D.S. de Physique N°3

Durée 3h00

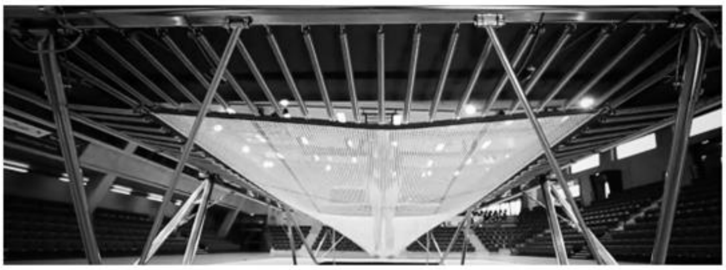
Lire tout l'énoncé avant de commencer, **numéroter** les feuilles et les questions, utiliser les **notations de l'énoncé**, apporter des **justifications** brèves mais précises et complètes, fournir des résultats **homogènes et** $\boxed{\textbf{encadrés}}$ et des applications numériques **soulignées** et accompagnées d'une **unité.**

Calculatrice interdite

Le sujet est long. Il ne s'agit pas d'essayer absolument de le finir mais de gérer au mieux votre temps.

PROBLEME N°1 : MODELISATION D'UN TRAMPOLINE (ENVIRON 26 % DU BAREME)

Ce problème propose une modélisation un peu simpliste du mouvement d'un trampoliniste (athlète faisant du trampoline, aussi parfois simplement appelé gymnaste). Un trampoline est constitué d'une toile élastique, de masse négligeable, elle-même tendue de chaque côté par des ressorts.



La modélisation à 3 dimensions n'étant pas aisée, on adopte ici une modélisation 1D nettement plus simple. Le trampoline sera modélisé par un seul ressort ne pouvant se déplacer que de façon verticale. La constante de raideur du ressort sera notée k et sa longueur à vide ℓ_0. On note m la masse de l'athlète, assimilable à un point matériel, et $z(t)$ son altitude par rapport au sol où est attaché le ressort (origine au sol, axe dirigé vers le haut).

L'accélération de la pesanteur est notée g et on prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.

On néglige tout frottement dans les parties A et B.

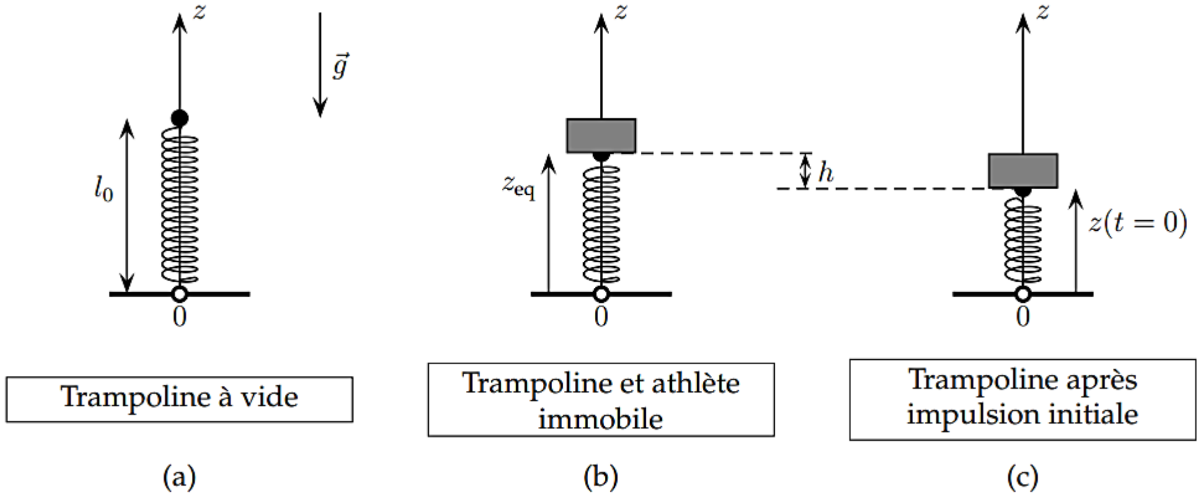


Figure 1 – Trampoline avec un ressort dans différentes configurations

A - Étude préliminaire

On choisit le trampoline à vide comme référence pour l'énergie potentielle totale.

