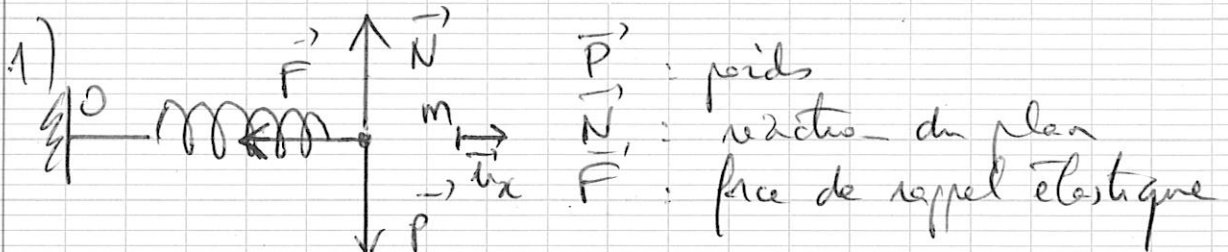


# OSCILLATEUR HARMONIQUE Travaux Dirigés

## Exercice 1 : ressort horizontal

$\vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$   
(pas de mouvement vertical)



$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_x = -k(x - l_0)\vec{u}_x$$

2) PFD :  $\left( \frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt} \right)_R = \sum \vec{F}$

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}$$

Projection sur Ox :

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}l_0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3)

$$\begin{aligned}
 x(t) &= X_0 + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \\
 \dot{x}(t) &= -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t) \\
 \ddot{x}(t) &= -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t) - B\omega_0^2\sin(\omega_0 t) \\
 \ddot{x}(t) &= -\omega_0^2(A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t))
 \end{aligned}$$

$$\omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 X_0 + A\omega_0^2\cos(\omega_0 t) + B\omega_0^2\sin(\omega_0 t)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_0 = \omega_0^2 l_0$$

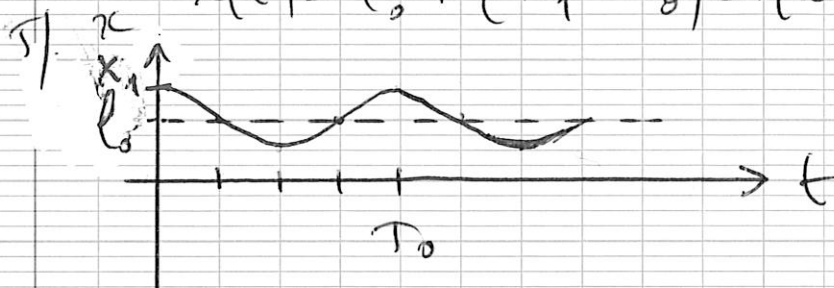
$$\text{si } X_0 = l_0$$

$$4) \quad x(0) = l_0 + A = X_1 \Rightarrow A = (X_1 - l_0)$$

$$\dot{x}(0) = B \omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0$$

Solution:

$$x(t) = l_0 + (X_1 - l_0) \cos(\omega_0 t).$$



Amplitude:  
 $X_1 - l_0$   
 ( $X_1 > l_0$ )

### Exercice 2 : ressort vertical

1)

$\vec{P}$  : poids  $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$   
 $\vec{F}$  : force de repulsion élastique  
 $\vec{F} = -kz \vec{u}_z$

2)

$$m\ddot{z} = -mg - kz$$

$$\ddot{z} + \left(\frac{k}{m}\right)z = -g.$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

3)

$$z(t) = A + B \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{z}(t) = -\omega_0 B \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\ddot{z}(t) = -\omega_0^2 B \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

$$\begin{aligned} \ddot{z} + \omega_0^2 z &= -\omega_0^2 B \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ &\quad + A\omega_0^2 + B\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ &= A\omega_0^2 \\ &= -g. \end{aligned}$$

$$A \frac{k}{m} = -g \Rightarrow A = -\frac{mg}{k}$$

A correspond à la valeur de  $z$  à l'équilibre.  
A l'équilibre:

$$z_{eq} = -\frac{mg}{k}$$

$$l = l_0 + z_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}$$

ressort comprimé!

$$4) \begin{cases} z(t) = B \cos(\omega_0 t + \varphi) - \frac{mg}{k} \\ \dot{z}(t) = -B\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

