m}{4}$ et qu'on lâche sans vitesse initiale. Conclure.

<u>Exercice 6 : viscosimètre oscillant</u> (***)

Une bille de rayon r et de masse m est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur au repos l_0. Déplacée dans un liquide de coefficient de viscosité η, la bille est soumise à une force de frottement $\vec{f}$ donnée par la formule de Stokes $\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de la sphère dans le liquide. On néglige la poussée d'Archimède.

1. Etablir l'équation du mouvement de la sphère plongée dans le liquide et en déduire l'expression de la pseudo-période T des oscillations, en fonction de m, k, η et r.
2. Dans l'air, où les frottements fluides sont négligeables, la période des oscillations est T_0. Déterminer le coefficient de viscosité η du liquide, en fonction de m, r, T et T_0.

1.

Référentiel : Terrestre / Labo

Système : Bille → Point matériel de masse m

Bilan des forces :

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e_z}$$

$$\vec{T} = -k(\ell-\ell_0)\vec{u}_{sortant}$$

$$= -k(\ell-\ell_0)\vec{e_z}$$

$$\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v} = -6\pi\eta r v\vec{e_z}$$

PFD : $\left(\dfrac{d\vec{p}_{M/R}}{dt}\right)_R = \sum \vec{F}$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}\vec{e_z} = mg\vec{e_z} - k(\ell-\ell_0)\vec{e_z} - 6\pi\eta r\frac{dz}{dt}\vec{e_z}$$

Avec $\ell - \ell_0 = \ell - \ell_{eq} + \ell_{eq} - \ell_0$.
et en projetant sur l'axe z

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \underbrace{mg - k(\ell_{eq}-\ell_0)}_{=0 \text{ (statique)}} - k(\ell - \ell_{eq}) - 6\pi\eta r\frac{dz}{dt}$$

Avec $\ell - \ell_{eq} = z$
On obtient :

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -kz - 6\pi\eta r\frac{dz}{dt}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + 6\pi\eta r\frac{dz}{dt} + kz = 0$$

Sous forme canonique :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \underbrace{\left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)}_{\frac{\omega_0}{Q}}\frac{dz}{dt} + \underbrace{\left(\frac{k}{m}\right)}_{\omega_0^2}z = 0$$

Par identification :

$$\begin{cases} \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{6\pi\eta r}{m} & (1) \\ \omega_0^2 = \dfrac{k}{m} \end{cases}$$

Equation caractéristique :

$$r^2 + \frac{6\pi\eta r}{m}r + \frac{k}{m} = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m} < 0$$ car oscillations ⇒ Régime pseudo-périodique.

$$r_{1,2} = \underbrace{-\frac{6\pi\eta r}{2m}}_{\lambda} \pm \underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{4\frac{k}{m} - \left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)^2}}_{\omega}$$

$$r_{1,2} = -\lambda \pm j\omega$$

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4\frac{k}{m} - \left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)^2}$$

d'où :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{\sqrt{4\frac{k}{m} - \left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)^2}}$$

$$T = \frac{2\pi m}{\sqrt{km - (3\pi\eta r)^2}}$$

2. Dans l'air : même bilan des forces mais avec $\vec{f}' = \vec{0}$ (frottements négligés).

d'où : équation du mouvement :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m}z = 0$$

$$\omega_0^2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

On sait que : $\omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^2$

Avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$\frac{\omega_0^2}{Q^2} = \left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)^2 \text{ d'après (1)}$$

d'où :

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{9\pi^2\eta^2r^2}{m^2}$$

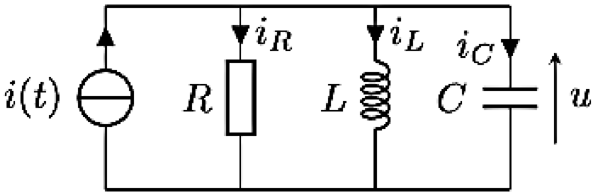
d'où :

$$\eta = \frac{2m}{3r}\sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}}$$

<u>Exercice 7 : Circuit RLC parallèle soumis à un échelon de courant</u> (**)

On considère le circuit ci-dessous. A l'instant t = 0, le générateur de courant impose un courant *i(t)* passant de 0 à η = 10 mA. On a : R = 50 Ω, C = 400 nF, L = 10 mH.

