DEVOIR SURVEILLE N°3

Durée de l'épreuve : 3 H

L'usage de la calculatrice est interdit.

CE SUJET EST LONG. IL NE S'AGIT PAS D'ESSAYER ABSOLUMENT DE LE FINIR, MAIS DE GERER AU MIEUX VOTRE TEMPS.

De nombreuses questions sont indépendantes ou proches du cours !

Lire tout l'énoncé avant de commencer, **numéroter** les feuilles et les questions, utiliser les **notations de l'énoncé**, apporter des **justifications** brèves mais précises et complètes, fournir des résultats **homogènes et** **encadrés** et des applications numériques **soulignées** et accompagnées d'une **unité.**

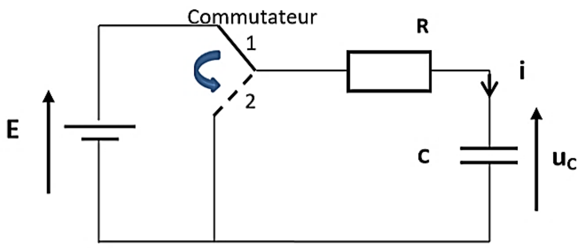
Calculatrice INTERDITE

PROBLEME N°1 : QUELQUES SYSTEMES DU PREMIER ORDRE (ENVIRON 30 % DU BAREME)

A) Charge d'un condensateur

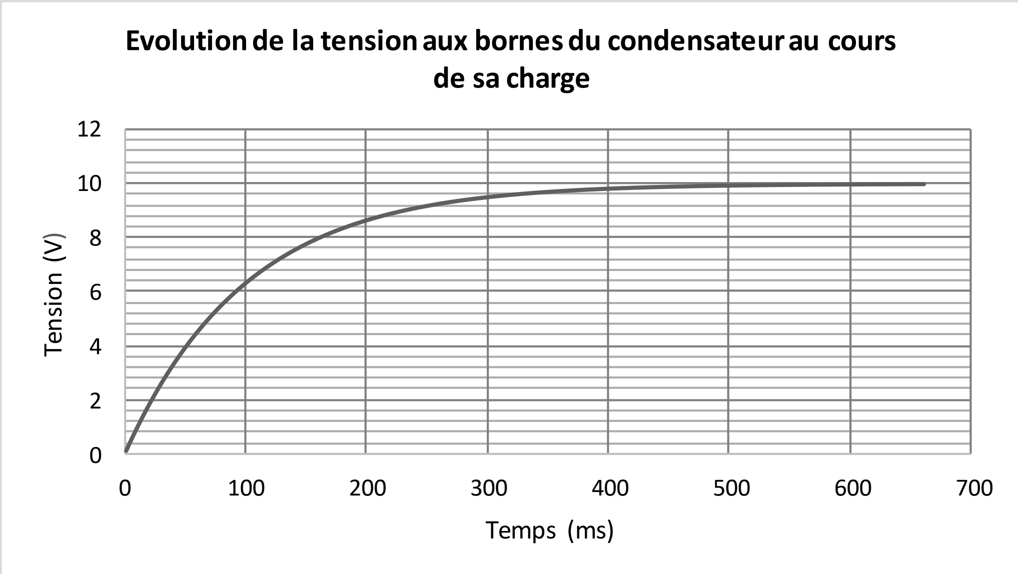
Soit le circuit ci-contre, dans lequel un générateur de tension idéal de f.é.m E peut être connecté à un dipôle constitué de l'association série d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un condensateur de capacité C.
Initialement le commutateur est en position 2 et le condensateur est déchargé.

A l'instant $t = 0$, on bascule le commutateur en position 1.



1) Quelles sont les expressions de la tension u_c et de l'intensité i en régime permanent, c'est-à-dire lorsque t tend vers l'infini ? Justifier.

2) **Etude du circuit pour $t \geq 0$**
   a) Etablir l'équation différentielle vérifiée par u_C.
   b) Résoudre cette équation différentielle : Etablir l'expression de $u_C(t)$.
   c) Retrouver le résultat de la question 1).
   d) Lorsqu'on réalise ce circuit avec une résistance R = 1 kΩ, on visualise à l'oscilloscope la courbe représentative $u_C(t)$ ci-dessous.



Déterminer par des exploitations graphiques soigneusement justifiées les valeurs de E et C.

e) Déterminer l'expression de $i(t)$.

B) Chute d'une goutte d'eau

On supposera ici que l'air est immobile dans le référentiel galiléen terrestre et que sa masse volumique reste constante.

On considère la chute d'une gouttelette d'eau de rayon r et de masse volumique ρ supposée constante, située initialement à une altitude H au-dessus de la surface de la Terre avec une vitesse initiale v_0 nulle.