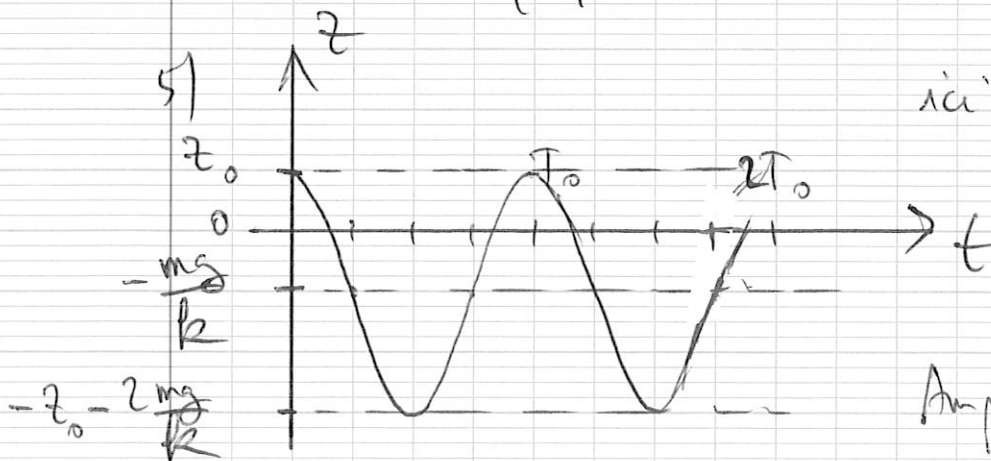
$$\begin{cases} z(0) = z_0 = B \cos \varphi - \frac{mg}{k} \Rightarrow B = z_0 + \frac{mg}{k} \\ \dot{z}(0) = 0 = -B\omega_0 \sin \varphi \Rightarrow \varphi = 0 \end{cases}$$

Solution:

$$z(t) = -\frac{mg}{k} + \left(z_0 + \frac{mg}{k}\right) \cos(\omega_0 t)$$

Vérif:

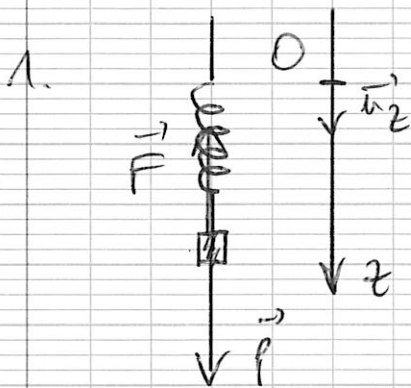
$$\begin{aligned} z(0) &= z_0 \\ \dot{z}(t) &= -\omega_0 \left(z_0 + \frac{mg}{k}\right) \sin(\omega_0 t) \\ \dot{z}(0) &= 0 \end{aligned}$$



$$\text{ici: } z_0 > -\frac{mg}{k}$$

$$\text{Amplitude: } z_0 + \frac{mg}{k}$$

### Exercice 3 : ressort vertical (2)



Forces extérieures :

$$\vec{P}' = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$$

$$\vec{F}' = -k(l-l_0)\vec{u}_z$$

$$\vec{F} = -k(z-l_0)\vec{u}_z$$

PFD :  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{P}' + \vec{F}$

Avec  $\vec{p} = m\vec{v}_z\vec{u}_z$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\ddot{z}\vec{u}_z$$

$$m\ddot{z}\vec{u}_z = mg\vec{u}_z - k(z-l_0)\vec{u}_z$$

En projetant sur  $\vec{u}_z$  :

$$m\ddot{z} = mg - k(z-l_0)$$

$$\ddot{z} + \frac{k(z-l_0)}{m} = g$$

$$\ddot{z} + \left(\frac{k}{m}\right)z = g + \frac{kl_0}{m}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Même période que pour l'oscillateur horizontal.