1. Donner l'expression de l'énergie potentielle élastique $E_{p,élas}(z)$ lorsque l'athlète est à une altitude $z(t) < \ell_0$, c'est-à-dire lorsque l'athlète est en contact avec le trampoline.

2. Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{p,pes}(z)$ lorsque l'athlète est à une altitude $z(t)$.

3. En déduire l'expression de l'énergie potentielle totale $E_p(z)$ du point matériel en fonction de z, ℓ_0, k, m et g.

4. Déterminer la longueur z_{eq} du ressort à l'équilibre, c'est-à-dire lorsque l'athlète se tient immobile sur le trampoline (figure 1 (b)), en fonction de m, g, k et ℓ_0.

5. Vérifier l'homogénéité et la cohérence de l'expression de z_{eq} trouvée à la question précédente.

B - Impulsion initiale et mouvement ultérieur

À $t = 0$, l'athlète fléchit les jambes puis les tend brusquement. Cela a pour effet d'enfoncer le trampoline d'une hauteur h par rapport à la position d'équilibre (figure 1 (c)). On considère que la vitesse de l'athlète reste nulle à cet instant où la compression est maximale.

6. Le système est-il conservatif ? Justifier.

7. À l'aide d'une étude énergétique *ou* du Principe Fondamental de la Dynamique, établir l'équation différentielle $(\mathbf{I})$ du mouvement et la mettre sous la forme :

$$\ddot{z} + \omega_0^2\, z = \omega_0^2\, z_{eq} \qquad (\mathbf{I})$$

où l'on précisera l'expression littérale de la pulsation propre ω_0 en fonction des données du problème.

8. Donner les conditions initiales $z(t=0)$ et $\dot{z}(t=0)$.

9. Résoudre l'équation différentielle $(\mathbf{I})$ obtenue. On exprimera $z(t)$ en fonction de z_{eq}, h, ω_0 et t.

10. Donner l'expression de la période propre T_0 du mouvement en fonction des données du problème.

11. Tracer l'allure de la courbe $z(t)$ en représentant T_0, z_{eq} et h.

Par la suite, le gymnaste prend son envol, monte dans les airs avant de redescendre : il n'est alors plus en contact avec le trampoline. **L'étude du mouvement du gymnaste lorsqu'il n'est plus en contact avec le trampoline a été supprimée.**

C – Atterrissage

L'athlète redescend et reprend contact avec le trampoline pour ensuite s'arrêter. Pour diminuer le nombre d'oscillations, il écarte les bras introduisant ainsi un frottement fluide avec l'air dont la puissance est donnée par $P=-\alpha v^2$ où v représente la vitesse verticale de l'athlète et α un coefficient positif appelé coefficient de frottement fluide.

On choisit la nouvelle origine des temps $t=0$ au moment où l'athlète touche le trampoline avec $z(t=0)=\ell_0$ et $\dot{z}(t=0)=v_0$.

12. À l'aide d'une étude énergétique *ou* du Principe Fondamental de la Dynamique, montrer que l'équation différentielle $(\mathbf{II})$ vérifiée par la coordonnée $z(t)$ au cours du temps s'écrit :

$$\ddot{z}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{z}+\omega_0^2\,z=\omega_0^2\,z_{eq} \qquad (\mathbf{II})$$

L'oscillateur est donc caractérisé par le couple (Q,ω_0) dont on déterminera l'expression en fonction de k,α,m.

