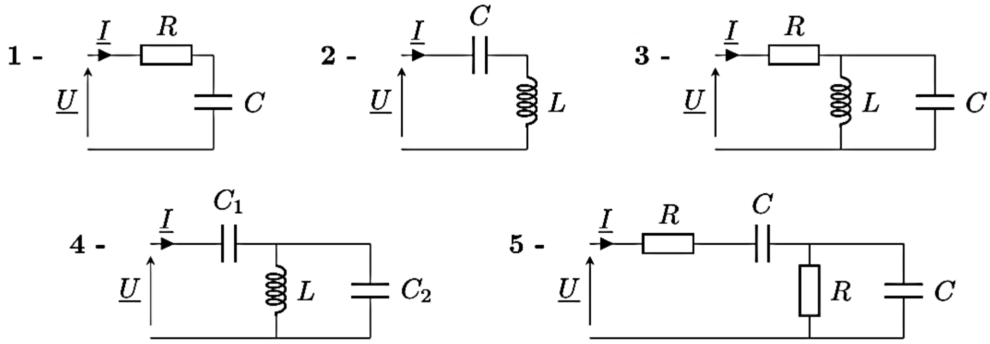
ELECTRICITE EN REGIME SINUSOÏDAL FORCE / RESONANCE

Travaux dirigés

<u>Exercice 1 : Détermination d'impédances</u>

Pour chaque dipôle ci-dessous, déterminer son impédance complexe équivalente. Ecrire le résultat sous forme d'une fraction unique, faisant apparaître des grandeurs sans dimension du type $RC\omega$, $L\omega/R$ ou $LC\omega^2$.



1. $\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_C = R + \dfrac{1}{jC\omega} = \dfrac{1 + jRC\omega}{jC\omega}$

$= \dfrac{1 + jRC\omega}{jRC\omega} R$

2. $\underline{Z} = \underline{Z}_C + \underline{Z}_L = \dfrac{1}{jC\omega} + jL\omega = \dfrac{1 - LC\omega^2}{jC\omega}$

$= \dfrac{1 - LC\omega^2}{jRC\omega} R$

3. $\underline{Z} = R + \dfrac{\underline{Z}_L \underline{Z}_C}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = R + \dfrac{jL\omega \times \frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$

$\underline{Z} = R + \dfrac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$

4. $\underline{Z} = \dfrac{1}{jC_1\omega} + \dfrac{jL\omega}{1 - LC_2\omega^2}$

$\underline{Z} = \dfrac{1 - LC_2\omega^2 - LC_1\omega^2}{jC_1\omega(1 - LC_2\omega^2)} = \dfrac{1 - L(C_1 + C_2)\omega^2}{jC_1\omega(1 - LC_2\omega^2)}$

5. $\underline{Z} = R + \dfrac{1}{jC\omega} + \dfrac{R \times \frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}}$

$\underline{Z} = R + \dfrac{1}{jC\omega} + \dfrac{R}{1 + jRC\omega}$

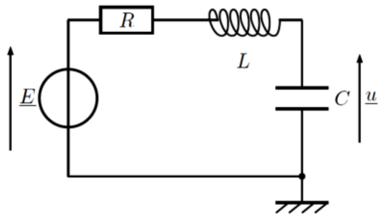
$\underline{Z} = \dfrac{jRC\omega(1 + jRC\omega) + 1 + jRC\omega + jRC\omega}{jC\omega(1 + jRC\omega)}$

$\underline{Z} = \dfrac{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2}{jC\omega(1 + jRC\omega)}$

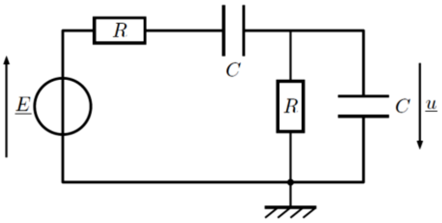
Exercice 2 : Détermination de tensions

Dans les circuits suivants, le générateur fournit une tension sinusoïdale e(t) = E.cos(ωt). Exprimer la tension *u*(*t*) aux bornes du condensateur.

