M3 – SYSTEMES DU PREMIER ORDRE

Travaux dirigés

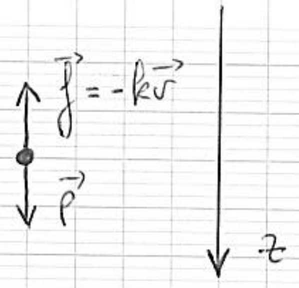
Exercice 1 : Lâcher de balle

À $t = 0$, un golfeur admirant la vue des falaises du golf d'Etretat lâche sa balle de masse $m = 45$ g du haut d'une falaise d'une hauteur de 25 m, et ce sans vitesse initiale. On supposera que les frottements exercés par l'air sont des frottements visqueux, la force de frottement étant de la forme $\vec{f} = -k\vec{v}$. On donne $k = 0{,}2$ USI

Etablir l'expression de la vitesse au cours du temps et tracer l'allure de la courbe $v(t)$.

Exercice 1.

BALLE :



$\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u_z}$ associée à $E_{pp} = -mgz + cte$

$\vec{f} = -k\vec{v}$

Théorème de l'Énergie Mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = P_{NC} = P(\vec{f}) = -k\vec{v}\cdot\vec{v} = -kv^2 = -k\dot{z}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz + cte\right) = -k\dot{z}^2$$

$$m\cancel{\dot{z}}\ddot{z} - mg\cancel{\dot{z}} = -k\dot{z}^{\cancel{2}} \Leftrightarrow \dot{z}(m\ddot{z} - mg + k\dot{z}) = 0$$

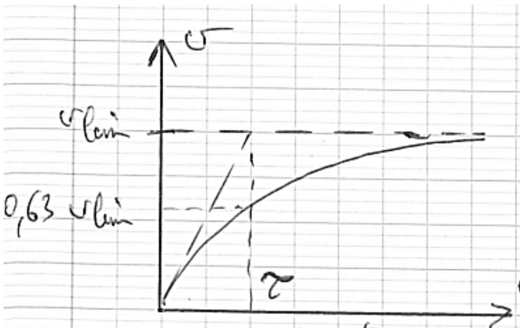
On élimine la solution $\dot{z} = 0$

On obtient :

$$m\ddot{z} - mg + k\dot{z} = 0$$

ou $$m\frac{dv}{dt} - mg + kv = 0$$

ou $$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$ sous forme canonique.



Identification : $\tau = \frac{m}{k}$

$[\tau] = \left[\frac{m}{k}\right] = \frac{kg}{N.m^{-1}.s} = \frac{\cancel{kg}}{\cancel{kg}.\cancel{m}.s^{-2}.\cancel{m^{-1}}.s} = s$ — $\underline{\underline{OK}}$

SEH : $v_H = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

SP : $v_p = \frac{mg}{k} = v_{lim}$

SG : $v = \frac{mg}{k} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

CI : $v(0) = 0 \Rightarrow \frac{mg}{k} + A = 0$

Solution : $v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

<u>Exercice 2 : Hockey sur glace et dissipation d'énergie</u>

Un palet de Hockey de masse m est lancé sur la glace avec une vitesse initiale v_0. La puissance des forces de frottement est $P_{fr} < 0$, **supposée constante**.

Pendant combien de temps le palet va-t-il glisser ?

Système : palet de hockey étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces :

- poids, associé à une énergie potentielle de pesanteur constante, le mouvement étant horizontal, qu'on peut choisir nulle
- réaction normale de la glace, qui ne travaille pas et peut être associée à une énergie potentielle nulle
- frottements, associés à une puissance $P_{fr} < 0$, supposée constante.

En raison des frottements, le système n'est pas conservatif.

Théorème de la puissance mécanique (TPM) appliqué au palet dans référentiel terrestre : $\frac{dEm}{dt} = P_{fr} < 0$,

Energie mécanique : $Em = Ep + \frac{1}{2}mv^2$. En choisissant le sol comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur, le mouvement étant horizontal, on a toujours $Ep = 0$, soit $Em = \frac{1}{2}mv^2$.

On choisit comme instant initial $t_0 = 0$ (origine des temps) le moment où le palet est lancé avec la vitesse v_0 (énergie mécanique $Em_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$), et comme instant final le moment où le palet s'arrête (vitesse nulle, instant t_f, énergie mécanique $Em_f = 0$) .

En intégrant entre t_0 et t_f le TPM : $\int_{Em_0}^{Em_f} dEm = \int_{t_0}^{t_f} P_{fr}dt \quad \Leftrightarrow \quad Em_f - Em_0 = P_{fr}(t_f - t_0)$

Finalement, $\boxed{\boldsymbol{t_f = -\frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{P_{fr}}}}$.