13. On pose $Z=z-z_{eq}$, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $Z(t)$.

On se place dans le cas du régime pseudo-périodique. Les solutions sont de la forme :

$$Z(t)=e^{-t/\tau}(A\cos\Omega t+\ B\sin\Omega t)$$

14. Déterminer la condition sur Q pour être dans un tel régime.

15. Sachant que $z_{eq}=\ell_0-\frac{mg}{k}$ et en utilisant les conditions initiales $z(t=0)$ et $\dot{z}(t=0)$, déterminer les conditions initiales $Z_0=Z(t=0)$ et $\dot{Z}(t=0)$.

On montrera que : $Z_0=Z(t=0)=\frac{mg}{K}$ et $\dot{Z}(t=0)=v_0$.

16. En déduire les expressions de A et B en fonction de Z_0, v_0, Ω et τ.

17. Déterminer l'expression de $Z_\infty=\lim_{t\to\infty}Z(t)$. A quelle position correspond Z_∞ ?

18. Tracer l'allure de $Z(t)$ en faisant apparaitre les grandeurs suivantes : T (pseudo-période) et Z_0.

PROBLEME N°2 : MOTEUR DE STIRLING (ENVIRON 30 % DU BAREME)

Aide aux calculs :

$4 * 8{,}31 * 3{,}3 = 110$ $\quad$ $4 * 8{,}31 * 9{,}3 = 310$

A) Etude pratique

On considère $n = 40$ mmol d'helium, assimilable à un gaz parfait de coefficient isentropique constant $\gamma = C_p / C_v = 1{,}66$, subissant un cycle modélisé par les évolutions suivantes à partir de l'état A de volume $V_A = 1$ L :

- Compression isotherme réversible au contact de la source $\mathscr{S}_f$, jusqu'à l'état B, de volume $V_B = V_A / 4$;
- Échauffement isochore au contact thermique de la source $\mathscr{S}_c$ jusqu'à l'état C ;
- Détente isotherme réversible au contact de la source $\mathscr{S}_c$ jusqu'à l'état D, de volume V_A ;
- Refroidissement isochore au contact thermique de la source $\mathscr{S}_f$ jusqu'à l'état A.

La source chaude $\mathscr{S}_c$ est maintenue à température constante $T_c = 930$ K par un bruleur alimenté en méthane et en air.
La source froide $\mathscr{S}_f$ est maintenue à température constante $T_f = 330$ K, en régime permanent de fonctionnement, par le retour d'eau froide des circuits de chauffage.

On donne la constante des gaz parfaits : R = 8,31 J.K^{-1}.mol^{-1}

III.1. Calculer les valeurs numériques de pression et de volume dans chacun des états. On présentera les résultats dans un tableau.

III.2. Représenter l'allure du cycle dans le diagramme de Watt *(P,V).*

III.3. Le cycle est-il moteur ou récepteur ? Justifier.

III.4. On rappelle la relation de Mayer : $C_p - C_v = n$R. Exprimer C_p et C_v en fonction de n, R et γ.

III.5. Déterminer pour la transformation $A \to B$ l'expression du travail W_{AB} et du transfert thermique Q_{AB} reçus par le fluide en fonction de n, R et T_f. Commenter le signe de W_{AB}.

III.6. Déterminer pour la transformation $B \to C$ l'expression du travail W_{BC} et du transfert thermique Q_{BC} reçus par le fluide en fonction de n, R, γ, T_f et T_c. Commenter le signe de Q_{BC}.

Les questions III.7 à III.9 ont été supprimées.

III.10. Déterminer pour la transformation $C \to D$ l'expression du travail W_{CD} et du transfert thermique Q_{CD} reçus par le fluide.

III.11. Déterminer pour la transformation $D \to A$ l'expression du travail W_{DA} et du transfert thermique Q_{DA} reçus par le fluide.

III.12. Exprimer le travail total W_t fourni par le moteur au cours d'un cycle, en fonction de n, R, T_f et T_c.