1



2



$\boxed{1}$ $\underline{e} = E e^{j(\omega t)}$

Diviseur de tension :

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R + \underline{Z}_L}\,\underline{e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega}\,\underline{e}$$

$$\underline{u} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}\,\underline{e}$$

$$\underline{u} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}\,E e^{j\omega t}$$

D'où : Amplitude complexe de $\underline{u}$:

$$\underline{U} = \frac{E}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Module :

$$U = |\underline{U}| = \frac{E}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}$$

Argument :

$$\mathrm{Arg}(\underline{U}) = \underbrace{\mathrm{Arg}(\underline{E})} - \arctan\left(\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}\right)$$

$$\varphi = \mathrm{Arg}(\underline{U}) = \overset{0}{-}\arctan\left(\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}\right)$$

On en déduit $u(t)$:

$$u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$$

$\boxed{2}$ Diviseur de tension ⊕ sens de $\underline{u}$:

$$\underline{u} = - \frac{\underline{Z}_{eq}}{R + \frac{1}{jC\omega} + \underline{Z}_{eq}} \underline{e}$$

Avec $\underline{Z}_{eq} = \frac{R \times \frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$

$$\underline{u} = - \frac{\frac{R}{1 + jRC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{R}{1 + jRC\omega}} \underline{e}$$

$$\underline{u} = - \frac{R}{R + jR^2C\omega + \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega} + R} \underline{e}$$

$$\underline{u} = - \frac{jRC\omega}{jRC\omega - R^2C^2\omega^2 + 1 + jRC\omega + jRC\omega} \underline{e}$$

$$\underline{u} = - \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2} \underline{e}$$

Amplitude complexe de $\underline{u}$:

$$\underline{U} = - \frac{jRC\omega E}{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2}$$

D'où : $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$, avec :

$$U = |\underline{U}| = \frac{RC\omega E}{\sqrt{(1 - (RC\omega)^2)^2 + (3RC\omega)^2}}$$

$$\varphi = \operatorname{Arg}(\underline{U})$$

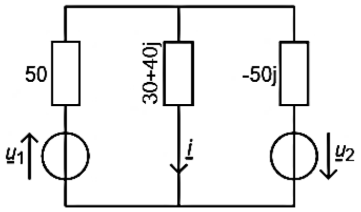
$$\varphi = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{3RC\omega}{1 - (RC\omega)^2}\right)$$

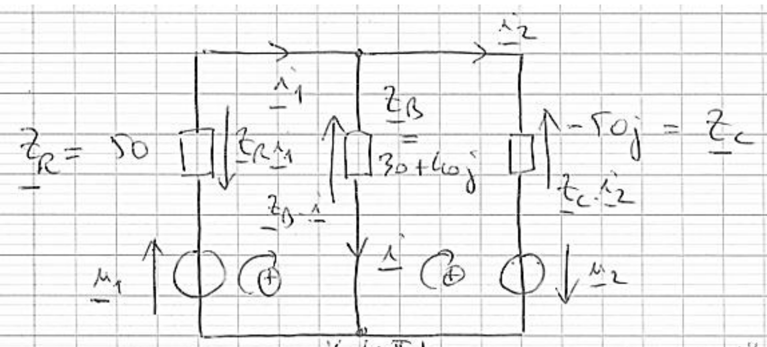
Exercice 3 : Réseau à deux mailles

Dans le circuit ci-contre, les deux sources délivrent des tensions sinusoïdales $u_1(t)$ et $u_2(t)$, de même fréquence. Les impédances complexes y sont indiquées en ohms.

$\underline{u}_1(j\omega t) = 50e^{j\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}$ et $\underline{u}_2(j\omega t) = 50e^{j\omega t}$

Calculer l'intensité complexe $\underline{i}$.





$\underline{u}_1(j\omega t) = 50\, e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}$ $\qquad$ $\underline{u}_2(j\omega t) = 50\, e^{j\omega t}$

Loi des noeuds :

$$\underline{i}_1 = \underline{i} + \underline{i}_2 \qquad (1)$$

Loi des mailles :

Gauche : $\underline{u}_1 - \underline{Z}_R \underline{i}_1 - \underline{Z}_B \underline{i} = 0 \qquad (2)$

Droite : $\underline{Z}_B \cdot \underline{i} - \underline{Z}_C \underline{i}_2 + \underline{u}_2 = 0 \qquad (3)$

$$(2) \Rightarrow \underline{i}_1 = \frac{\underline{u}_1 - \underline{Z}_B \underline{i}}{\underline{Z}_R}$$

$$(3) \Rightarrow \underline{i}_2 = \frac{\underline{Z}_B \cdot \underline{i} + \underline{u}_2}{\underline{Z}_C}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\underline{u}_1}{\underline{Z}_R} - \frac{\underline{Z}_B}{\underline{Z}_R}\underline{i} = \underline{i} + \frac{\underline{Z}_B \underline{i}}{\underline{Z}_C} + \frac{\underline{u}_2}{\underline{Z}_C}$$

$$\underline{i}\left(1 + \frac{\underline{Z}_B}{\underline{Z}_C} + \frac{\underline{Z}_B}{\underline{Z}_R}\right) = \frac{\underline{u}_1}{\underline{Z}_R} - \frac{\underline{u}_2}{\underline{Z}_C}$$