Vérifier l'homogénéité et le signe (cohérent car $P_{fr} < 0$), ainsi que la cohérence de l'influence des différents paramètres : plus la vitesse initiale est élevée, plus le temps nécessaire avant que le palet ne s'arrête va augmenter ; en revanche il diminue quand les frottements augmentent…

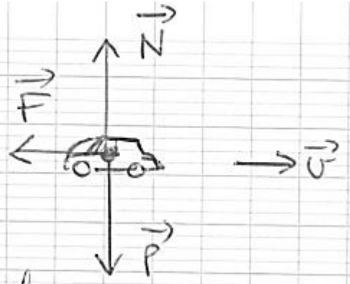
Exercice 3 : Freinage par frottement fluide

Une voiture, de masse m, roulant sur une route rectiligne horizontale $(x'x)$ à la vitesse v_0, coupe son moteur à $t = 0$. Elle est soumise à un frottement fluide $\vec{F} = -h\vec{v}$.

1) Écrire la loi de variation de $\dot{x}$ en fonction du temps (on fera apparaître la constante de temps τ que l'on définira).
2) En déduire l'équation horaire du mouvement sachant que $x = 0$ à $t = 0$.

Exercice 3

1) BAME :



Résolution par le Th. E_m.

$\vec F = -h\vec v \Rightarrow P_F = -h\vec v \cdot \vec v = -hv^2$

$\vec P$ et $\vec N$ ne travaillent pas, car $\perp$ au mouvement.

$E_p = cte = 0$ par exemple

$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mv^2$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -hv^2$$

$$\Leftrightarrow \quad m\frac{dv}{dt}v = -hv^2$$

$$\Leftrightarrow \quad m\frac{dv}{dt}v + hv^2 = 0$$

$$v\left(m\frac{dv}{dt} + hv\right) = 0$$

* $v = 0$ Non retenue
* Ou :

$$m\frac{dv}{dt} + kv = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = 0 \qquad \text{Identification : } \tau = \frac{m}{k}$$

SEH : $v_H(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

SP : $v_p(t) = 0$

SG : $v(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

CI : $v(0) = v_0 = Ae^{-0} \Rightarrow A = v_0$

Solution :

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec } \tau = \frac{m}{k}$$

2) $x(t) = \int_0^t v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.dt \quad , \quad \tau = \frac{m}{k}$

$$= -v_0 \tau e^{-\frac{t}{\tau}} + cte$$
$$= -v_0 \frac{m}{k} e^{-\frac{t}{\tau}} + cte.$$

CI : $x(0) = 0$

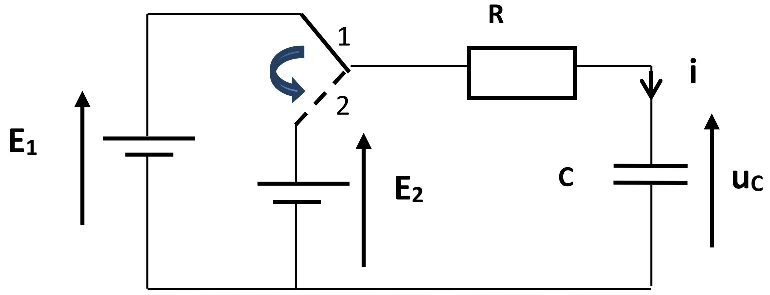
$$-v_0 \frac{m}{k} e^{-\frac{t}{\tau}} + cte = 0$$

d'où :

$$cte = v_0 \frac{m}{k} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$x(t) = v_0 \frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) , \quad \tau = \frac{m}{k}$$

Exercice 4 : Charges d'un condensateur



On donne :

E_1 = 10V ; E_2 = - 5V

R = 10kΩ ; C = 50 µF

1) Faire un schéma équivalent pour chaque position du commutateur.
2) Etablir l'équation différentielle vérifiée par u_C pour chaque cas. Mettre cette équation différentielle sous forme canonique et déterminer la constante de temps τ.
3) A t = 0, le condensateur étant initialement chargé sous la tension E_2, on bascule le commutateur en position 1. Déterminer l'évolution de u_C en fonction du temps.
4) A t = t_1 = 5s, on bascule le commutateur en position 2. Déterminer l'évolution de u_C en fonction du temps.

2) Dans chaque cas :

loi des mailles : $E - u_R - u_C = 0$

$E - Ri - u_C = 0$ et $i = C\dfrac{du_c}{dt}$

$$E - RC\frac{du_c}{dt} - u_c = 0$$

$$\frac{du_c}{dt} + \underbrace{\left(\frac{1}{RC}\right)}_{\frac{1}{\tau}} u_c = \frac{E}{RC} \qquad \tau = RC$$

les 2 régimes sont forcés car imposés par un générateur.