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

2. Position d'équilibre :

$$\ddot{z} = 0$$

$$\frac{k}{m}z_{eq} = g + \frac{kl_0}{m}$$

$$z_{eq} = \frac{mg}{k} + l_0$$

Verifs:  $\left| \begin{array}{l} z_{eq} > l_0 \quad \text{OK (orientation z vers le bas)} \\ \text{si } m \nearrow, z_{eq} \nearrow \\ \text{si } k \nearrow, z_{eq} \searrow \end{array} \right.$

3. Solution générale:

$$z(t) = z_{eq} + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

CI:  $\begin{cases} z(0) = z_0 \\ \dot{z}(0) = 0 \end{cases}$

$$\dot{z}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t)$$

$$\begin{cases} z(0) = z_0 = z_{eq} + A \Rightarrow A = z_0 - z_{eq} \\ \dot{z}(0) = 0 = +\omega_0 B \Rightarrow B = 0 \end{cases}$$

d'où:

Solution ou bien connue:

$$z(t) = z_{eq} + (z_0 - z_{eq}) \cos(\omega_0 t).$$

4.  $E_p(z) = \frac{1}{2} k (z - L_0)^2 - mgz$ .

\*  $\frac{1}{2} k (z - L_0)^2 = \text{Energie Potentielle Elastique}$

\*  $-mgz = \text{Energie Potentielle de Pesanteur}$

$$\frac{dE_p}{dt} = k \dot{z} (z - L_0) - mg \dot{z}$$

Or a aussi:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 \quad \text{d'où:}$$

$$\frac{d\tilde{E}_c}{dt} = m\ddot{z}\dot{z}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\frac{dE_m}{dt} &= \frac{dE_p}{dt} + \frac{dE_c}{dt} \\ &= k\dot{z}(z - L_0) - mg\dot{z} + m\ddot{z}\dot{z} \\ &= \dot{z}(k(z - L_0) - mg + m\ddot{z}) \\ &= \dot{z}(k(z - l_{eq}) + k(l_{eq} - L_0) - mg + m\ddot{z}) \\ &= \dot{z}(\underbrace{k(l_{eq} - L_0) - mg}_{=0} + \underbrace{k(z - l_{eq}) + m\ddot{z}}_{=0})\end{aligned}$$

(Equilibre statique)

$$k(z - l_{eq}) + m\ddot{z} = k\dot{z} - k l_{eq} + m\ddot{z}$$

$$= \cancel{k z_{eq}} + k(z_0 - z_{eq})\cos(\omega_0 t) - \cancel{k z_{eq}} + m\omega_0^2 \times (z_0 - z_{eq})\cos(\omega_0 t)$$

$$= k(z_0 - z_{eq})\cos(\omega_0 t) - k(z_0 - z_{eq})\cos(\omega_0 t) = 0$$

d'où :  $\frac{dE_m}{dt} = 0$

L'énergie mécanique du système se conserve !

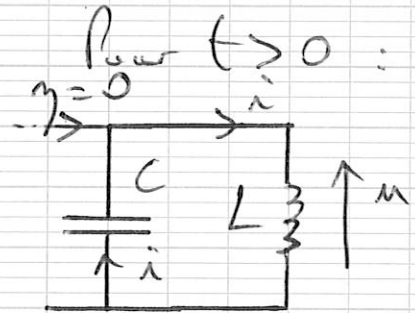
$$E_m = \text{constante.}$$

## Exercice 4 : Étude énergétique d'un oscillateur harmonique électrique

1.  $E_{\text{tot}} = E_C + E_L$

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} C u^2 + \frac{1}{2} L i^2$$

$$u = L \frac{di}{dt}$$



$$\left( i = -C \frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{i}{C} \right) \rightarrow \text{utiliser au 2.}$$
$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = C u \frac{du}{dt} + L i \frac{di}{dt}$$

$$= C L \frac{du}{dt} \frac{d^2 u}{dt^2} + L i \frac{di}{dt}$$

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = L \frac{di}{dt} \left( LC \frac{d^2 i}{dt^2} + i \right) \quad (1)$$

2.  $E_{\text{tot}}$  est constante car il n'y a pas de pertes joules.

$$(1) \Rightarrow \frac{di}{dt} = 0 \quad \text{faux}$$

$$\text{ou} \quad LC \frac{d^2 i}{dt^2} + i = 0$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \left( \frac{1}{LC} \right) i = 0$$

$\searrow \omega_0^2$

Par les lois de Kirchhoff :

$$u = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{du}{dt} = L \frac{d^2 i}{dt^2}$$

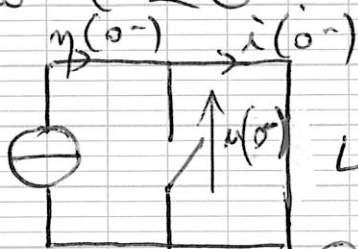
$$i = -C \frac{du}{dt} \Rightarrow i = -CL \frac{d^2 i}{dt^2}$$

On retrouve :

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + i = 0$$

3. Pour  $t < 0$  :

! C.I.



