

CPGE ATS

Programme de colles – Semaine 8 (17 au 22 novembre 2025)

Chapitres étudiés et questions de cours :

M4 E3 Oscillateur harmonique

T1 Structure et transformation de la matière (début)

Réponses attendues en bleu ou manuscrit.

1^{ère} question de cours : questions 1 à 10.

2^{ème} question de cours : questions 11 à 15.

- 1) Equation différentielle du deuxième ordre (oscillateur harmonique amorti) : forme canonique, équation caractéristique et discriminant associé.

Formes canoniques :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = cte \quad \text{avec } Q \text{ facteur de qualité, } \omega_0 \text{ pulsation propre}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = cte \quad \text{avec } \xi = \frac{1}{2Q} \text{ facteur d'amortissement}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = cte \quad \text{avec } \lambda = \xi\omega_0 = \frac{\omega_0}{2Q}$$

Equation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0 \quad \text{Discriminant : } \Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) \Rightarrow 2 \text{ racines } r_1 \text{ et } r_2$$

- 2) La forme canonique de l'équation différentielle du deuxième ordre (oscillateur harmonique amorti) étant donnée ci-dessous, donner les conditions du régime aperiodique, et la solution associée.

Forme canonique :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = cte \quad \text{avec } Q \text{ facteur de qualité, } \omega_0 \text{ pulsation propre}$$

Facteur de qualité Q	Coefficient d'amortissement ξ	Discriminant Δ	Racines r_1 et r_2	Régime	Solution
$Q < \frac{1}{2}$	$\xi > 1$	$\Delta > 0$	2 racines réelles négatives $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2} \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$	Apériodique	$y(t) = SP + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

A et B déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général $y(0)$ et $\frac{dy}{dt}(0)$.

- 3) La forme canonique de l'équation différentielle du deuxième ordre (oscillateur harmonique amorti) étant donnée ci-dessous, donner les conditions du régime pseudo-périodique, et la solution associée.

Forme canonique :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = cte \quad \text{avec } Q \text{ facteur de qualité, } \omega_0 \text{ pulsation propre}$$

Facteur de qualité Q	Coefficient d'amortissement ξ	Discriminant Δ	Racines r_1 et r_2	Régime	Solution
$Q > \frac{1}{2}$	$\xi < 1$	$\Delta < 0$	2 racines complexes conjuguées $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ Ou $r_{1,2} = -\lambda \pm j\omega$ $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ $\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$	Pseudo-périodique	$y(t) = SP + e^{-\lambda t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$

A et B déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général $y(0)$ et $\frac{dy}{dt}(0)$.

- 4) La forme canonique de l'équation différentielle du deuxième ordre (oscillateur harmonique amorti) étant donnée ci-dessous, donner les conditions du régime critique, et la solution associée.

Forme canonique :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = cte \quad \text{avec } Q \text{ facteur de qualité, } \omega_0 \text{ pulsation propre}$$

Facteur de qualité Q	Coefficient d'amortissement ξ	Discriminant Δ	Racines r_1 et r_2	Régime	Solution
$Q = \frac{1}{2}$	$\xi = 1$	$\Delta = 0$	1 racine double $r = -\omega_0$	Critique	$y(t) = SP + (At + B)e^{-\omega_0 t}$

A et B déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général $y(0)$ et $\frac{dy}{dt}(0)$.

- 5) Donner la définition du décrétement logarithmique.

Dans le cas du régime pseudo-périodique :

Décrétement logarithmique : $\delta = \ln \left[\frac{y(t) - y(\infty)}{y(t+T) - y(\infty)} \right] = \ln \left[\frac{1}{e^{-\lambda T}} \right] = \lambda T = \frac{\omega_0}{2Q} T$

avec $y(t)$ et $y(t+T)$ valeurs de 2 « maxima » successifs

6) Donner les analogies mécanique – électricité.

Mécanique	Electricité
Position x (m)	Charge q (C)
Vitesse v (m.s ⁻¹)	Intensité i (A)
Masse m (kg)	Inductance L (H)
Raideur k (N.m ⁻¹)	$\frac{1}{C}$ avec Capacité C (F)
Frottement h (N.m ⁻¹ .s)	Résistance R (Ω)
Force F (N)	Tension u (V)

7) Définir : atome, noyau, nucléon, proton, neutron, électron, isotope et notation.

Atome : Edifice électriquement **neutre**, constitué d'un **noyau** chargé positivement et entouré d'un cortège d'**électrons** chargés négativement.

