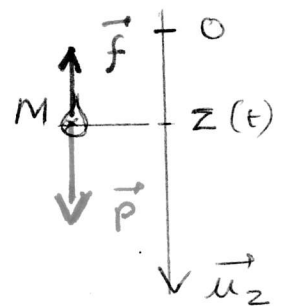


Ex 4 : Brouillard, buée et pluie de pois

1) la goutte est soumise à 2 forces au cours de sa chute :

- le poids $\vec{P} = m \cdot g \cdot \vec{u}_z$
dont l'intensité est constante
- la force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda \cdot \vec{v}$
dont l'intensité augmente avec la vitesse



il y a donc un moment où $\vec{P} + \vec{f} = \vec{0}$
correspondant à une vitesse constante de la goutte

2) $\vec{v} = v \cdot \vec{u}_z$

$$\text{si } \vec{P} + \vec{f} = \vec{0} \Rightarrow m \cdot g \cdot \vec{u}_z - \lambda \cdot v \cdot \vec{u}_z = \vec{0}$$
$$\Rightarrow m \cdot g - \lambda \cdot v = 0 \quad \text{en projection sur } \vec{u}_z$$
$$\Rightarrow v = v_{\text{lim}} = \frac{m \cdot g}{\lambda}$$

3) PFD appliqué à la goutte de masse m :

$$\vec{P} + \vec{f} = m \cdot \vec{a} \quad \text{et } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{u}_z) = \dot{v} \cdot \vec{u}_z$$
$$\Rightarrow m \cdot g \cdot \vec{u}_z - \lambda \cdot v \cdot \vec{u}_z = m \cdot \dot{v} \cdot \vec{u}_z$$
$$\Rightarrow m \cdot g - \lambda \cdot v = m \cdot \dot{v} \quad \text{en projection sur } \vec{u}_z$$
$$\Rightarrow m \cdot \dot{v} + \lambda \cdot v = m \cdot g$$
$$\Rightarrow \dot{v} + \frac{\lambda}{m} \cdot v = g$$
$$\Rightarrow \dot{v} + \frac{1}{\tau} \cdot v = \frac{v_L}{\tau}$$

avec $\frac{1}{\tau} = \frac{\lambda}{m}$ et $\frac{v_L}{\tau} = g$ par identification

$$\tau = \frac{m}{\lambda} \quad \text{et } v_L = g \cdot \tau = g \cdot \frac{m}{\lambda}$$

on a bien $v_L = v_{\text{lim}}$

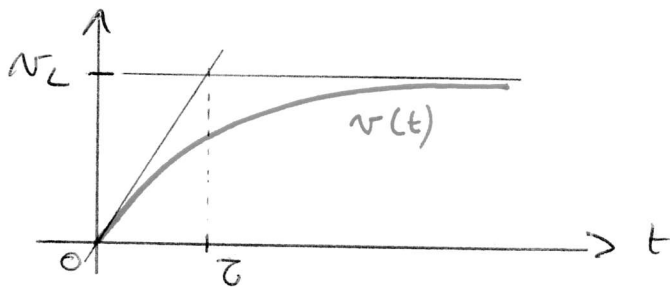
$$\begin{aligned}
 4) \quad SEH : \quad v_H(t) &= A \cdot e^{-t/\tau} \\
 SP : \quad v_P(t) &= v_L \\
 SG : \quad v(t) &= v_P(t) + v_H(t) \\
 &= v_L + A \cdot e^{-t/\tau}
 \end{aligned}$$

conditions initiales : la poutre est abandonnée sans vitesse initiale donc $v(t=0) = 0$

$$\Rightarrow v_L + A = 0$$

$$\Rightarrow A = -v_L$$

on a donc finalement $v(t) = v_L \cdot (1 - e^{-t/\tau})$



$$\begin{aligned}
 5) \quad \text{on atteint la vitesse limite à } 10^{-2} \text{ près de} \\
 \text{celle-ci lorsque } v(t) &= v_L - 10^{-2} \cdot v_L \\
 &= \left(1 - \frac{1}{100}\right) \cdot v_L \\
 &= \frac{99}{100} \cdot v_L \\
 &= 99\% \cdot v_L
 \end{aligned}$$

d'après le cours, $v(5\tau) \simeq 99\% \cdot v_L$

$$\text{durée} = 5 \cdot \tau$$

$$\text{et } \tau = \frac{v_L}{g} \simeq \frac{5 \cdot 10^{-3}}{10} = 5 \cdot 10^{-4} = 0,5 \text{ ms}$$

$$\text{durée} = 2,5 \text{ ms}$$

Ex 2 saut à l'élastique

1. système : masse d'épreuve m
référentiel : Terrestre supposé galiléen

en chute libre sans frottement, seul le poids $\vec{P}$ s'applique

instant initial A : $v_A = 0$ (au moment du lâcher)