On multiplie par $\underline{Z}_R \underline{Z}_C$ à gauche et à droite

$$\underline{i}\left(\underline{Z}_R \underline{Z}_C + \underline{Z}_B \underline{Z}_R + \underline{Z}_B \underline{Z}_C\right) = \underline{u}_1 \underline{Z}_C - \underline{u}_2 \underline{Z}_R$$

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}_1 \underline{Z}_C - \underline{u}_2 \underline{Z}_R}{\underline{Z}_R \underline{Z}_C + \underline{Z}_B \underline{Z}_R + \underline{Z}_B \underline{Z}_C}$$

D'où :

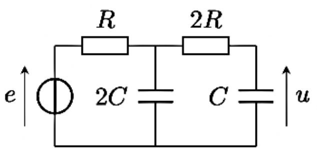
$$\underline{i} = \frac{50\, e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} \times -50j \;-\; 50\, e^{j\omega t} \times 50}{50 \times (-50j) + (30+40j) \times 50 + (30+40j) \times -50j}$$

$$\underline{i} = \frac{50 \times 50 \times e^{-j\frac{\pi}{2}}\, e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} - 50 \times 50\, e^{j\omega t}}{\text{Dénominateur}}$$

$$\underline{i} = \frac{50 \times 50 \times \cancel{e^{-j\frac{\pi}{2}}} \times e^{j\omega t} \times \cancel{e^{j\frac{\pi}{2}}} - 50 \times 50\, e^{j\omega t}}{\text{Dénominateur}}$$

$\underline{i} = \underline{0}$ (Cas très particulier !)

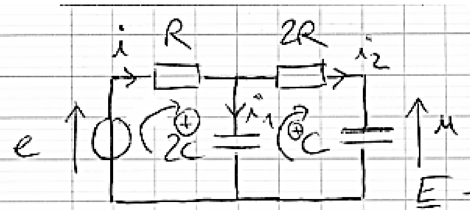
Exercice 4 : Obtention d'une équation différentielle



En utilisant les complexes, montrer que la tension u est solution de l'équation différentielle

$$4\tau^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 5\tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = e\,,$$

en posant $\tau = RC$.



$i = i_1 + i_2$

$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ (1)

$\underline{E} - R\underline{I} - \frac{1}{2jC\omega}\underline{I}_1 = 0$ (2)

$\frac{1}{2jC\omega}\underline{I}_1 - 2R\underline{I}_2 - \underline{U} = 0$ (3)

et enfin $\underline{U} = \frac{1}{jC\omega}\underline{I}_2$ (4)

4 équations, 4 inconnues : $\underline{U}, \underline{I}, \underline{I}_1, \underline{I}_2$.

(4) $\underline{I}_2 = jC\omega\underline{U}$

(3) $\Rightarrow \frac{1}{2jC\omega}\underline{I}_1 - 2jRC\omega\underline{U} - \underline{U} = 0$ (5)

(1) $\underline{I}_1 = \underline{I} - \underline{I}_2 = \underline{I} - jC\omega\underline{U}$

(5) $\Rightarrow \frac{1}{2jC\omega}\underline{I} - \frac{1}{2}\underline{U} - 2jRC\omega\underline{U} - \underline{U} = 0$ (6)

(2) $\Rightarrow \underline{E} - R\underline{I} - \frac{1}{2jC\omega}\underline{I} + \frac{1}{2}\underline{U} = 0$ (7)

(6) $\Rightarrow \underline{U}\left(\frac{3}{2} + 2jRC\omega\right) = \frac{1}{2jC\omega}\underline{I}$

$\underline{U}(3 + 4jRC\omega) = \frac{1}{jC\omega}\underline{I}$

$\underline{U}(3jC\omega - 4RC^2\omega^2) = \underline{I}$

$(1) \Rightarrow \underline{E} - \left(R + \frac{1}{2jC\omega}\right)(3jC\omega - 4RC^2\omega^2)\underline{U} + \frac{1}{2}\underline{U} = 0$

$\underline{E} + \underline{U}\left(-3jRC\omega + 4R^2C^2\omega^2 - \frac{3}{2} - 2jRC\omega\right) + \frac{1}{2}\underline{U} = 0$