Noyau : Assemblage de **nucléons** = **protons + neutrons**

- **Nombre de charge** (ou **numéro atomique**) Z : **Nombre de protons, chargés positivement**
- **Nombre N** : **Nombre de neutrons, qui ne portent pas de charge électrique**
- **Nombre de masse A** : $A = Z + N = \text{nombre de nucléons}$

Isotopes : désigne des noyaux ayant un même numéro atomique Z mais des nombres de masse A différents :



Masse molaire d'un isotope A_ZX de nombre de masse A : **$A \text{ g.mol}^{-1}$** .

8) Relations entre masse et quantité de matière.

Masse molaire d'une espèce : $M = \frac{m}{n}$ (en $kg.mol^{-1}$ ou en $g.mol^{-1}$).

Nombre de moles de cette espèce : $n = \frac{m}{M}$ avec :

n : quantité de matière (en mol) ; m : masse de l'échantillon (en kg ou g).

Masse molaire d'un isotope A_ZX de nombre de masse A : **$A \text{ g.mol}^{-1}$** .

9) Equation d'état des gaz parfaits + grandeurs + unités.

Equation d'état des gaz parfaits : $PV = nRT$

P pression en Pa ; V volume en m^3 ; n quantité de matière en mol ; T température en K

R est appelée **constante de gaz parfaits**, $R = 8,31 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$

10) Définir la concentration d'un soluté, le titre ou fraction molaire, la densité.

Concentration :

$$c_i = \frac{n_{\text{soluté}}}{V_{\text{solution}}} \text{ en mol.m}^{-3}$$

Titre ou fraction molaire x_i d'un corps A_i dans une phase φ donnée :

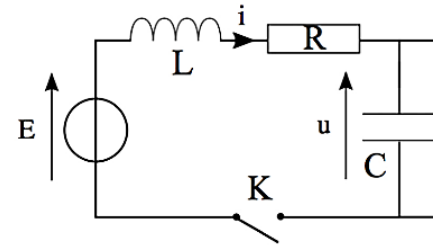
$$x_i = \frac{n_i}{n_{TOT}} \quad \text{et} \quad \sum_i x_i = 1$$

Densité d'un corps (par rapport à un corps de référence) : Rapport de leurs masses volumique prises dans les mêmes conditions de pression et de température.

- pour les phases condensées : $d = \frac{\rho}{\rho_{\text{eau}}}$
- pour les gaz : $d = \frac{\rho}{\rho_{\text{air}}}$

Exercices de cours :

- 11) Pour le circuit ci-contre (interrupteur fermé à $t = 0$) : Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes du condensateur. La mettre sous forme canonique, identifier les constantes introduites.



Appliquer la loi des mailles : $E - u_L - u_R - u = 0$

Appliquer la loi entre u et i pour chaque récepteur. $u_L = L \frac{di}{dt}$; $i = C \frac{du}{dt}$; $u_R = R \cdot i$

On obtient sous forme canonique :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = \frac{1}{LC} E$$

On identifie à la forme canonique suivante :

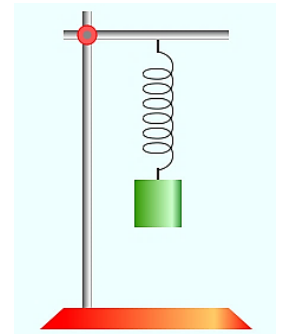
$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E$$

On détermine par identification :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ pulsation propre (rad.s}^{-1}\text{)}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ facteur de qualité (sans dimension)}$$

- 12) Pour le système masse-ressort **amorti** ci-contre, on écarte la masse de sa position d'équilibre ; déterminer l'équation du mouvement. La mettre sous forme canonique ; identifier les constantes introduites.



Graduer axe z vers le bas.

Prendre l'origine de l'axe au point de fixation du ressort.

Référentiel : Terrestre, supposé galiléen

Système : Masse m .

Bilan des forces extérieures appliquées :

Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$

Force de rappel élastique : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_s$ avec $\vec{u}_s$ vecteur sortant du ressort.