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par *u(t)* pour $t > 0$.
2. Mettre cette équation sous forme canonique et donner l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q en fonction de R, L et C.
3. Quel est le type de régime obtenu pour l'évolution de *u(t)* : apériodique, critique ou pseudopériodique ?
4. Justifier qu'à l'instant t = 0, $i_L(0) = 0$ et $u(0) = 0$.
5. En déduire l'expression de *u(t)* pour $t > 0$.
6. Représenter l'allure de *u(t)* pour $t > 0$.



1.2. $i = i_R + i_C + i_L$

avec $\begin{cases} u = R i_R \\ u = L \dfrac{di_L}{dt} \\ i = C \dfrac{du}{dt} \end{cases}$

d'où :

$$i = \frac{u}{R} + C\frac{du}{dt} + i_L$$

En dérivant par rapport au temps :

$$0 = \frac{1}{R}\frac{du}{dt} + C\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{di_L}{dt}$$

En multipliant par L :

$$0 = \frac{L}{R}\frac{du}{dt} + LC\frac{d^2u}{dt^2} + \underbrace{L\frac{di_L}{dt}}_{u}$$

En mettant sous forme canonique :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \underbrace{\left(\frac{1}{RC}\right)}_{\frac{\omega_0}{Q}}\frac{du}{dt} + \underbrace{\left(\frac{1}{LC}\right)}_{\omega_0^2} u = 0$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\Rightarrow Q = \omega_0 RC \qquad \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{LC}} RC = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

3. On calcule Q

$$Q = 50 \times \sqrt{\frac{400.10^{-9}}{10.10^{-3}}} = 0{,}32$$

$$Q < \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Régime apériodique}$$

4. Continuité de la tension aux bornes du condensateur

$\Rightarrow u(0^+) = u(0^-) = 0 \rightarrow$ 1ère condition initiale

$\Rightarrow i_R(0^+) = 0$ également

Continuité du courant dans la bobine

$\Rightarrow i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$

Conclusion :

Pour $t = 0^+$, $i_R = i_L = 0$

d'où : $I = i_C(0^+) = C \dfrac{du}{dt}(0^+)$

d'où : $\dfrac{du}{dt}(0^+) = \dfrac{I}{C} \rightarrow$ 2nd condition initiale.

5. Régime apériodique (libre).

$$u(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

avec $\begin{cases} r_1 = -\dfrac{\omega_0}{2Q} + \dfrac{\omega_0}{2}\sqrt{\dfrac{1}{Q^2} - 4} \\ r_2 = -\dfrac{\omega_0}{Q} - \dfrac{\omega_0}{2}\sqrt{\dfrac{1}{Q^2} - 4} \end{cases}$

$$\frac{du}{dt} = r_1 A e^{r_1 t} + r_2 B e^{r_2 t}$$

$$\frac{du}{dt}(0^+) = A r_1 + B r_2.$$

d'où : $\begin{cases} u(0^+) = A + B = 0 \Rightarrow B = -A \\ \dfrac{du}{dt}(0^+) = A r_1 + B r_2 = \dfrac{I}{C} \end{cases}$

$$A r_1 - A r_2 = \frac{I}{C}$$

$$A = \frac{I}{C(r_1 - r_2)} \qquad B = \frac{I}{C(r_2 - r_1)}$$

d'où la solution :

