E4 CIRCUITS LINEAIRES EN REGIME SINUSOÏDAL ETABLI / RESONANCE

Programme ATS

14. Circuits linéaires en régime sinusoïdal établi	
Signal sinusoïdal Pulsation et fréquence. Amplitude, phase. Représentation complexe d'un signal sinusoïdal	Passer de la représentation complexe d'un signal au signal réel et réciproquement (convention $e^{j\omega t}$).
Impédances complexes, association de deux impédances. Impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.	Établir l'expression de l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine. Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
Puissance moyenne reçue par un dipôle linéaire en régime sinusoïdal établi. Tension efficace. Intensité efficace. Facteur de puissance.	Établir et exploiter l'expression de la puissance moyenne reçue par un dipôle en fonction de la tension efficace, de l'intensité efficace et du facteur de puissance. Relier le facteur de puissance à l'impédance complexe.
Transport d'énergie électrique.	Justifier l'emploi de lignes à haute tension pour le transport d'énergie électrique. Analyser l'influence du facteur de puissance d'une installation sur les pertes d'énergie par effet Joule dans les lignes de transport.
Circuit RLC série en régime sinusoïdal établi. Résonance de courant. Facteur de qualité.	Établir l'expression de l'amplitude de la tension aux bornes de la résistance, de la bobine ou du condensateur en fonction de la fréquence en utilisant la notion d'impédance complexe. Tracer la courbe donnant l'amplitude de la tension aux bornes de la résistance en fonction de la fréquence. Relier l'amplitude et la largeur (à $1/\sqrt{2}$) du pic de résonance en courant au facteur de qualité et à la pulsation propre du circuit. **Mettre en évidence le phénomène de résonance de courant dans un circuit RLC série et estimer la valeur du facteur de qualité.**

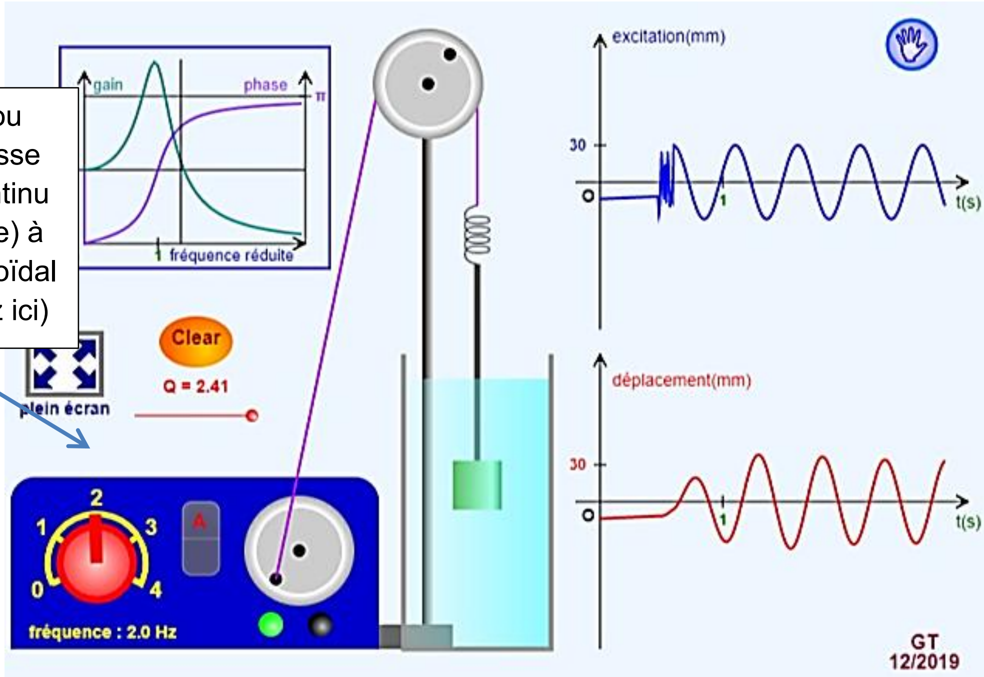
I) REGIME SINUSOÏDAL ETABLI (ou FORCE)