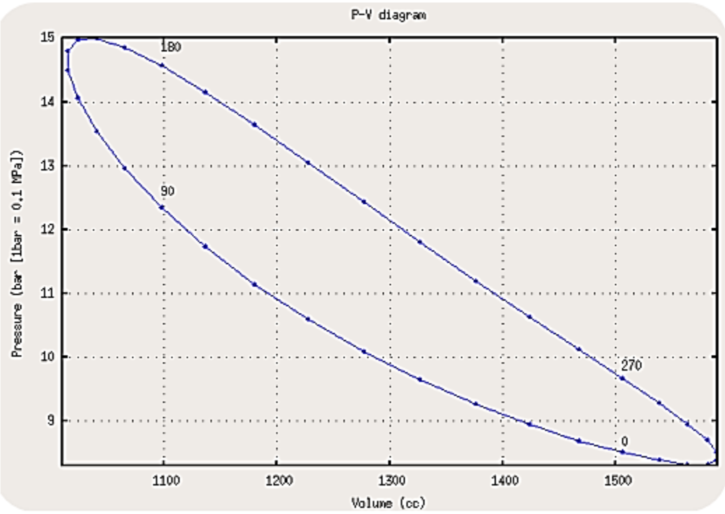
III.13. Le moteur produit du travail à partir de l'énergie thermique reçue au cours de la détente isotherme $C \to D$. Exprimer le rendement du moteur η_m uniquement en fonction de T_f et T_c et calculer sa valeur.

(On calculera une valeur approchée du rendement)

B) Etude pratique

On réalise maintenant des mesures sur un autre moteur de Stirling.

On donne ci-dessous les enregistrements de la pression P et du volume V pour un cycle (diagramme de Watt) :



La fréquence du moteur est alors $f = 20\ Hz$.

III.14. A partir du diagramme de Watt ci-dessus, estimer le travail mécanique W fourni par le moteur sur 1 cycle.

III.15. En déduire une estimation la puissance mécanique $P_{méca}$ du moteur.

Le combustible utilisé est du méthane CH_4. La consommation de méthane est de 100 g en 540 s.

Données :

- Masses molaires : M(H) = 1 g.mol^{-1} ; M(C) = 12 g.mol^{-1}
- Pouvoir Calorifique Supérieur du méthane : 900 kJ.mol^{-1}.

On rappelle :

Pouvoir Calorifique Supérieur **(PCS)** : c'est l'énergie thermique libérée par la combustion d'un kilogramme de combustible, en comptant l'énergie récupérée si la vapeur d'eau émise est condensée, c'est-à-dire si toute l'eau vaporisée se retrouve finalement sous forme liquide.

III.16. Ecrire et équilibrer la réaction de combustion du méthane dans le dioxygène de l'air.

III.17. Calculer l'énergie thermique E_{therm} puis la puissance thermique P_{therm} libérée par la combustion de du méthane.

III.18. Estimer le rendement η du moteur. Commenter.

<u>PROBLEME N°3 : AIR DANS UN BALLON DE FOOTBALL</u> (PROBLEME OUVERT) (ENVIRON 12 % DU BAREME)

Document 1 : Caractéristiques d'un ballon de football

Ses caractéristiques sont définies par la Loi 2 du football de l'International Football Association Board. Elles ont été arrêtées en 1837.

Le ballon doit être sphérique, en cuir ou dans une autre matière adéquate, avoir une circonférence de 70 cm au plus et de 68 cm au moins, soit un diamètre de 22 cm, une masse de 650 g au plus et de 600 g au moins au début du match, la pression à l'intérieur du ballon se situant entre 1,6 atm (pour les ballons de futsal) et 2,1 atm.
D'après http://fr.wikipedia.org/wiki/Ballon_de_football

Document 2 : Caractéristiques techniques d'une pompe à vélo

Longueur de la partie utile (cavité) : 200 mm
Diamètre de la partie utile (cavité) : 50 mm
Pression maximale pouvant être obtenue grâce à cette pompe : 11 bars
Poids : 160 grammes

- À partir des documents ci-dessus, estimer combien de coups de pompe à vélo sont nécessaires pour gonfler un ballon de football de diamètre 20 cm à la pression de 2 bars, en supposant pour simplifier que le ballon est initialement vide de tout air.