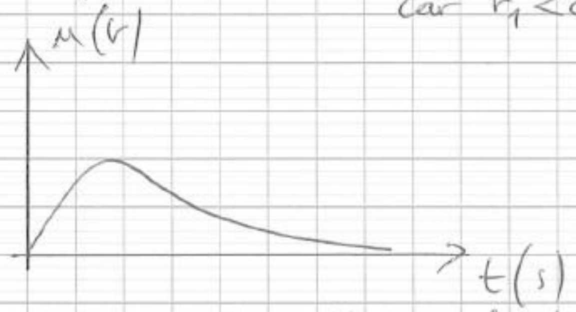
$$u(t) = \frac{I}{C(r_1 - r_2)}\left(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}\right)$$

6. On sait que

$$u(0^+) = 0$$

$$\frac{du}{dt}(0^+) = \frac{I}{C} \neq 0$$

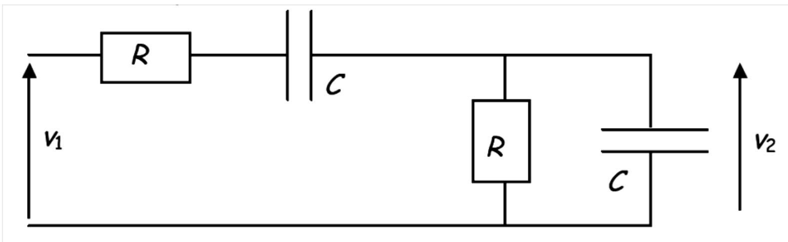
lorsque $t \to +\infty$, $u(t) \to 0$
car $r_1 < 0$ et $r_2 < 0$

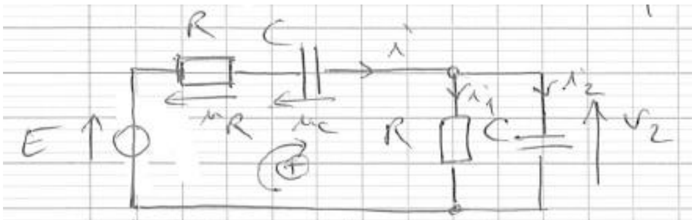


Exercice 8 : Oscillations électriques amorties, régime apériodique (**)

Les condensateurs d'un pont de Wien sont initialement déchargés. On applique en entrée un échelon de tension : $v_1(t) = 0$ pour $t < 0$, $v_1(t) = E$ pour $t > 0$.

Établir l'équation différentielle régissant les variations de v_2, et la résoudre.





Pour $t > 0$

Loi des noeuds : $i = i_1 + i_2$

Loi des mailles :

$$E - u_R - u_C - v_2 = 0$$

$$E - Ri - u_C - v_2 = 0$$

$$E - R(i_1 + i_2) - u_C - v_2 = 0$$

$$E - R\left(\frac{v_2}{R} + C\frac{dv_2}{dt}\right) - u_C - v_2 = 0$$

En dérivant /t

$$-\frac{dv_2}{dt} - RC\frac{d^2v_2}{dt^2} - \frac{du_C}{dt} - \frac{dv_2}{dt} = 0$$

$$2\frac{dv_2}{dt} + RC\frac{d^2v_2}{dt^2} + \frac{du_C}{dt} = 0$$

En multipliant par C :

$i = i_1 + i_2$

$$2C\frac{dv_2}{dt} + RC^2\frac{d^2v_2}{dt^2} + \left(C\frac{du_C}{dt}\right) = 0$$

$$2C\frac{dv_2}{dt} + RC^2\frac{d^2v_2}{dt^2} + \left(\frac{v_2}{R} + C\frac{dv_2}{dt}\right) = 0$$

$$3C\frac{dv_2}{dt} + RC^2\frac{d^2v_2}{dt^2} + \frac{v_2}{R} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2v_2}{dt^2} + \frac{3}{RC}\frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{(RC)^2}v_2 = 0}$$

Forme canonique

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{3}{RC} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{(RC)^2}$$

d'où :

$$\left|\begin{array}{l} \omega_0 = \dfrac{1}{RC} \\ Q = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \text{Régime apériodique} \end{array}\right.$$