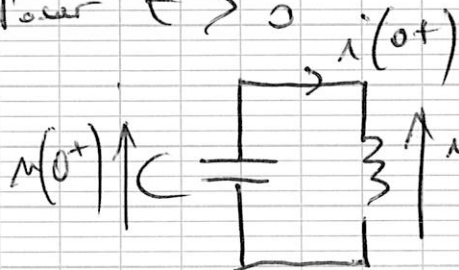
$$L \frac{di}{dt}(0^-) = u(0^-) = I_0$$

$$\Rightarrow i(0^+) = i(0^-) = I_0$$

(car bobine)

$$u(0^-) = 0$$

Pour  $t > 0$



$$u(0^+) = u(0^-)$$

(car condensateur)

$$u(0^+) = u(0^-) = 0$$

$$L \frac{di}{dt}(0^+) = 0$$

$$\frac{di}{dt}(0^+) = 0$$

$$4. \frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0$$

SG = SEH =

$$\begin{cases} i(t) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \frac{di}{dt}(t) = -\omega_0 I_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

$$i(0^+) = I_m \cos \varphi = I_0$$

$$\frac{di}{dt}(0^+) = -\omega_0 I_m \sin \varphi = 0$$

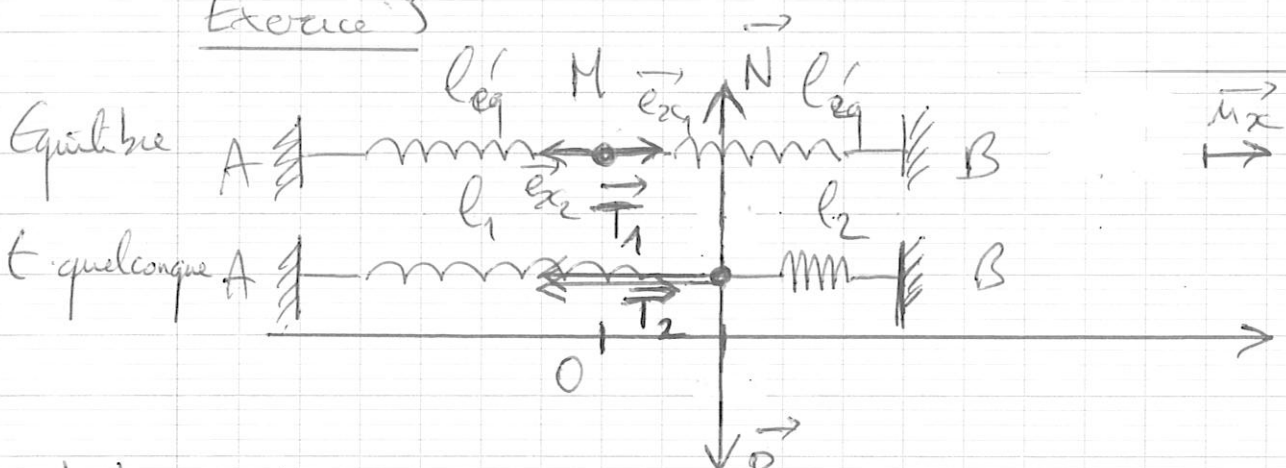
On en déduit :

$$\varphi = 0$$

$$I_m = I_0$$

$$\text{donc : } i(t) = I_0 \cos(\omega_0 t)$$

# Exercice 5



1/2)  $\vec{e}_{x_1}$  Vecteur sortant du ressort 1.  $\vec{e}_{x_1} = \vec{u}_x$   
 $\vec{e}_{x_2}$  Vecteur sortant du ressort 2.  $\vec{e}_{x_2} = -\vec{u}_x$

Bilan des forces :