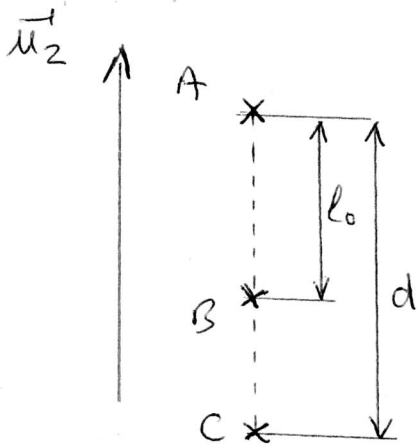
instant final B : l'élastique a atteint sa longueur à vide l_0 .

Théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta E_c = W(\vec{P})_{A \rightarrow B} \quad (1)$$

avec $\vec{u}_z$ orienté
↓ vers le haut

$$\begin{aligned} \text{or } W(\vec{P})_{A \rightarrow B} &= -\Delta E_{pp} = -(E_{ppB} - E_{ppA}) \\ &= -(mg \cdot z_B - mg \cdot z_A) \\ &= m \cdot g \cdot (z_A - z_B) \\ &= m \cdot g \cdot l_0 \end{aligned}$$



$$\text{et } \Delta E_c = E_{cB} - E_{cA} = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2$$

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 = m \cdot g \cdot l_0$$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot l_0}$$

2. du point B au point C (point le plus bas atteint par la masse), la masse est soumise :

- au poids $\vec{P}$
- à la force $\vec{F}_e$ de l'élastique

instant initial B : v_B connue

instant final C : $v_C = 0$

Théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta E_c = W(\vec{P})_{B \rightarrow C} + W(\vec{F}_e)_{B \rightarrow C} \quad (2)$$

$$W(\vec{P})_{B \rightarrow C} = m \cdot g \cdot (d - l_0)$$

$$\begin{aligned} W(\vec{F}_e)_{B \rightarrow C} &= -\Delta E_{pe} = -(E_{peC} - E_{peB}) \\ &= -\left[\frac{1}{2} k \cdot (d - l_0)^2 - 0\right] \end{aligned}$$

$$\text{et } \Delta E_c = E_{cC} - E_{cB} = 0 - \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 = -m \cdot g \cdot l_0$$

$$(2) \Rightarrow -m \cdot g \cdot l_0 = m \cdot g \cdot (d - l_0) - \frac{1}{2} k \cdot (d - l_0)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k \cdot (d - l_0)^2 = m \cdot g \cdot d$$

$$\Rightarrow k = \frac{2 m \cdot g \cdot d}{(d - l_0)^2} \quad (3)$$

$$\text{A.N.} \quad k = \frac{2 \times 100 \times 10 \times 40}{(40 - 20)^2} = \frac{20 \times 100 \times 40}{20 \times 20} = 200 \text{ N.m}^{-1}$$

3. la relation (3) est toujours valable même si l'on change la valeur de d .

$$m = \frac{k \cdot (d - l_0)^2}{2 \cdot g \cdot d}$$

$$\text{si } d = 50 \text{ m, } m = \frac{200 \times (50 - 20)^2}{2 \times 10 \times 50}$$

$$= \frac{200 \times 30 \times 30}{20 \times 50}$$

$$= \frac{30 \times 30}{5}$$

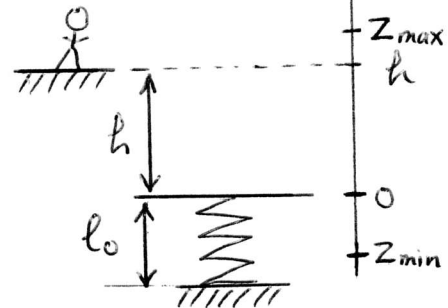
$$= 6 \times 30$$

$$= 180 \text{ kg}$$

Ex 3: Trampoline

1) phase de chute

$\vec{P}$ poids seul
 $z = [0, h]$



phase de contact

$\vec{P}$ poids
 $\vec{F}$ Force du ressort (Trampoline)
 $z = [z_{\min}, 0]$



phase de montée

$\vec{P}$ poids seul
 $z = [0, z_{\max}]$



2) Théorème de la puissance mécanique
 système : enfant assimilé à un point matériel de masse m
 référentiel : Terrestre supposé galiléen

$$\frac{dE_m}{dt} = P(\vec{F}_{\text{non conservatifs}})$$

quelle que soit la phase étudiée, les forces (poids et force du ressort) sont conservatrices