Résolution :

$$v_2(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

avec $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$

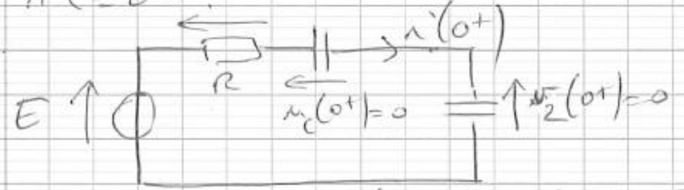
Conditions initiales :

$v_2(0^+) = v_2(0^-) = 0$

Condensateur initialement déchargé

$\Rightarrow i_1 = 0$

À $t = 0^+$:



d'où : $i(0^+) = \frac{E}{R}$

$$C\frac{dv_2}{dt}(0^+) = \frac{E}{R}$$

$$\frac{dv_2}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC}$$

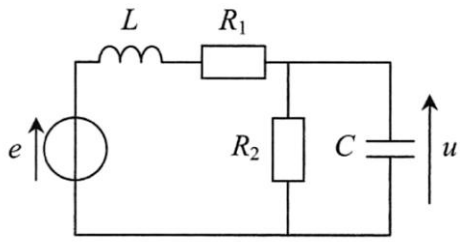
$$\begin{cases} v_2(0^+) = A + B = 0 \Rightarrow B = -A \\ \dfrac{dv_2}{dt}(0^+) = r_1 A + r_2 B = \dfrac{E}{RC} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (r_1 - r_2)A = \frac{E}{RC} \Rightarrow A = \frac{E}{(r_1 - r_2)RC}$$

$$\boxed{\text{Solution : } v_2(t) = \frac{E}{(r_1 - r_2)RC}\left(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}\right)}$$

8

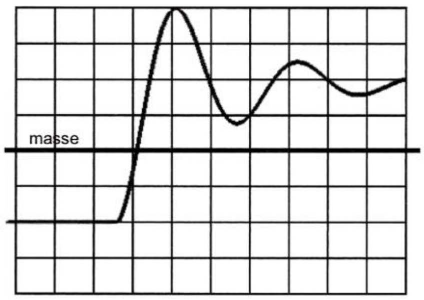
Exercice 9 : Décrément logarithmique (***)



On étudie la réponse $u(t)$ à un échelon de tension $e(t)$ dans le circuit ci-contre.

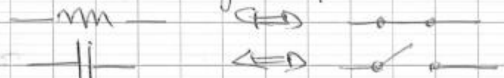
1) Déterminer la valeur $u(\infty)$ vers laquelle tend $u(t)$ lorsque la valeur $e(t)$ est E.
2) Etablir l'équation différentielle caractéristique de ce circuit et la mettre sous forme canonique en exprimant Q et ω_0 en fonction de L, C, R_1 et R_2.
3) On observe sur un oscilloscope la courbe $u(t)$ ci-contre.

Sachant que L = 30 mH et E = 10 V, déterminer la valeur numérique de R_1, R_2 et C. On donne le calibre vertical qui est de 4,5V/div.



1 div = 200 µs

1) $t \to +\infty \iff$ Régime permanent.



$u(\infty) = E\dfrac{R_2}{R_1+R_2}$

(Diviseur de tension).

2)

$$E - L\frac{di}{dt} - R_1 i - u = 0$$

et $i = i_C + i_2 = C\dfrac{du}{dt} + \dfrac{u}{R_2}$

$$E - L\frac{d}{dt}\left(C\frac{du}{dt} + \frac{u}{R_2}\right) - R_1\left(C\frac{du}{dt} + \frac{u}{R_2}\right) - u = 0$$

$$E - LC\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{L}{R_2}\frac{du}{dt} - R_1C\frac{du}{dt} - \frac{R_1}{R_2}u - u = 0$$