$\vec{P}$   
 $\vec{T}_1$   
 $\vec{T}_2$  se compensent

$$\vec{T}_1 = -k(l_1 - l_0)\vec{e}_{x_1} = -k(l_1 - l_0)\vec{u}_x$$

$$\vec{T}_2 = -k(l_2 - l_0)\vec{e}_{x_2} = +k(l_2 - l_0)\vec{u}_x$$

IFD :

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$$

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m\vec{a}$$

$$-k(l_1 - l_0)\vec{u}_x + k(l_2 - l_0)\vec{u}_x = m\ddot{x}\vec{u}_x$$

$$-k(l_1 - l_{eq} + l_{eq} - l_0)\vec{u}_x + k(l_2 - l_{eq} + l_{eq} - l_0)\vec{u}_x = m\ddot{x}\vec{u}_x$$

C'est à dire :

$$-k(l_1 - l_{eq} + l_{eq} - l_0) + k(l_2 - l_{eq} + l_{eq} - l_0) = m\ddot{x}$$

$$-k(l_1 - l_{eq}) - k(l_{eq} - l_0) + k(l_2 - l_{eq}) + k(l_{eq} - l_0) = m\ddot{x}$$

$$-k(l_1 - l_2) = m\ddot{x}$$

$$-2kx = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \left(\frac{2k}{m}\right)x = 0$$

$\omega_0^2$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

3) SEH = SG (pas de second membre ici):  

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$$A t = 0, \quad x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) - B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

d'où : mathématiquement :

$$\begin{cases} x(0) = A \\ \dot{x}(0) = -B\omega_0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} x(0) = A = x_0 & \Rightarrow A = x_0 \\ \dot{x}(0) = -B\omega_0 = 0 & \Rightarrow B = 0 \end{cases}$$

Solution :

$$| x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} |$$

|| Le système est équivalent à une masse  $m$  accrochée à un seul ressort de raideur  $2k$ .

4) 
$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$\dot{x}(t) = -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

d'où :

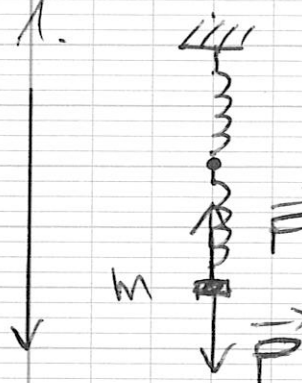
$$E_c = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot x^2$$

d'où :

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot x_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

## Exercice : Deux ressorts à la verticale

1.   $\vec{F} = -k \cdot \Delta l \cdot \vec{u}_z$   
 $\vec{F}' = -k (\Delta l_1 + \Delta l_2) \vec{u}_z$   
Les ressorts identiques donc :  
 $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{\Delta l}{2}$

Or :  $\vec{F} = -k_1 \frac{\Delta l}{2} \vec{u}_z$  pour le 1<sup>er</sup> ressort

$\vec{F}' = -k_2 \frac{\Delta l}{2} \vec{u}_z$  pour le 2<sup>nd</sup> ressort

$F = -k \cdot \Delta l$  et  $F = -k_1 \cdot \frac{\Delta l}{2} = -\frac{k_1}{2} \cdot \Delta l$

Par identification :  $k = \frac{k_1}{2}$

cad :  $k_1 = 2k$

La raideur du demi-ressort est le double de la raideur du ressort.

2. Référentiel : Terre, galiléen.

\* Système 1 : masse  $m_1$ .

Bilan des forces :

$$\vec{P}_1 = m_1 \vec{g} = m_1 g \vec{u}_z$$

$$F_{\text{ressort } 1/m_1} = -k_1 \Delta l_1 \vec{u}_z$$

$$F_{\text{ressort } 2/m_1} = +k_2 \Delta l_2 \vec{u}_z$$

$$d'où : m_1 g - k_1 \Delta l_1 + k_2 \Delta l_2 = 0 \quad (1)$$

\* Système 2 : masse  $m_2$

bilan des forces :

$$\vec{P}_2 = m_2 \vec{g} = m_2 g \vec{u}_2$$

$$\vec{F}_{ressort 2/m_2} = -k_2 \Delta l_2 \vec{u}_2$$

d'où :

$$m_2 g - k_2 \Delta l_2 = 0 \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \boxed{\Delta l_{2eq} = \frac{m_2 g}{k_2}}$$

$$(1) \Rightarrow \Delta l_{1eq} = \frac{m_1 g}{k_1} + \frac{k_2 \Delta l_{2eq}}{k_1}$$

$$\Delta l_{1eq} = \frac{m_1 g}{k_1} + \frac{m_2 g}{k_1}$$

$$\boxed{\Delta l_{1eq} = \frac{(m_1 + m_2)g}{k_1}}$$

$$3. \Delta l_1 = \Delta l_{1eq} + z_1$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_{2eq} - z_1 + z_2$$