Mécanique : expérience

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.php?typanim=Javascript

On soumet un système oscillant électrique (circuit *RLC*) ou mécanique (système masse-ressort amorti) à une **excitation sinusoïdale** :

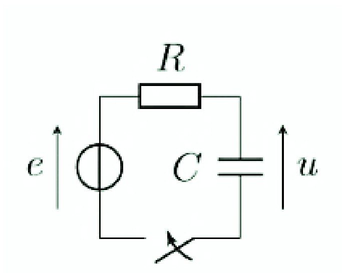
L'excitateur (ou générateur) passe d'un régime continu (fréquence nulle) à un régime sinusoïdal (fréquence 2 Hz ici)

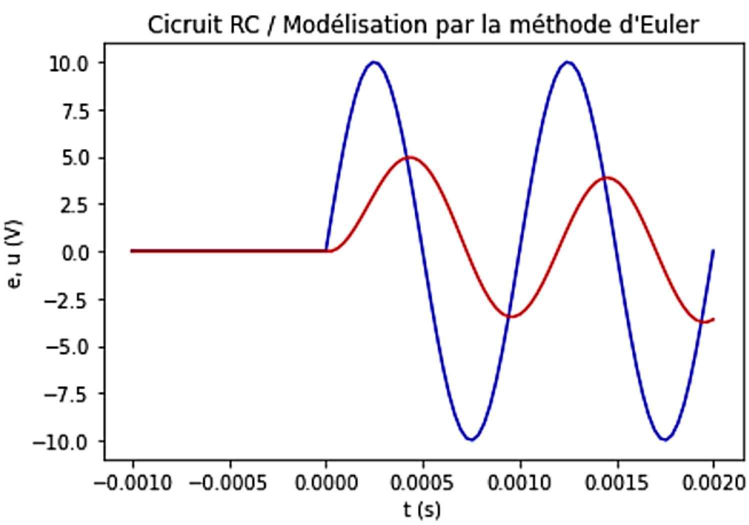


Phénomène de résonance remarquable :

[**Pont Tacoma - Résonance mécanique**]()

Electricité : simulation





Conclusion : Après un régime transitoire, le système évolue en **régime permanent sinusoïdal établi (ou forcé)** : toutes les grandeurs (en mécanique : position, vitesse, … ; en électricité : tensions, intensités) … sont **sinusoïdales**, de **même fréquence** que le générateur, **d'amplitude différente**, et **déphasées**.

II) REPRESENTATION COMPLEXE D'UN SIGNAL SINUSOÏDAL

II)1) Définition

La grandeur sinusoïdale $\boldsymbol{u(t) = U_m\cos(\omega t+\phi)}$ est représentée par le nombre complexe

Remarque : la grandeur $u(t)$ est la partie réelle de $\underline{u}(t)$:

II)2) Propriétés des grandeurs complexes

Linéarité

Dérivation et intégration

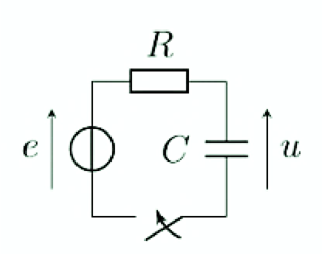
$u(t) = U_m\cos(\omega t+\phi)$ =>

$\underline{U} = U_m e^{j\varphi}$ =>

II)3) Résoudre une équation différentielle par la méthode complexe

L'équation différentielle vérifiée par *u* s'écrit, pout *t* > 0 :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = \frac{1}{\tau}e(t) \qquad \text{avec} \quad e(t) = E_m\cos(\omega t + \varphi)$$



On cherche une solution particulière sous la forme $u(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi')$.