3) $\dfrac{du_c}{dt} + \dfrac{1}{RC}u_c = \dfrac{E_1}{RC}$ pour $t \geq 0$

SEH : $u_{c_H} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

SP : $u_{c_p} = E_1$

SG : $u_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E_1$

CI : $u_c(0) = E_2 = u_c(0^+) = u_c(0^-)$

$A + E_1 = E_2$

$\Rightarrow A = (E_2 - E_1)$

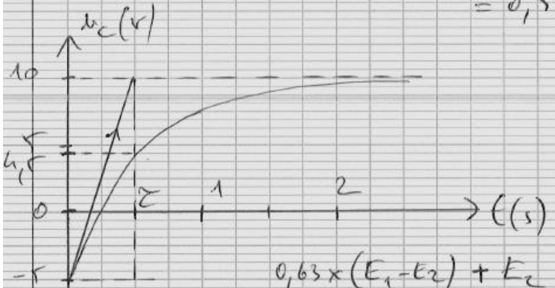
d'où :

$$u_c(t) = (E_2 - E_1)e^{-\frac{t}{\tau}} + E_1$$

Vérif : $u_c(0) = E_2 - E_1 + E_1 = E_2$

$t \to +\infty \Rightarrow u_c \to E_1$

$$\tau = RC = 10.10^3 \times 50.10^{-6} = 500.10^{-3} = 0{,}5 \text{ s}$$



$0{,}63 \times (E_1 - E_2) + E_2$
$= 0{,}63 \times 15 - 5$
$= 4{,}5$ V

On peut considérer que u_c atteint $E_1 = 10$V au bout de $5\tau = 2{,}5$ s

4) SEH : $u_{c_H}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

SP : $u_{c_p}(t) = E_2$

SG : $u_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E_2$

CI : $u_c(t_1) = E_1$

$$A e^{-\frac{t_1}{\tau}} + E_2 = E_1$$

$$A = \frac{E_1 - E_2}{e^{-\frac{t_1}{\tau}}}$$

Ou poser $t' = t - t_1$

d'où :

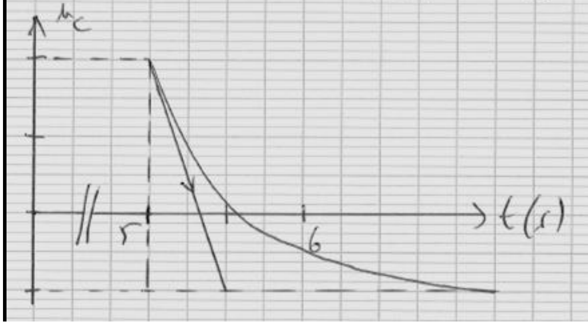
$$u_c(t) = \frac{E_1 - E_2}{e^{-\frac{t_1}{\tau}}} e^{-\frac{t}{\tau}} + E_2$$

$$u_c(t) = (E_1 - E_2) e^{-\frac{1}{\tau}(t - t_1)} + E_2$$

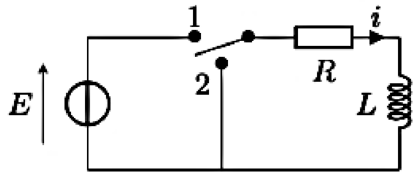
Vérif :

$$u_c(t_1) = E_1 - E_2 + E_2 = E_1$$

$$t \to +\infty \Rightarrow u_c(t) \to E_2$$



Exercice 5 : Démagnétisation d'une bobine



On branche en série un générateur de f.e.m. E = 5 V, un interrupteur 3 positions, une résistance R = 1 kΩ et une bobine d'inductance L = 100 mH. A l'instant t = 0, on passe l'interrupteur de la position 1 à la position 2.

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par le courant *i* parcourant la bobine.
2. Résoudre l'équation différentielle précédente après avoir déterminé les conditions initiales. Tracer l'allure du courant *i(t).*

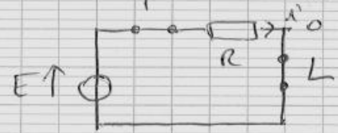
1. $u_R + u_L = 0$

$Ri + L\frac{di}{dt} = 0$ $\qquad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$

2. $\tau = \frac{L}{R} = \frac{100.10^{-3}}{1.10^{3}} = 100.10^{-6} = 0,1 \text{ ms}$

⇒ Régime permanent atteint au bout de 20 ms.

3. Conditions initiales déterminées à partir du circuit en position 1 + régime permanent.



(Régime permanent

$i_0 = \frac{E}{R}$

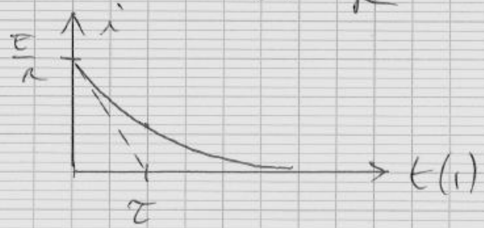
D'où : $i(0) = \frac{E}{R}$

$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$

SEH = SG : $i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

CI : $i(0) = \frac{E}{R} = A$

Solution : $i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$



Exercice 6 : Chute d'une gouttelette d'eau (d'après Ecrit ATS)