D'après PFD sur masse  $m_1$  :

$$m_1 g - k_1 \Delta l_1 + k_2 \Delta l_2 = m_1 \ddot{z}_1 \quad (3)$$

D'après PFD sur masse  $m_2$  :

$$m_2 g - k_2 \Delta l_2 = m_2 \ddot{z}_2 \quad (4)$$

En remplaçant par les expressions de  $\Delta l_1$  et  $\Delta l_2$  :

$$(3) \Rightarrow m_1 g - k_1 \left( \frac{(m_1 + m_2)g}{k_1} + z_1 \right) + k_2 \left( \frac{m_2 g}{k_2} - z_1 + z_2 \right) = m_1 \ddot{z}_1$$

$$\Rightarrow \cancel{m_1 g} - \cancel{(m_1 + m_2)g} - k_1 z_1 + \cancel{m_2 g} - k_2 z_1 + k_2 z_2 = m_1 \ddot{z}_1$$

$$\Rightarrow -(k_1 + k_2) z_1 + k_2 z_2 = m_1 \ddot{z}_1$$

$$\Rightarrow \ddot{z}_1 + \frac{k_1 + k_2}{m_1} z_1 - \frac{k_2}{m_1} z_2 = 0 \quad (5)$$

$$(4) \Rightarrow m_2 g - k_2 \left( \frac{m_2 g}{k_2} - z_1 + z_2 \right) = m_2 \ddot{z}_2$$

$$\Rightarrow m_2 g - m_2 g + k_2 z_1 - k_2 z_2 = m_2 \ddot{z}_2$$

$$\Rightarrow \ddot{z}_2 + \frac{k_2}{m_2} z_2 - \frac{k_2}{m_2} z_1 = 0 \quad (6)$$

4.  $z_2 = 0$

$$(5) \Rightarrow \ddot{z}_1 + \left( \frac{k_1 + k_2}{m_1} \right) z_1 = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1} \rightarrow \omega_0^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1}}$$

$$\begin{cases} z_1(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1(0) = z_d = A \quad \Rightarrow \quad A = z_d \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1(0) = 0 = \omega_0 B \quad \Rightarrow \quad B = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc : } z_1(t) = z_d \cos(\omega_0 t)$$

### Exercice 6 : Résolution de problème : lance-pierre

L'énergie potentielle du ressort est  $E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} \cdot F^2/k$ .

Le système (lance-pierre + pierre) peut être assimilé à un système masse ressort horizontal lorsque la pierre est en contact avec la bande de caoutchouc, donc au moins jusqu'au moment où  $x = 0$ .

A cet instant l'énergie potentielle de la bande est nulle, et l'énergie cinétique de la pierre est maximale, égale à l'énergie potentielle initiale, car l'énergie du système est conservée.

L'énergie potentielle initiale est donc restituée intégralement au projectile, on a alors :

$$E_c = F^2/(2k) = m \cdot v^2/2$$

On en déduit :

$$v = \frac{F}{\sqrt{k m}}$$

Application numérique :

Quelle force peut-on exercer par traction avec un bras ?

On soulève aisément une masse  $m = 10 \text{ kg}$ , ce qui correspond à une force d'environ :

$$F = m \cdot g = 100 \text{ N}.$$

Une bande de caoutchouc s'étire alors pour un bon lance-pierre d'environ

$$x = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}.$$

On calcule alors :

$$k = 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

L'énergie cinétique vaut alors :

$$E_c = 0,5 \text{ J}.$$

Pour une pierre de masse  $m = 1 \text{ g}$ , la vitesse initiale est donc de :

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

L'ordre de grandeur est correct.