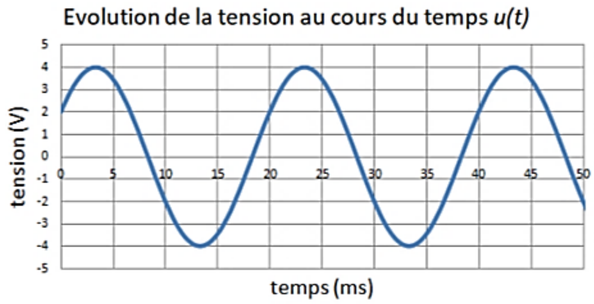
1. Ecrire cette équation différentielle en faisant apparaître les amplitudes complexes $\underline{U}$ et $\underline{E}$.
2. Résoudre cette équation différentielle pour déterminer $\underline{U}$.
3. *En déduire l'expression de* U_m *et du déphasage* $\varphi' - \varphi$.

III) LOIS DE L'ELECTRICITE EN REPRESENTATION COMPLEXE

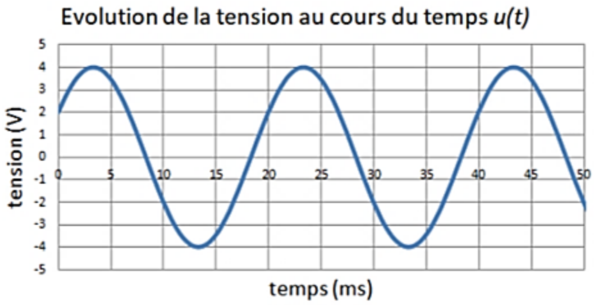
III)1) Impédance et admittance complexes

Définition

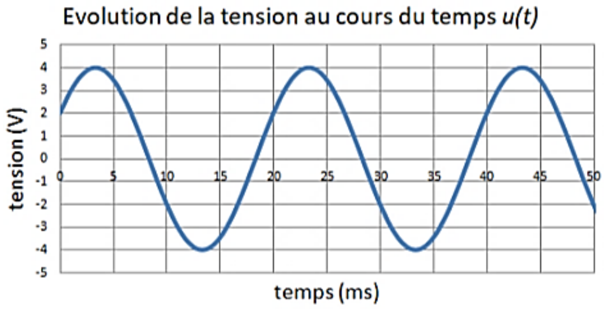
Résistance



Bobine parfaite



<u>Condensateur parfait</u>

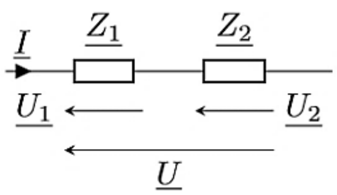


<u>III)2) Association de dipôles</u>

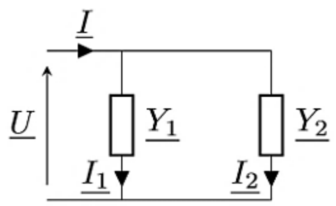
En régime sinusoïdal, on applique les règles d'associations vues en régime continu, en remplaçant :

- Les tensions *U* et intensités *I* par
- Les résistances *R* par

Association série

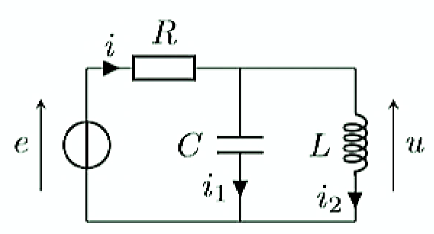


Association parallèle



III)3) Exemple

En appliquant la loi des mailles et la loi des nœuds, et en utilisant les admittances complexes, exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}$ en fonction de $\underline{E}$, L, C, R, et ω.



IV) PUISSANCE EN REGIME SINUSOÏDAL FORCE

IV)1) Valeur efficace d'une grandeur

Définition

On appelle valeur efficace d'un signal périodique $s(t)$, de période T, la grandeur S_{eff} :

$$S_{eff} = \sqrt{\langle s^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t).dt}$$

Valeur efficace en anglais : RMS, Roor Mean Square

Pour une intensité : I_{eff} est la valeur de la composante continue qui produirait le même effet joule que la grandeur $i(t)$ (dans une résistance identique).