$\vec{u}_s = \vec{u}_z$ et $l = z$

On obtient : $\vec{F} = -k(z - l_0)\vec{u}_z$

Force de frottement fluide : $f = -h\vec{v} = -h\dot{z}\vec{u}_z$

PFD : $\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{z}\vec{u}_z$

En projetant sur z on obtient :

$$mg - k(z - l_0) - h\dot{z} = m\ddot{z}$$

Sous forme canonique :

$$\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k}{m}l_0$$

On identifie à la forme canonique suivante :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = g + \frac{k}{m}l_0$$

On détermine par identification :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ pulsation propre (rad.s}^{-1}\text{)}$$

$$Q = \frac{1}{h}\sqrt{mk} \text{ facteur de qualité (sans dimension)}$$

13) (Exo 1 TD) :

L'eau a pour formule H_2O . On donne : 1_1H et ${}^{16}_8O$

- 1) Quelle est la masse molaire de l'eau ?
- 2) Quelle est la quantité de matière contenue dans 3,60 g d'eau ?
- 3) Quelle est la quantité de matière contenue dans 1,00 kg d'eau ?
- 4) Quelle est la masse de $5,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$ d'eau ?

1. $M(H_2O) = 2 \times M(H) + 1 \times M(O)$
 $= 2 \times 1 + 1 \times 16$
 $= 18 \text{ g.mol}^{-1}$
 En effet : Masse molaire d'un atome : $A \text{ g.mol}^{-1}$
 avec A nombre de masse d'un atome.

2. $n = \frac{m}{M} = \frac{3,60}{18} = 0,20 \text{ mol.}$

3. $n = \frac{m}{M} = \frac{1000}{18} = 56 \text{ mol.}$

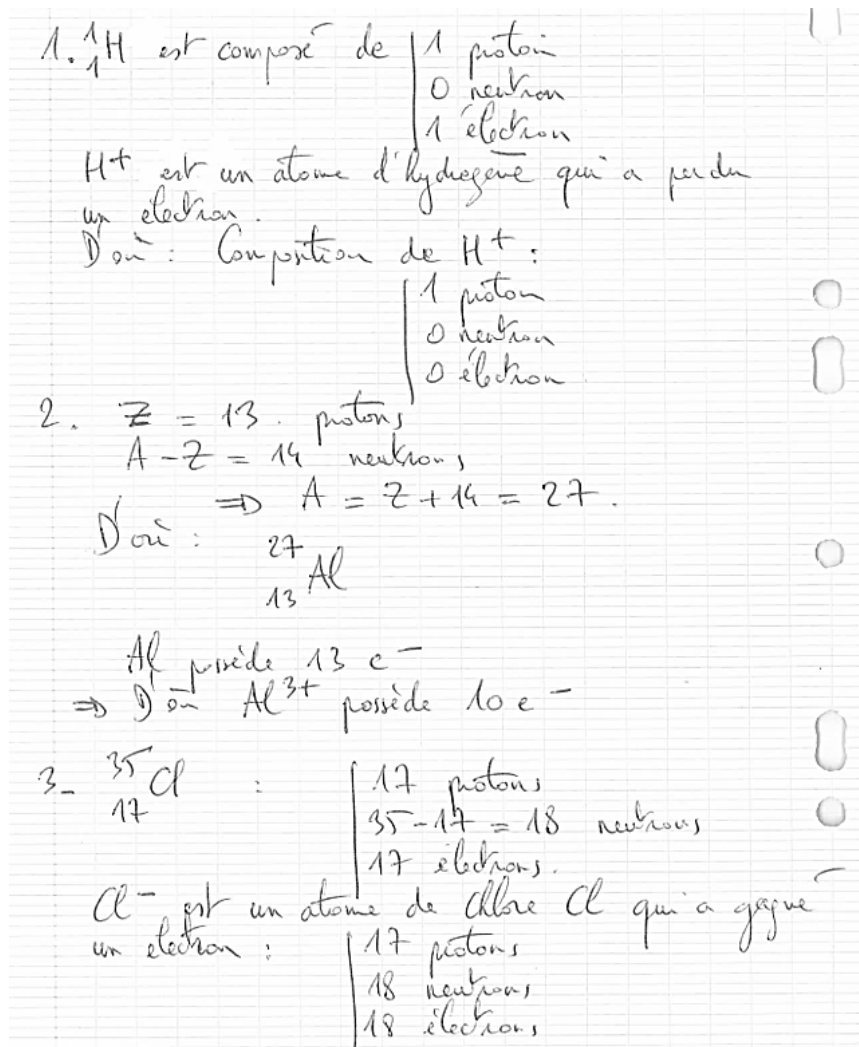
4. $m = n \times M = 5,00 \cdot 10^{-2} \times 18$
 $= 0,90 \text{ g.}$

14) (Exo 3 TD) :

- 1) Le symbole du noyau d'un atome d'hydrogène est le suivant : 1_1H . Donner, en justifiant la réponse, la composition de l'ion hydrogène de formule H^+ .
- 2) Le noyau d'un atome d'aluminium (Al) comporte 14 neutrons et 13 protons. Donner, en justifiant la réponse, le symbole du noyau de cet atome. Cet atome perd assez facilement trois électrons. Déterminer le nombre d'électrons de l'ion aluminium ainsi que son symbole.