On cherche à comprendre dans cette partie pourquoi les gouttelettes de la partie inférieure d'un nuage ne tombent pas. On supposera dans cette partie que l'air est immobile dans le référentiel galiléen terrestre et que sa masse volumique reste constante. On considère la chute d'une gouttelette d'eau de rayon r et de masse volumique $\rho_{eau} = 10^3\ kg.m^{-3}$ supposée constante, située initialement à une altitude H = 500 m au-dessus de la surface de la Terre avec une vitesse initiale v_0 nulle. On supposera par ailleurs que la résultante des forces de frottements exercées par l'air sur la goutte suit la loi de Stokes : $\vec{f} = -6\pi\eta_{air} r \vec{v}$, où η_{air} correspond à la viscosité dynamique de l'air et $\vec{v}$ à la vitesse de la gouttelette. On négligera la poussée d'Archimède s'exerçant sur la gouttelette.

1) Etablir le bilan des forces s'appliquant sur la gouttelette d'eau.
2) En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v de la gouttelette. Mettre cette équation sous forme canonique et déterminer le temps caractéristique τ.
3) Montrer que la vitesse limite atteinte par la gouttelette peut s'écrire :

$$\overrightarrow{v_{lim}} = \frac{2r^2}{9\eta_{air}} \rho_{eau} \vec{g}$$

4) Tracer l'évolution de la vitesse v en fonction du temps.
5) Pour une gouttelette de rayon r = 0,01 mm, calculer $\boldsymbol{v_{lim}}$. En supposant que cette vitesse limite est atteinte très rapidement, évaluer la durée de chute de cette gouttelette depuis la base d'un nuage à H = 500 m d'altitude jusqu'au sol.
6) Conclure.

1) Référentiel : Terrestre, galiléen.
Système : goutte d'eau
Bilan des forces :

$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_z}$ (1) $\uparrow \vec{u_z}$

avec :

$m = \rho_{eau} V_{eau} = \rho_{eau} \frac{4}{3}\pi r^3$

$\vec{f} = -6\pi\eta_{air} r \vec{v}$ (2)

2) PFD :

$\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = \rho_{eau}\frac{4}{3}\pi r^3 \vec{a}$ (3)

Vitesse initiale nulle + forces suivant $\vec{u_z}$ ou opposée à la vitesse
⇒ écoulement suivant $\vec{u_z}$

D'où : $\vec{v} = v.\vec{u_z}$
$\vec{a} = \dot{v}.\vec{u_z}$

ou $\left\{ -mg - 6\pi\eta_{air} r v = m\frac{dv}{dt} \right.$
$\left. \frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta_{air}}{m} r v = -g \right.$

(1), (2) et (3)

$\rho_{eau}\frac{4}{3}\pi r^3 g \vec{u_z} - 6\pi\eta_{air} r v \vec{u_z} = \rho_{eau}\frac{4}{3}\pi r^3 \dot{v}\vec{u_z}$

En projetant sur $\vec{u_z}$:

$\rho_{eau}\frac{4}{3}\pi r^3 \dot{v} + 6\pi\eta_{air} r v = -\rho_{eau}\frac{4}{3}\pi r^3 g$

En mettant sous forme canonique :

$\dot{v} + \frac{3\times 6\pi\eta_{air} \cancel{r}}{4\pi r^{\cancel{3}2}\rho_{eau}} v = -g$ ou $\tau = \frac{m}{6\pi\eta_{air} r}$

$\boxed{\dot{v} + \frac{9\eta_{air}}{2\rho_{eau} r^2} v = -g}$ $\boxed{\tau = \frac{2\rho_{eau} r^2}{9\eta_{air}}}$

3) Vitesse limite atteinte

$\Rightarrow \dot{v} = 0$

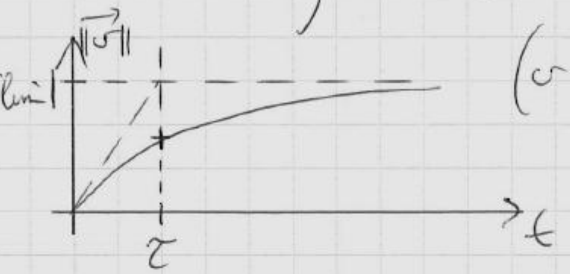
$$\frac{9\,\eta_{air}}{2\,\rho_{eau}\,r^2}\,v_{lim} = -g.$$

(ou)

$v_{lim} = -\dfrac{mg}{6\pi\,\eta_{air}\,r}$ $\quad v_{lim} = -\dfrac{2r^2}{9\,\eta_{air}}\,\rho_{eau}\,g$

Vectoriellement :

$$\vec{v}_{lim} = \frac{2r^2}{9\,\eta_{air}}\,\rho_{eau}\,\vec{g}$$

4) 

(v négative).