On supposera par ailleurs que les forces de frottements exercées par l'air sur la goutte suivent la loi de Stokes, et correspondent donc à une puissance $\mathcal{P} = -6\pi\eta_{air}rv^2$, où η_{air} correspond à la viscosité dynamique de l'air et v à la vitesse de la gouttelette.

On négligera la poussée d'Archimède s'exerçant sur la gouttelette.

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse, et en déduire l'expression du temps caractéristique τ de la chute des gouttes de pluie en fonction de η_{air}, r et m, puis de η_{air}, r et ρ.
2. En déduire que la gouttelette atteint une vitesse limite

$$v_{lim} = -\frac{2r^2}{9\eta_{air}}\rho g$$

3. Tracer l'allure de la courbe $v(t)$ représentant l'évolution de la vitesse en fonction du temps, en faisant apparaitre sur cette courbe les grandeurs τ et v_{lim}.

PROBLEME N°2 : MODELISATION D'UNE SUSPENSION DE VEHICULE (ENVIRON 25 % DU BAREME) (EXTRAIT CONCOURS TSI)

Sur un véhicule, les suspensions ont de multiples fonctions. Elles servent notamment :

- à améliorer le confort des occupants ;
- à améliorer la tenue de route en maintenant le contact entre les roues et le sol malgré ses irrégularités (amélioration de la sécurité) ;
- à diminuer l'effet, sur l'ensemble des organes mécaniques, des vibrations et impacts dus aux irrégularités de la route (diminution de l'usure et du risque de rupture).

Il existe différents types de suspensions et, dans ce problème, nous nous intéresserons à un type très répandu : les suspensions à ressorts. De manière simplifiée, ces suspensions se composent d'un ressort qui assure la liaison entre les roues (masses non suspendues) et la caisse (masse suspendue) et d'un système d'amortissement.

Le but de ce problème est d'étudier certaines caractéristiques des suspensions à ressort. En particulier, nous étudierons les mouvements verticaux du véhicule dans différentes situations : véhicule non amorti, véhicule amorti en régime libre, véhicule se déplaçant sur un sol non plat…
Pour l'ensemble du problème, le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré comme galiléen.
Le véhicule est soumis au champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$.

Données :
champ de pesanteur : $g = 10$ m.s^{-2}.

Hypothèses :
tout au long du problème, on considèrera que :

- l'extrémité supérieure du ressort est en contact avec le véhicule et l'extrémité inférieure du ressort est reliée à une roue qui se trouve en contact avec le sol ;
- la roue reste en contact avec le sol à tout instant ;
- les dimensions de la roue sont telles qu'on la suppose ponctuelle de sorte qu'elle suit parfaitement le profil de la route, y compris lorsque le sol n'est pas plat.

Première partie : suspension sans amortissement

Le véhicule à vide (masse suspendue) est assimilé à une masse $m = 1{,}0 \times 10^3$ kg.
La suspension est constituée d'un ressort de masse négligeable, de raideur $k = 1{,}0 \times 10^5$ N.m^{-1} et de longueur au repos l_0.

Dans cette première partie, on néglige tout amortissement. On ne s'intéresse qu'au mouvement de translation verticale du véhicule.
La position du véhicule est repérée par sa coordonnée $z(t)$, l'axe Oz étant vertical, orienté vers le haut et muni d'un vecteur unitaire $\vec{u_z}$ (figure 1).
$z(t)$ représente la coordonnée de l'extrémité supérieure du ressort.
A l'équilibre, en l'absence de tout mouvement vertical, la position du véhicule est repérée par sa coordonnée z_e.