- 3) Le symbole du noyau d'un atome de chlore est le suivant : ${}^{35}_{17}\text{Cl}$. Déterminer, en la justifiant, la composition de l'atome complet (nombre de protons, de neutrons, d'électrons). Cet atome peut gagner assez facilement un électron pour donner un ion chlorure.

Donner la composition complète de cet ion chlorure, ainsi que son symbole.



15) (Exo 10 TD) :

Dans un récipient indilatable de volume $V = 3\,000\text{ L}$, on mélange du diazote et de l'argon dans les proportions suivantes : $1/3$ d'argon et $2/3$ de diazote. La pression totale est de 2 bar et la température de 27°C . Déterminer les pressions partielles de chaque gaz, ainsi que leur quantité de matière.

11

$$x_{Ar} = \frac{1}{3} \quad x_{N_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} \text{Pressions partielles :} \\ P_{Ar} = x_{Ar} \times P_{tot} \\ = 0,67 \text{ bar} \\ P_{N_2} = 1,33 \text{ bar} \end{cases}$$

$$P_{Ar} V = n_{Ar} RT$$

$$\Rightarrow n_{Ar} = \frac{P_{Ar} \times V}{RT}$$

$$n_{Ar} = \frac{0,67 \cdot 10^5 \times 3}{8,31 \times 300}$$

$$n_{Ar} = 81 \text{ mol}$$

$$P_{N_2} V = n_{N_2} RT$$

$$\Rightarrow n_{N_2} = \frac{P_{N_2} V}{RT} = \frac{1,33 \cdot 10^5 \times 3}{8,31 \times 300}$$

$$= 161 \text{ mol}$$

Puis : de 1 à 2 exercices proposés par le colleur.

Programme ATS

Oscillateur harmonique amorti. Régimes d'évolution libre (apériodique, critique et pseudopériodique). Facteur de qualité. Temps caractéristiques d'évolution.	Établir l'équation différentielle du mouvement d'un système masse-ressort en présence d'une force de frottement dont la valeur est proportionnelle à celle de la vitesse. Écrire l'équation différentielle en faisant apparaître la pulsation propre et le facteur de qualité. Résoudre et interpréter les solutions de cette équation différentielle. Identifier le régime d'évolution à partir de représentations graphiques des variations de la position ou de la vitesse au cours du temps. Dans le cas d'un régime pseudopériodique, identifier un temps caractéristique d'amortissement et un temps caractéristique d'oscillation. Relier qualitativement le facteur de qualité au nombre d'oscillations visibles. Étudier expérimentalement les différents régimes d'oscillation d'un oscillateur harmonique mécanique amorti. Déterminer les paramètres caractéristiques de cet oscillateur : pulsation propre et facteur de qualité.
---	---

Circuit RLC série en régime dépendant du temps. Analogie mécanique.	Établir et résoudre l'équation d'évolution de la tension aux bornes du condensateur lors de sa charge ou de sa décharge, dans les différents régimes possibles. Écrire l'équation différentielle en faisant apparaître la pulsation propre et le facteur de qualité. Décrire et exploiter les analogies avec l'oscillateur harmonique mécanique amorti. Identifier les paramètres et grandeurs analogues.
--	---

Notions et contenus	Capacités exigibles
6. Structure de la matière et transformations physiques, chimiques ou nucléaires	
Noyau atomique, isotopes.	Déterminer la composition d'un noyau A_ZX . Reconnaître deux noyaux isotopes d'un même élément.
Entité chimique.	Utiliser le terme adapté parmi molécule, atome, anion et cation pour nommer une entité chimique à partir d'une formule chimique.
Quantité de matière. Masse molaire d'une entité.	Déterminer la quantité de matière d'une entité dans une masse donnée, et inversement, sa masse molaire étant fournie.

Équation d'état. Modèle du gaz parfait.	Définir et caractériser les différents états de la matière. Exploiter l'équation d'état du gaz parfait. Déterminer la masse volumique d'un gaz parfait en fonction de la température, de la pression et de sa masse molaire.
--	--

Transformation physique, transformation chimique et transformation nucléaire.	Identifier une transformation physique, une transformation chimique ou une transformation nucléaire à partir d'un bilan fourni. Caractériser les transformations isothermes, isobares, monobares et isochores.
---	---