5) Avec $\eta_{air} = 2.10^{-5}$ Pa.s (oubli de donnée)

$$v_{lim} = \frac{\cancel{2}\times(0{,}01.10^{-3})^2}{9\times\cancel{2}.10^{-5}}\times 10^3\times 10$$

$$= \frac{1}{9}\times 10^{-4}\times 10^{-6}\times 10^{+5}\times\cancel{10^{3}}\times\cancel{10}$$

$$\simeq \frac{1}{9}.10^{-1} \simeq 1{,}1.10^{-2}\ \text{m.s}^{-1}$$

$$\Delta t = \frac{H}{v_{lim}} = \frac{500}{1{,}1.10^{-2}} = 45.10^3\ \text{s} \simeq 12\,\text{h}.$$

6) Concl : Temps trop long. Les gouttelettes ne chutent pas : elles sont entraînées par le vent

Exercice 7 : Chute d'une bille dans l'huile

On étudie la chute d'une bille sphérique en acier, de masse m, dans l'huile, celle-ci étant lâchée, à un instant t_0 pris comme origine des dates, sans vitesse initiale. La bille est repérée par son abscisse z sur un **axe vertical descendant Oz.**

On peut estimer que la puissance des forces de frottement dues à l'huile est de la forme : $P_{nc} = -hv^2$

où v est la vitesse de la bille

et h un coefficient positif, fonction du liquide et de la forme de la bille, mais indépendant de la vitesse de la bille.

1) Exprimer l'énergie mécanique E_m de la bille à une date quelconque en fonction de z et $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$.
2) Etablir l'équation différentielle liant $\dot{z}$ et t en appliquant le théorème de la puissance mécanique.
3) Mettre cette équation différentielle sous sa forme canonique, soit sous une forme de type $\frac{dX}{dt} + \frac{1}{\tau} X = \cdots\ (second\ membre)$, en introduisant la **constante de temps** (ou **temps caractéristique)** τ du système, puis la résoudre.
4) Montrer que ż tend vers une valeur limite $\dot{z}_{lim} = g\tau$, et exprimer en fonction de $\dot{z}_{lim}$ $\dot{z}(\tau)$, $\dot{z}(3\tau)$ et $\dot{z}(5\tau)$.
5) Rechercher l'instant t_i tel que la tangente à l'origine à la courbe $\dot{z}(t)$ atteigne la valeur $\dot{z}_{lim}$ (intersection de la tangente en zéro avec l'asymptote à la courbe). Tracer l'allure de la courbe.

En négligeant la poussée d'Archimède :

1) Considérons la bille, de masse m, lâchée sans vitesse initiale.

Elle subit - son poids ;

- une force de frottement fluide dont la puissance est $-hv^2$.

Une troisième interaction pourrait être prise en compte : la poussée d'Archimède.

La bille est repérée par son abscisse z sur un **axe vertical descendant Oz**, d'origine la position initiale de la bille, prise comme origine des potentiels.

Energie potentielle de pesanteur : $Ep = -mgz$

Energie mécanique E_m de la bille à t quelconque : $\boxed{\boldsymbol{E_m = Ec + Ep = \frac{1}{2}mv^2 - mgz = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz}}$ avec

$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = v$, la trajectoire étant rectiligne.

2) Théorème de la puissance mécanique : $\frac{dE_m}{dt} = P_{nc} = -hv^2 = -h\dot{z}^2$.

Or $\frac{dE_m}{dt} = m\dot{z}\ddot{z} - mg\dot{z} = -h\dot{z}^2$

$\frac{dE_m}{dt} < 0$: l'énergie mécanique diminue au cours du temps sous l'effet des forces de frottement fluide (forces dissipatives).

On a donc $m\dot{z}\ddot{z} - mg\dot{z} = -h\dot{z}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = 0 \\ m\ddot{z} + h\dot{z} = mg \end{cases}$

$\dot{z} = 0$ correspond à l'immobilité de la bille, or o**n s'intéresse au mouvement de la bille, donc** $\dot{z} \neq 0$ (solution physiquement sans intérêt pour notre étude).

On obtient donc une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, liant $\dot{z}$ et t :

$$\boldsymbol{m\ddot{z} + h\dot{z} = mg} \quad \text{ou} \qquad \boldsymbol{m\,\frac{d\dot{z}}{dt} + h\dot{z} = mg}$$

3) Mise sous forme canonique : On commence par ramener à 1 le coefficient du terme de plus haut degré (en divisant par m, ici) : $\boldsymbol{\frac{d\dot{z}}{dt} + \frac{h}{m}\dot{z} = g}$

Dimension du coefficient $\frac{h}{m}$ placé devant $\dot{z}$: $\left[\frac{d\dot{z}}{dt}\right] = \left[\frac{h}{m}\dot{z}\right] \quad \Leftrightarrow \frac{[\dot{z}]}{T} = \left[\frac{h}{m}\right][\dot{z}]$ d'où $\left[\frac{h}{m}\right] = T^{-1}$

On définit une constante de temps, ou un temps caractéristique : $\tau = \frac{m}{h}$

L'équation différentielle se met donc sous la forme : $\frac{d\dot{z}}{dt} + \frac{1}{\tau}\,\dot{z} = g$ qui correspond à la forme canonique des équations différentielles du 1er ordre à coefficients constants.