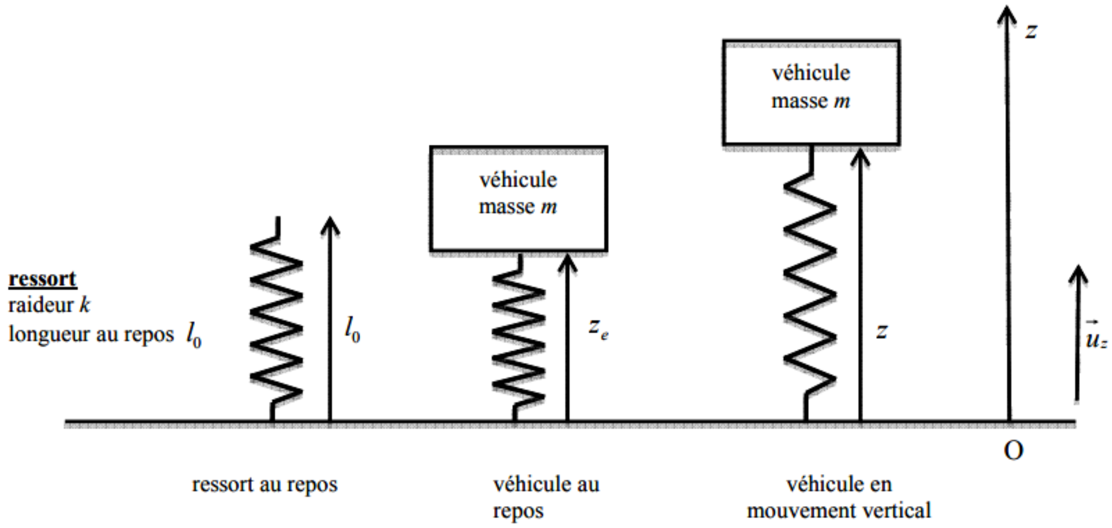


Figure 1 : suspension sans amortissement

1 – Faire le bilan des forces auxquelles le véhicule est soumis lorsqu'il est hors d'équilibre. On détaillera clairement chaque force en indiquant sa direction, son sens et sa norme.

2 – En appliquant le principe d'inertie (première loi de Newton), écrire la relation (équation (1)) entre ces différentes forces lorsque le véhicule est à l'équilibre. En déduire l'expression de la cote z_e à l'équilibre en fonction de m, g, k et l_0.

3 – En appliquant le principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton) au véhicule lorsqu'il est hors d'équilibre, déterminer l'équation différentielle (équation (2)) vérifiée par $z(t)$. L'équation (2) reliera les différentes grandeurs z_e, k, m, $z(t)$ et ses dérivées temporelles.

On montrera que l'on peut écrire :

$$\ddot{z} + \frac{k}{m} z = \frac{k}{m} z_e$$

4 – Donner la solution générale de l'équation (2). Déterminer les expressions littérales de la pulsation propre ω_0 et de la période propre T_0 de la suspension en fonction de k et m. Déterminer les valeurs numériques de ω_0 et T_0.

5 – On suppose qu'un opérateur appuie sur le véhicule et l'amène dans une position repérée par la cote z_0 avec $z_0 < z_e$. A un instant $t = 0$, choisi comme origine du temps, le véhicule est lâché sans vitesse initiale. Déterminer la solution $z(t)$ de l'équation (2) en prenant en compte les conditions initiales précédentes. Exprimer $z(t)$ en fonction de t, z_e, ω_0 et z_0.

6 – Tracer l'allure de $z(t)$ et faire apparaître sur le graphique les cotes minimale z_{min}, maximale z_{max} et moyenne z_{moy} ainsi que la période propre T_0.
Donner les expressions des cotes minimale z_{min}, maximale z_{max} et moyenne z_{moy} en fonction de z_e et z_0.

Deuxième partie : suspension avec amortissement

On suppose dans cette partie que la suspension décrite dans la partie précédente comporte maintenant un dispositif qui exerce, sur le véhicule de masse m, une force d'amortissement visqueux donnée par $\vec{F} = -h\vec{v}$ où $\vec{v}$ représente la vitesse verticale du véhicule par rapport à la roue et h un coefficient appelé coefficient de frottement fluide (figure 2).