Expression en régime sinusoïdal

$s(t) = S_m cos(\omega t + \varphi)$

D'où : $s^2(t) = {S_m}^2 cos^2(\omega t + \varphi) = {S_m}^2 \left(\frac{1+\cos(2\omega t+2\varphi)}{2}\right)$ car $cos^2 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)$

D'où : ${S_{eff}}^2 = \langle s^2 \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t).dt = \frac{1}{T}\int_0^T {S_m}^2 \left(\frac{1+\cos(2\omega t+2\varphi)}{2}\right) dt = \frac{{S_m}^2}{T}\left[\frac{t}{2} + \frac{sin(2\omega t+2\varphi)}{4\omega}\right]_0^T$

$${S_{eff}}^2 = \frac{{S_m}^2}{T}\left[\frac{T}{2} - 0 + \frac{sin(2\omega T+2\varphi) - \sin(2\varphi)}{4\omega}\right]$$

Or : $sin(2\omega T + 2\varphi) = \sin(4\pi + 2\varphi) = \sin(2\varphi)$ car $\omega T = 2\pi$ et fonction *sinus* périodique de période 2π.

On obtient :

${S_{eff}}^2 = \frac{{S_m}^2}{T}\left[\frac{T}{2}\right] = \frac{{S_m}^2}{2}$

C'est-à-dire :

$\boldsymbol{S_{eff} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}}$ **en régime sinusoïdal forcé**

IV)2) Puissance moyenne consommée par un dipôle

En régime sinusoïdal forcé, seules les opérations linéaires peuvent être réalisées à l'aide des grandeurs complexes : addition, soustraction, multiplication par une constante.

Les opérations plus complexes, et en particulier le produit de deux grandeurs dépendant du temps, ne peuvent pas être réalisées à l'aide des grandeurs complexes.

Puissance instantanée consommée par un dipôle en convention récepteur : $p = u.i$

Puissance moyenne consommée par un dipôle : $\langle p \rangle = \langle u.i \rangle$

En régime sinusoïdal :

$i(t) = I_m cos(\omega t)$ et $u(t) = U_m cos(\omega t + \varphi)$

D'où : $\langle p \rangle = \langle U_m I_m cos(\omega t + \varphi) cos(\omega t) \rangle = \langle \frac{U_m I_m cos(2\omega t+\varphi)}{2} \rangle + \langle \frac{U_m I_m cos(\varphi)}{2} \rangle$

Car $cosa\ cosb = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

Or : $\langle \frac{U_m I_m cos(2\omega t+\varphi)}{2} \rangle = 0$ car la valeur moyenne de la fonction *cosinus* est nulle,

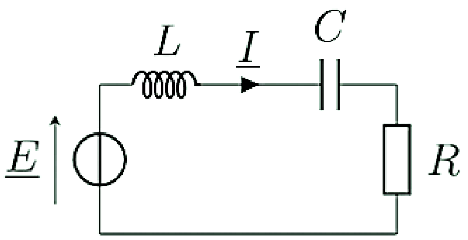
On obtient : $\langle p \rangle = \langle \frac{U_m I_m cos(\varphi)}{2} \rangle = \frac{U_m I_m cos(\varphi)}{2} = U_{eff} I_{eff} cos(\varphi)$

La puissance moyenne consommée par un dipôle en régime sinusoïdal forcé s'écrit :

$$\boldsymbol{\langle p \rangle = \frac{U_m I_m cos(\varphi)}{2} = U_{eff} I_{eff} cos(\varphi)}$$

V) ANALYSE FREQUENTIELLE DU CIRCUIT RLC SERIE

V)1) Résonance en courant



Expérience

R = 1kΩ, L = 1H, C = 50 nF

Fréquence de résonance du circuit *RLC* :

Facteur de qualité Q du circuit *RLC* :

On relève à l'oscilloscope la tension $e(t) = E.\cos(\omega t)$ et la tension $u_R(t) = R.i(t)$, image du courant $i(t)$ dans le circuit.