Résolution de l'équation différentielle :

1. Résolution de l'équation homogène (SEH) : $\frac{d\dot{z}}{dt} + \frac{1}{\tau}\,\dot{z} = 0$

Solution de l'équation homogène (SEH) : $\boldsymbol{\dot{z}_H = A\ \exp\left(-\,\frac{t}{\tau}\right)}$, A étant une constante quelconque, de même dimension que $\dot{z}$ (soit une vitesse).

2. Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre (SP) : $\frac{d\dot{z}}{dt} + \frac{1}{\tau}\,\dot{z} = g$

Le second membre étant constant, on cherche une solution particulière constante pour la vitesse $\dot{z}$; on a alors $\frac{d\dot{z}}{dt} = 0$, soit

$\dot{z}_P = \tau g$

3. On en déduit la solution générale (SG) : $\dot{z} = \dot{z}_H + \dot{z}_P = A\ \exp\left(-\,\frac{t}{\tau}\right) + \tau g$

4. On termine en déterminant la constante d'intégration A à l'aide d'une condition initiale (CI).

$\dot{z}(t=0) = 0$, d'où $\quad A\ exp\left(-\,\frac{0}{\tau}\right) + g\tau = 0$; $\qquad$ Soit $A =$ - τg

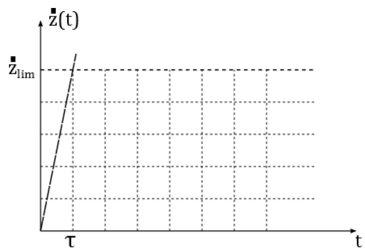
Finalement, vitesse de la bille : $\boxed{\boldsymbol{\dot{z}(t) = g\tau\ \left(1\ -\ exp\left(-\,\frac{t}{\tau}\right)\right)}}$

4) Si t est grand devant τ, ż tend vers une valeur limite $\dot{z}_{lim} = g\tau$
En effet, mathématiquement, $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dot{z}(t) = g\tau\ \left(1\ -\ \exp\left(-\,\frac{t}{\tau}\right)\right)\right) = \boldsymbol{g\tau = \dot{z}_{lim}}$), avec
$\lim\limits_{t\to\infty}\left(\exp\left(-\,\frac{t}{\tau}\right)\right) = 0$

$\dot{z}(\tau) = g\tau\ \left(1\ -\ \exp\left(-\,\frac{\tau}{\tau}\right)\right) = \ g\tau\ (1\ -\ \exp(-\,1)) = 0{,}63 g\tau = \ 63\%\ \dot{z}_{lim}$

De même, $\dot{z}(3\tau) = 95\%\ \dot{z}_{lim}$ $\qquad \dot{z}(5\tau) = 99\%\ \dot{z}_{lim}$

La vitesse limite est atteinte au bout de quelques $\boldsymbol{\tau}$.



5) Tangente à la courbe $\dot{z}(t)$ à un instant t donné : de pente la dérivée

$$\ddot{z}(t) = g\ \exp\left(-\,\frac{t}{\tau}\right)$$

Pente de la tangente à la courbe à l'origine, soit à $t = 0$: $\ddot{z}(t=0) = g$

Equation de la tangente à l'origine : $y(t) = gt + K$, avec $y(t=0) = K = 0$

Finalement : $y(t) = gt$.

Intersection avec l'asymptote $\dot z_{lim} = g\tau$ à t_i tel que $y(t_i) = gt_i = \dot z_{lim} = g\tau$

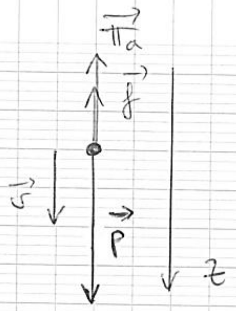
Soit $\boldsymbol{t_i = \tau}$

La tangente à l'origine coupe l'asymptote à la date $t = \tau$.