On donne la constante des gaz parfaits : $R = 8{,}31$ J.K^{-1}.mol^{-1}

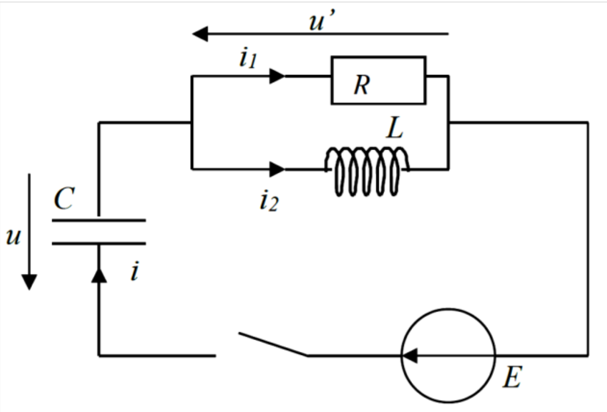
<u>PROBLEME N°4 : CIRCUIT DU SECOND ORDRE EN REGIME TRANSITOIRE</u> (ENVIRON 32 % DU BAREME)

De nombreuses questions de ce problème peuvent être traitées de manière indépendante les unes des autres.

Initialement dans le circuit ci-contre, l'interrupteur est ouvert depuis longtemps et le condensateur de capacité ***C* = 10 nF** est déchargé.

Le générateur idéal de tension délivre une tension continue *E* de valeur positive.

A un instant considéré comme origine des temps, on ferme l'interrupteur,



1) Déterminer les valeurs prises par u, u', i_1, i_2 et i, juste après la fermeture de l'interrupteur ($t = 0^+$).

2) Déterminer les valeurs prises par u, u', i_1, i_2 et i, quand le nouveau régime permanent est atteint (t infini).

3) Etablir l'équation différentielle vérifiée par u. La présenter sous la forme canonique suivante :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + {\omega_0}^2 u = {\omega_0}^2 E$$

On justifiera notamment $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $= R\sqrt{\frac{C}{L}}$. Comment nomme-t-on ces coefficients ?

Commenter l'évolution de Q par rapport à R.

4) Déterminer l'expression de R en fonction de L et C, correspondant au régime critique.

On suppose maintenant que *R* est telle que le régime soit critique.

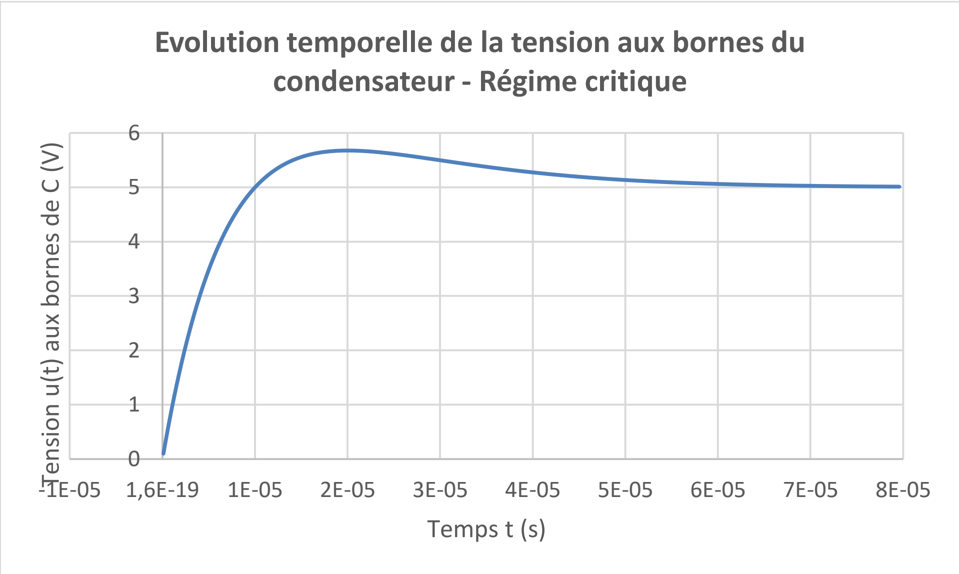
5) Quel est l'intérêt de ce régime ?