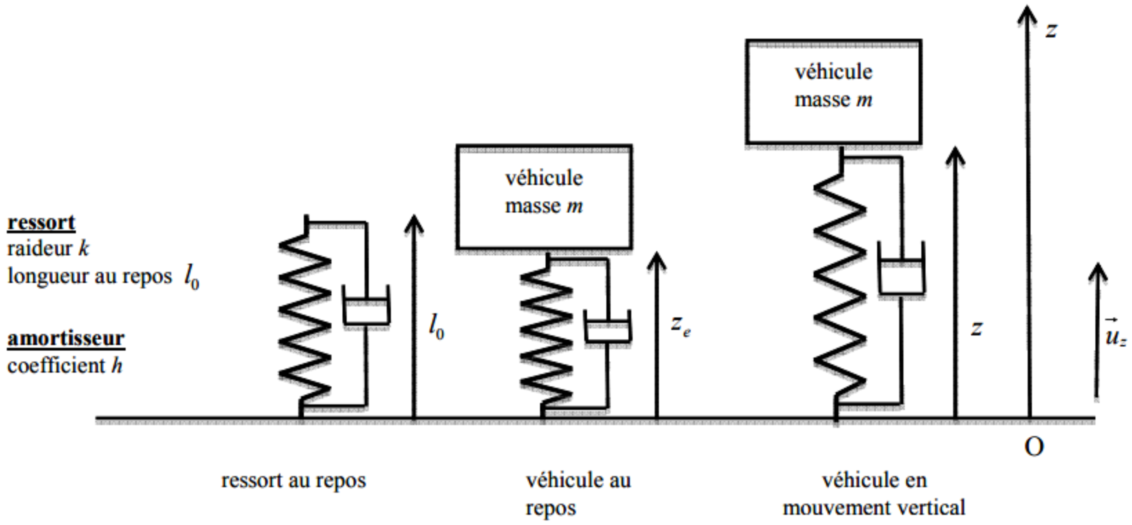


Figure 2 : suspension avec amortissement

7 – Quelle est l'unité de h dans le système international ?
8 – Faire le bilan des forces appliquées au véhicule hors d'équilibre. On détaillera clairement chaque force en indiquant sa direction, son sens et sa norme. Ecrire la relation entre ces différentes forces lorsque le véhicule est à l'équilibre.
9 – En appliquant le principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton) au véhicule hors d'équilibre, déterminer l'équation différentielle vérifiée par la coordonnée $z(t)$ au cours du temps. L'équation reliera les différentes grandeurs z_e, k, h, m, $z(t)$ et ses dérivées temporelles.

On montrera que l'on peut écrire :

$$\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_e$$

10 – Ecrire les conditions portant sur les paramètres m, k et h pour que la suspension se trouve respectivement dans les régimes pseudopériodique, critique et apériodique.

11 – Véhicule en charge et vieillissement de la suspension.

11.1 – Si l'amortissement est tel que la suspension se trouve en régime critique lorsque le véhicule est à vide, dans quel régime se trouve-t-il lorsque le véhicule est en charge ? Justifier qualitativement la réponse.
11.2 – Dès lors, comment choisir la valeur de l'amortissement pour que le véhicule ne soit pas en régime pseudopériodique même lorsqu'il est en charge ? Justifier qualitativement la réponse.

PROBLEME N°3 : GESTION DU RECUL D'UN CANON (ENVIRON 20 % DU BAREME)

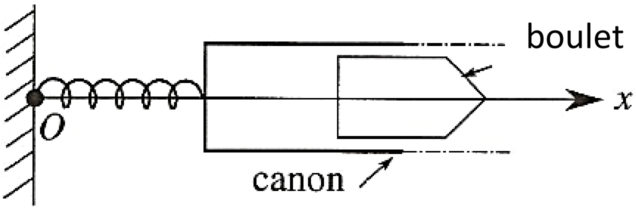
On se propose ici d'étudier le canon servant à lancer des boulets pour attaquer un château-fort.

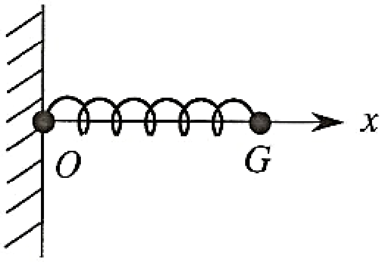
On considère un canon de masse $M = 800\ kg$, qui est utilisé pour envoyer un boulet de masse $m = 2\ kg$.

On souhaite envoyer le boulet avec une vitesse $v_0 = 50\ m.s^{-1}$.

Lorsque le boulet est envoyé, cela provoque un mouvement de recul du canon. On peut montrer que la vitesse de recul du canon est alors $v_r = -\frac{m}{M} v_0$ (le mouvement du canon étant alors vers l'arrière, en sens opposé du mouvement du boulet).

Afin d'éviter tout accident, on veut limiter le recul du canon. Pour cela, on utilise un ressort de raideur k, de longueur à vide ℓ_0 dont l'une des extrémités est fixe et l'autre liée au canon. Le déplacement a lieu suivant l'axe Ox correspondant à la direction et au sens du mouvement du boulet.





Dans la suite, le canon est assimilé à un point matériel confondu avec son centre de gravité G. On négligera tout frottement avec le sol tout comme avec l'air.

1. Etablir l'expression de l'énergie mécanique du canon.
2. On souhaite que le canon recule au maximum d'une distance d et on veut choisir un ressort de constante de raideur adapté. Montrer que la relation entre la distance de recul d et la constante de raideur du ressort est : $k = \frac{m^2 v_0^2}{d^2 M}$.

   Effectuer l'application numérique pour $d = 1\ m$.
3. En raison du mouvement de recul et de la présence du ressort, le canon se met à osciller. En exploiter l'expression de l'énergie mécanique établie à la première question, établir l'expression de l'équation différentielle du mouvement du canon.
4. En déduire l'expression de la période de ces oscillations. Effectuer l'application numérique.
5. En utilisant un ressort de constante de raideur $k_2 > k$, comment varierait la distance de recul ? la période des oscillations ?
6. Etablir complètement l'expression de l'élongation $x(t)$ du ressort.
7. Tracer l'allure de la courbe $x(t)$ en indiquant les valeurs maximale x_{max} et minimale x_{min} atteintes. Faire apparaitre sur cette courbe x_{max} , x_{min} ainsi que la période T des oscillations.