En prenant en compte la poussée d'Archimède :

Exercice 7

1) BAME :



ρ = masse volumique de la bille

ρ_f = masse volumique du fluide

$\vec P = mg\vec{u_z} = \rho V g \vec{u_z}$

$\vec{\Pi_a} = -\rho_f V g \vec{u_z}$

$\vec f = -k\vec v$

$\vec{P_a} = (\rho - \rho_f) V g \vec{u_z}$

$E_{pPa} = -(\rho-\rho_f)Vgz + cte$, $cte = 0$

$E_m = E_p + E_c$

$= E_{pPa} + E_c$

$= -(\rho-\rho_f)Vgz + \frac{1}{2}m\dot z^2$

$E_m = -(\rho-\rho_f)Vgz + \frac{1}{2}\rho V\dot z^2$

2) 3) Th. E_m ou Th. P_m :

$\frac{dE_m}{dt} = -k\dot z^2$

$-(\rho-\rho_f)Vg\dot z + \rho V\ddot z\dot z = -k\dot z^2$

$\dot z\left(-(\rho-\rho_f)Vg + \rho V\ddot z + k\dot z\right) = 0$

$\dot z = 0$ non retenu

ou

$-(\rho-\rho_f)Vg + \rho V\ddot z + k\dot z = 0$

Sous forme canonique :

$\ddot z + \frac{k}{\rho V}\dot z = \frac{\rho-\rho_f}{\rho}g$ ou $\ddot z + \frac{k}{m}\dot z = \frac{\rho-\rho_f}{\rho}g$

On identifie : $\underline{\tau = \frac{m}{k}}$

SEH : $\dot{z}_H = A e^{-\frac{t}{\tau}}$

SP : $\dot{z}_p = \frac{(\rho - \rho_f)g}{k}$

SG : $\dot{z} = A e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{(\rho - \rho_f)g}{k}$

CI : $\dot{z}(0) = v_0 = A + \frac{(\rho - \rho_f)g}{k}$

d'où : $A = -\frac{(\rho - \rho_f)}{k} g$.

Solution : $\underline{\dot{z}(t) = \frac{(\rho - \rho_f)g}{k}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \ , \ \tau = \frac{m}{k}}$

Exercice 8 : Skieur

On étudie le mouvement d'un skieur descendant une piste selon la ligne de plus grande pente faisant un angle α avec l'horizontale. L'air exerce une force de frottement supposée telle que sa puissance est égale à $P_1 = -\lambda v^2$, où λ est un coefficient constant positif et v la vitesse du skieur. La force de frottement exercée par la neige a une puissance $P_2 = -f\, m\, g\, v \cos\alpha$ avec f le coefficient de frottement solide. On choisit comme origine de l'axe *Ox* de la ligne de plus grande pente la position initiale du skieur, supposé partir à l'instant initial avec une vitesse négligeable.

1. Déterminer la dimension de λ.
2. Déterminer l'énergie potentielle du skieur en fonction de m, g, x et α.
3. Peut-on appliquer la conservation de l'énergie mécanique ?
4. Déterminer l'équation différentielle du mouvement grâce à une étude énergétique. L'écrire sous la forme $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_m}{\tau}$. Donnez les expressions de v_m et τ.
5. Donner l'expression de la vitesse $v(t)$ puis de l'équation horaire $x(t)$.
6. Montrer que le skieur atteint une vitesse limite v_{lim}. AN : calculer v_{lim} avec λ = 1,0 SI, f = 0,90, g = 10 m.s^{-2}, m = 80 kg et α = 45°.
7. Calculer littéralement et numériquement la date t_1 où le skieur a une vitesse égale à v_{lim}/2.
8. Déterminer la distance d_1 parcourue par le skieur à t_1.
9. A la date t_1, le skieur tombe. On néglige alors la résistance de l'air, et on considère que le coefficient de frottement sur le sol est multiplié par 10. Donner la nouvelle équation différentielle du mouvement.
10. Déterminer la vitesse puis l'équation de la trajectoire en fonction de g, α, f, t , v_{lim} et d_1, en prenant comme nouvelle origine des temps la date t_1.
11. Calculer la distance d_2 parcourue par le skieur avant de s'arrêter.

Système : skieur ; Réf : terrestre, BdF : poids, frottements

1. $[\lambda] = \frac{[P]}{[v]^2} = \frac{[E]}{T} \times \frac{1}{[v]^2} = \frac{[m][v]^2}{T} \times \frac{1}{[v]^2} = M.T^{-1}$
2. $E_p = -mgy \ avec\ \sin\alpha = \frac{y}{x}\ d'où\ y = x\sin\alpha\ et\ E_p = -mgx\ \sin\alpha$
3. Frottements : E_m ne se conserve pas
4. $\frac{dE_m}{dt} = P_{nc}$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 - mgx\sin\alpha$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2} \times 2 \times m\,\dot{x}\,\ddot{x} - mg\dot{x}\sin\alpha \quad et \quad P_{nc} = -f\, m\, g\, \dot{x}\cos\alpha - \lambda\dot{x}^2 \quad d'où$$

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} = g(\sin\alpha - f\ \cos\alpha)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m}v = \frac{v_m}{\tau} \quad avec\ \ \tau = \frac{m}{\lambda}\ \ et\ v_m = \tau g(\sin\alpha - f\ \cos\alpha) = \frac{mg}{\lambda}(\sin\alpha - f\ \cos\alpha)$$