$$LC\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_2} + R_1C\right)\frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)u = E$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \underbrace{\left(\frac{1}{R_2C} + \frac{R_1}{L}\right)}_{\frac{\omega_0}{Q} \text{ ou } 2\xi\omega_0}\frac{du}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}\left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)}_{\omega_0^2}u = \frac{E}{LC}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}\,\frac{R_1+R_2}{R_2}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_1+R_2}{R_2}}$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{R_2C} + \frac{R_1}{L} = \frac{L+R_1R_2C}{R_2LC}$$

$$Q = \omega_0\,\frac{R_2LC}{L+R_1R_2C}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_1+R_2}{R_2}}\,\frac{R_2LC}{L+R_1R_2C}$$

$$Q = \frac{\sqrt{LC\,R_2(R_1+R_2)}}{(L+R_1R_2C)}$$

A vérifier : $R_2 \to \infty \Rightarrow Q \to \frac{\sqrt{LCR_2^2}}{R_1R_2C} = \frac{1}{R_1}\sqrt{\frac{L}{C}}$ OK

3) $u(\infty) = E\,\frac{R_2}{R_1+R_2} = 9\,V$ d'après courbe

Régime pseudo périodique

$\Rightarrow u(t) = \underset{\uparrow\ SP}{u(\infty)} + e^{-\mu t}\underset{\uparrow\ SEH}{(A\cos\omega t + B\sin\omega t)}$

$\mu = \frac{\omega_0}{2Q}$ $\qquad u(t) - u(\infty) = e^{-\mu t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$

Décrement logarithmique : δ

Entre 2 maxima : $\ln\left(\frac{u(t)-u(\infty)}{u(t+T)-u(\infty)}\right) = \frac{\omega_0}{2Q}T = \mu T$

Démo : $u(t) - u(\infty) = e^{-\mu t}$ pour 1 maximum à T

$u(t+T) - u(\infty) = e^{-\mu t}e^{-\mu T}$ pour le maximum suivant :

δ

D'où : $\ln\left(\dfrac{u(t)-u(\infty)}{u(t+T)-u(\infty)}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{e^{-\mu T}}\right) = \ln\left(e^{\mu T}\right) = \mu T = \dfrac{\omega_0}{2Q}T$

lecture graphique : $T \Leftrightarrow 3$ divisions

$T = 600\ \mu s$.

et

0 : Premier max

1 : Deuxième max

$$\ln\left(\frac{u(0)-u(\infty)}{u(1)-u(\infty)}\right) = \ln\left(\frac{18-9}{11{,}25-9}\right) = \ln\left(\frac{9}{2{,}25}\right) = \ln 4 = 1{,}4.$$

On a : $\omega = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$

$$\omega^2 = \omega_0^2\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)$$

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2.$$

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} + \frac{\delta^2}{T^2}$$

D'où : On a :

$$\frac{4\pi^2}{T^2}+\frac{\delta^2}{T^2} = \omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}+\frac{\delta^2}{T^2} = \frac{1}{LC}\,\frac{R_1+R_2}{R_2} \quad (1)$$

$$u(\infty) = E\,\frac{R_2}{R_1+R_2} = 9 \quad (2)$$

$\delta = 1{,}4$ (3)

$T = 600\ \mu s$ (4)

$E = 10\,V$ (5) $L = 30\,mH$. (6)

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{L+R_1R_2C}{R_2LC} \quad (7)$$

D'après (2) et (3) : $\dfrac{R_2}{R_1+R_2} = 0,9$.

D'après (1) :

$$C = \frac{1}{L}\,\frac{R_1+R_2}{R_2}\,\frac{1}{\dfrac{4\pi^2}{T^2}+\dfrac{\delta^2}{T^2}}$$

$$= \frac{1}{30.10^{-3}} \times \frac{1}{0,9} \times \frac{(600.10^{-6})^2}{4\pi^2 + 1,4^2}$$

$$\simeq 300 \text{ nF}$$