On fait varier la fréquence f (ou la pulsation ω) du générateur.

Observations

- Amplitude I_m de $i(t)$:

- Déphasage de $i(t)$ par rapport à $e(t)$:

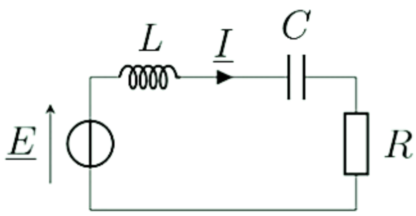
Remarques

Allure de I_m en fonction de f :

Définition de la résonance

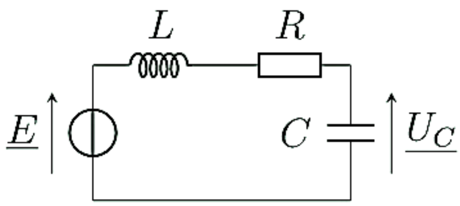
Remarque

Application



1. Que représente physiquement la fonction de transfert $\underline{I}\,/\,\underline{E}$?
2. En déduire son expression en fonction de R, L et C puis en fonction de $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et enfin en fonction de la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.
3. Interpréter les comportements limites en Haute Fréquence (HF) et Basse Fréquence (BF).
4. Déterminer la pulsation de résonance ω_R. Déterminer l'amplitude I_{mR} de $i(t)$ à la résonance ainsi que le déphasage de $i(t)$ par rapport à $e(t)$.
5. Déterminer les 2 pulsations réduites de coupures x_1 et x_2, puis la largeur en pulsation de la résonance $\Delta\omega$ en fonction de ω_0 et Q.

V)2) Résonance en tension aux bornes du condensateur



On s'intéresse désormais à la réponse en tension aux bornes du condensateur.

On établit la fonction de transfert $\underline{T} = \underline{U_C}/\underline{E}$.

En BF :

En HF :

Condition de résonance :

Pulsation réduite de résonance :

Pulsation de résonance :

Lorsque $\omega = \omega_0$, la fonction de transfert s'écrit :

Conséquence 1 : l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur peut s'écrire : $U_{Cm} = Q.E_m$.

Donc, Si $Q > 1$, lorsque $f = f_0$, la tension aux bornes du condensateur est plus élevée que celle du générateur : phénomène de **surtension**.

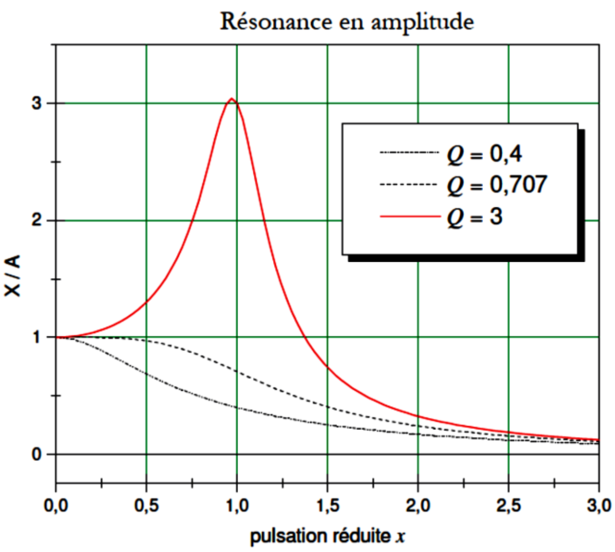
Conséquence 2 : lorsque $f = f_0$, la tension aux bornes du condensateur est déphasée de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la tension du générateur.