5. $\boxed{v = v_m\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$

$$x = v_m\left(t + \tau\ \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) + cte\ \ avec\ x(0) = 0 = \tau\, v_m + cte \Rightarrow cte = -\tau\, v_m$$

$$\boxed{x = v_m\left(t + \tau\ \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \tau\right)}$$

6. $v_{lim} = \lim_{t\to\infty} v(t) = v_m$

$$AN: v_{lim} = \frac{10 \times 80}{1}(\sin 45° - 0.9 \times \cos 45°) = 57\ m.s^{-1} = 206\ \mathrm{km.h^{-1}}$$

7. $v = \frac{v_{lim}}{2} = v_{lim}\left(1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right)\right) \Longrightarrow 1 - \frac{1}{2} = e^{-\frac{t_1}{\tau}} = \frac{1}{2}$

$$-\frac{t_1}{\tau} = \ln 2 \Longrightarrow\ t_1 = -\tau\ \ln\frac{1}{2} = \tau\ \ln 2 = \frac{80}{1}\ln 2 = 55\ s$$

8. Distance parcourue $d_1 = x(t_1)$

$d_1 = x(t_1) = 874\ m$

9. $\ddot{x} = g(\sin\alpha - 10\ f\ \cos\alpha)$

10. Nouvelle origine des temps : point de chute

$\dot{x} = g(\sin\alpha - 10\ f\ \cos\alpha)t + cte$ avec $\dot{x}(0) = \frac{v_{lim}}{2} \Rightarrow cte = \frac{v_{lim}}{2}$

$$\boxed{\dot{x} = g(\sin\alpha - 10\ f\ \cos\alpha)t + \frac{v_{lim}}{2}}$$

$$x = \frac{1}{2}\ g(\sin\alpha - 10\ f\ \cos\alpha)t^2 + \frac{v_{lim}}{2}\ t + cte \quad avec\ x(0) = d_1$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}\ g(\sin\alpha - 10\ f\ \cos\alpha)t^2 + \frac{v_{lim}}{2}\ t + d_1}$$

11. Distance d_2 obtenue pour $\dot{x} = 0$

$$g(\sin\alpha - 10\ f\ \cos\alpha)t_A + \frac{v_{lim}}{2} = 0 \Rightarrow t_A g(\sin\alpha - 10\ f\ \cos\alpha) = -\frac{v_{lim}}{2}$$

$$t_A = -\frac{v_{lim}}{2g(\sin\alpha - 10\ f\ \cos\alpha)} \approx 0{,}5\ s$$

$$d_2 = x(t_A) = \frac{-{v_{lim}}^2}{8g(\sin\alpha - 10\ f\ \cos\alpha)} + d_1 = 7{,}1 + d_1 = 881\ m$$

Exercice 9 : Température d'une résistance électrique

Une résistance électrique de capacité thermique C est placée dans une pièce à la température T_0 supposée constante.

Initialement, la résistance est en équilibre thermique avec la pièce à la température à T_0. À $t = 0$, on fait passer un courant dans la résistance qui dissipe par effet Joule une puissance constante P dans la résistance.

Lorsque la température de la résistance est T, on admet qu'il y a un transfert thermique de la résistance vers le milieu extérieur de la forme $aC(T - T_0)dt$ pendant un temps infinitésimal dt, a étant une constante positive.

1) Régime permanent : à l'aide d'un bilan énergétique en régime permanent, donner la température limite T_∞ si t tend vers l'infini.

2) Écrire un bilan énergétique entre deux instants voisins t et $t + dt$ et déterminer l'équation différentielle liant T et t. Contrôler son homogénéité. Retrouver T_∞.

3) Intégrer cette équation pour déterminer $T(t)$.

Température d'une résistance électrique

1) $dH \underbrace{=}_{PCII} CdT \underbrace{=}_{\substack{1er\ principe \\ isobare}} \delta Q = Pdt - aC(T - T_0)dt$

En régime permanent, la température ne varie plus, soit $T = T_\infty \quad dT = 0$

$$dH \underbrace{=}_{\substack{régime \\ permanent}} 0 = Pdt - aC(T_\infty - T_0)dt$$

Soit $P = aC(T_\infty - T_0)$ et $T_\infty = T_0 + \frac{P}{aC}$;

2) $dH \underbrace{=}_{PCII} CdT \underbrace{=}_{\substack{1er\ principe \\ isobare}} \delta Q = Pdt - aC(T - T_0)dt = [P - aC(T - T_0)]dt$

Soit en divisant par dt : $C\frac{dT}{dt} = P - aC(T - T_0)$ ou encore sous forme canonique : $\frac{dT}{dt} + aT = \frac{P}{C} - aT_0$

Avec valeur en régime stationnaire : $T_\infty = T_0 + \frac{P}{aC}$ et constante de temps caractéristique $\tau = \frac{1}{a}$

3) $T(t) = T_0 + \frac{P}{aC}(1 - e^{-at})$