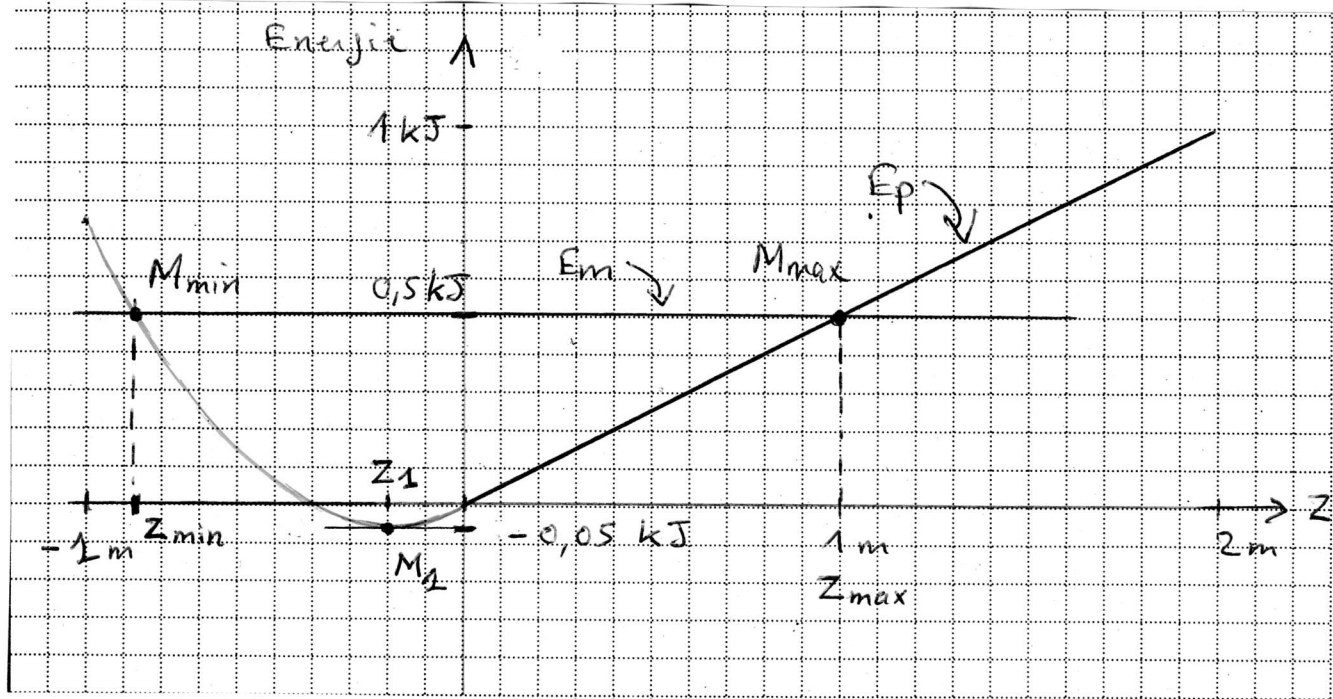
$$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow E_m = \text{cste}$$

3) chute $E_p(z) = + m \cdot g \cdot z + \text{cste}$ ($\vec{u}_z$ vers le haut)
 et $E_p(0) = 0 \Rightarrow \text{cste} = 0$

$$\begin{aligned} \text{contact } E_p(z) &= E_{pp} + E_{pe} = m \cdot g \cdot z + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (l - l_0)^2 \\ &= m \cdot g \cdot z + \frac{1}{2} \cdot k \cdot z^2 \end{aligned}$$

$$\text{montée } E_p(z) = m \cdot g \cdot z$$



5) la position d'équilibre correspond à $\frac{dE_p}{dz} = 0$

soit $z_1 = -0,2 \text{ m}$

point M_1 sur le graphe

6) $E_{m0} = E_{p0} + E_{c0}$

or initialement l'enfant est sur le support fixe
situé à une hauteur h et sa vitesse est nulle

$$E_{m0} = m \cdot g \cdot h + 0 = 50 \times 10 \times 1 = 500 \text{ J} = 0,5 \text{ kJ}$$

$E_m(z) = \text{cte} = E_{m0}$ conservation de l'énergie mécanique

7) $E_m(z_1) = E_p(z_1) + E_c(z_1) = E_{m0}$

valeur
trouvée

$$\Rightarrow (-0,05) + E_c(z_1) = 0,5$$

graphiquement

$$\Rightarrow E_c(z_1) = 0,55 \text{ kJ}$$

$$E_c(z_1) = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2 E_c(z_1)}{m}}$$

8) $z_{\min}$ correspond au point $M_{\min}$

$$z_{\min} \approx -0,85 \text{ m}$$

$z_{\max} = 1 \text{ m}$ (m altitude qu'au début)

$$= \sqrt{\frac{2 \times 550}{50}}$$

$$= \sqrt{22}$$

$$\approx 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

9) l'enfant utilise ses jambes pour se propulser.