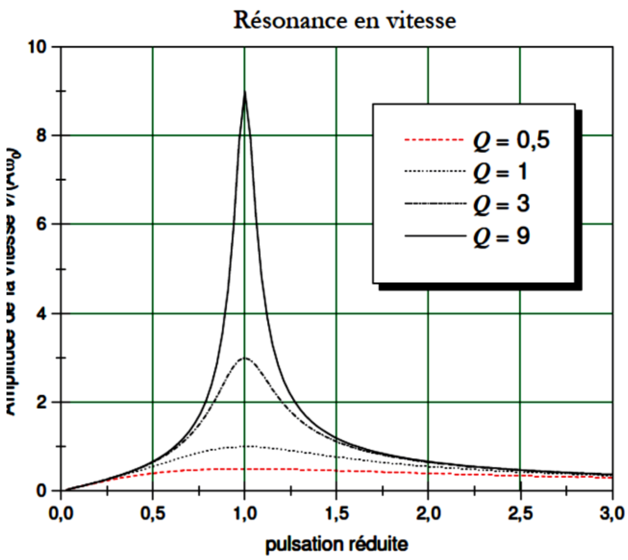
V)3) Résonance du circuit RLC : Bilan

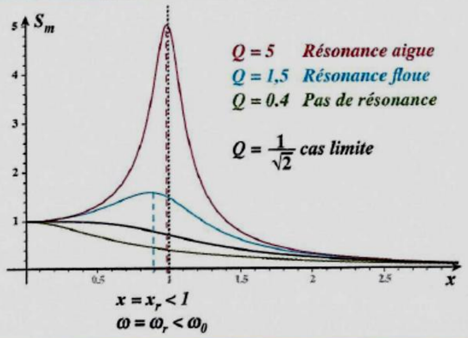
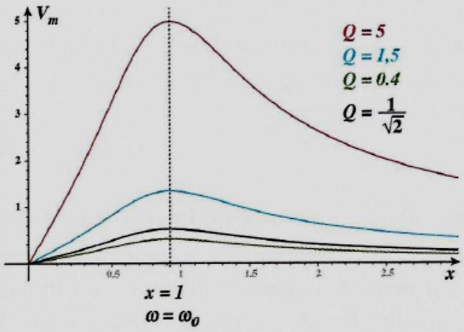
	Résonance en intensité	Résonance en tension
Existence		
Pulsation de résonance		
Largeur de la résonance		
Aspects notables à $\omega = \omega_R$		
Aspects notables à $\omega = \omega_0$		
Mesure de ω_0		
Mesure de Q		

VI) ANALOGIE MECANIQUE ET CONCLUSIONS

Mécanique	Electricité
Elongation x (m)	Charge q (C)
Vitesse v (m.s^{-1})	Intensité i (A)
Masse m (kg)	Inductance L (H)
Raideur k (N.m^{-1})	$\frac{1}{C}$ avec Capacité C (F)
Frottement h (N.m^{-1}.s ou kg.s^{-1})	Résistance R (Ω)
Force F (N)	Tension u (V)





	Réponse en élongation ou charge (ou tension)	Réponse en vitesse ou intensité
Réponse réelle	$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$	$\dot{s}(t) = V_m \cos(\omega t + \psi)$
Amplitude complexe de la réponse	$\underline{S} = \dfrac{\omega_0^2 E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\dfrac{\omega_0 \omega}{Q}} = \dfrac{E_0}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}}$	$\underline{V} = \dfrac{Q\omega_0 E_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} = \dfrac{Q\omega_0 E_0}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$
Amplitude de la réponse	$S_m = \lvert\underline{S}\rvert = \dfrac{E_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\dfrac{x}{Q}\right)^2}}$	$V_m = \dfrac{Q\omega_0 E_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}}$
Courbes		
Abscisse du maximum (résonance)	$x = x_r = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$ et $\omega = \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$	$x = 1$ et $\omega = \omega_0$
Maximum d'amplitude	Le maximum n'existe que si $Q > 1/\sqrt{2}$. x_r se rapproche de la fréquence propre quand Q augmente.	Quel que soit Q, le maximum existe et correspond toujours à la fréquence propre.