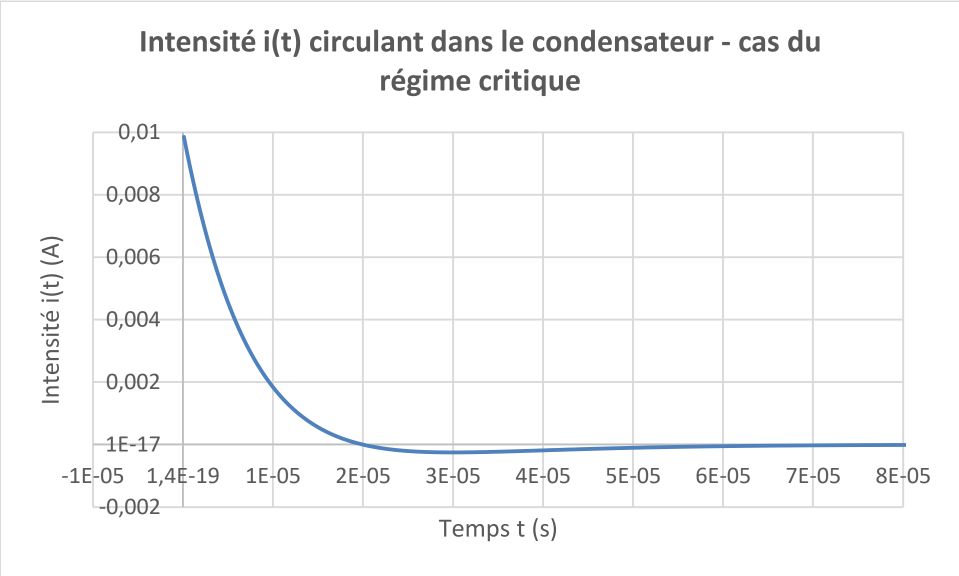
6) Résoudre alors l'équation différentielle précédente et montrer que la tension $u(t)$ s'écrit :

$$u(t) = E(\omega_0 t - 1)e^{-\omega_0 t} + E$$

7) En déduire la loi i(t).

8) Ci-dessous sont fournies les courbes représentant l'évolution de u (courbe 1) et celle de i (courbe 2) au cours du temps **lorsque le régime est critique**. Le maximum de la courbe 1 se situe précisément en $t = t_0 = 2/\omega_0 = 20$ µs.





a) Justifier l'allure de ces courbes.

b) Déduire des courbes 1 et 2 les valeurs de *E, L* et *R*.

9) Etude énergétique du régime critique

a) Quelle énergie est stockée dans le circuit en régime permanent ?

b) En s'aidant des courbes précédentes, caractériser le comportement énergétique du condensateur sur les intervalles de temps [0 ; t_0] et [t_0 ; infini].

c) Justifier que la bobine ne stocke globalement aucune énergie lors de cette phase de régime transitoire.

10) Changement de régime

En modifiant la valeur de *R*, on obtient la courbe ci-dessous : évolution temporelle de *u* en fonction de *t*.

a) Cette évolution est-elle obtenue en augmentant ou en diminuant *R* ? Justifier.

b) Mesurer la valeur du décrément logarithmique δ et celle de la pseudo-période *T*. On donne : $\ln\left(\frac{3{,}7}{2}\right) = 0{,}61$.

c) En déduire la valeur de *Q* puis celle de *R*.