$\underline{E} + \underline{U}\left(1 - 5jRC\omega + 4R^2C^2\omega^2\right) = 0$

$\underline{E} = \underline{U}\left(1 + 5jRC\omega + 4j^2R^2C^2\omega^2\right)$

$\underline{E} = \underline{U}\left(1 + 5j\tau\omega + 4j^2\tau^2\omega^2\right)$

$j\omega \rightarrow$ dérivée

$(j^2\omega^2) \rightarrow$ dérivée seconde

On repassant en temporel :

$e = u + 5\tau \frac{du}{dt} + 4\tau^2 \frac{d^2u}{dt^2}$

Exercice 5 : Etude fréquentielle de l'amplitude d'un oscillateur forcé

Considérons un système subissant des oscillations forcées vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \omega_0^2\,X_0\cos(\omega t)$$

1) En exploitant cette équation différentielle, établir l'expression de l'amplitude complexe $\underline{X}_M$ de l'élongation du ressort en fonction de la pulsation puis de la pulsation réduite $u = \frac{\omega}{\omega_0}$.
2) En déduire l'expression de l'amplitude réelle de l'élongation.
3) Effectuer l'étude asymptotique de cette amplitude à basse et haute fréquence.
4) Exprimer l'amplitude pour $\omega = \omega_0$
5) Etudier la résonance en élongation du système : condition d'existence et pulsation de résonance.

Exercice 6 : Résonance en vitesse

On considère la suite de l'étude de l'exercice 2, avec un système subissant des oscillations forcées vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \omega_0^2\,X_0\cos(\omega t)$$

Et une amplitude complexe telle que $\underline{X}_M = \frac{\omega_0^2 X_0}{\left(-u^2\omega_0^2 + i\omega_0^2\frac{u}{Q} + \omega_0^2\right)}$ ou $\underline{X}_M(u) = \frac{X_0}{1 - u^2 + i\frac{u}{Q}}$ avec $u = \frac{\omega}{\omega_0}$.

1) Etablir l'expression de l'amplitude complexe de la vitesse, puis de l'amplitude réelle de la vitesse.
2) Etudier la résonance en vitesse : condition, pulsation de résonance, amplitude à la résonance.

Exercice 7 : Oscillations forcées d'un système masse-ressort horizontal amorti

On considère une bille M, quasi ponctuelle, de masse m

On réalise le montage représenté sur la **figure 1,** qui comporte un résistor de résistance 10 Ω, une bobine d'inductance L et de résistance négligeable, et un condensateur de capacité C. L'ensemble est alimenté par un générateur fournissant une tension alternative sinusoïdale de fréquence f.

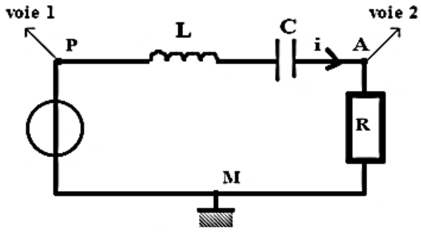


Figure 1

L'oscillogramme obtenu est reproduit **figure 2.**

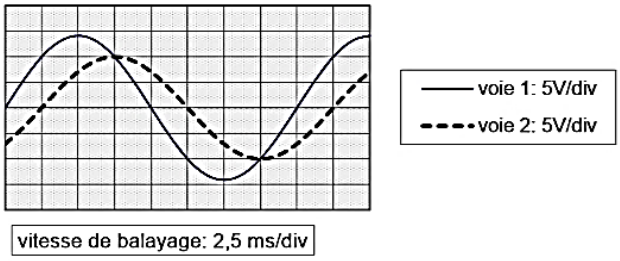


Figure 2

1) Déduire de l'oscillogramme les valeurs de la fréquence f, de l'impédance Z du dipôle (P,M) et du déphasage ψ de l'intensité i par rapport à la tension appliquée aux bornes de tout le circuit.
2) Donner l'expression numérique de l'intensité instantanée $i(t)$ et de la tension instantanée $u_{PM}(t)$ en fonction du temps.
3) Déterminer en fonction de R, L, C, ω, les expressions littérales de l'impédance complexe $\underline{Z}$ et de ψ.
   $C = 20$ µF. En déduire la valeur de L.
4) Calculer les impédances de R, de L, de C. Comparer la somme de ces trois impédances à l'impédance Z calculée au 1).

accrochée à un ressort horizontal de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k, se déplaçant sans frottements solides sur un axe horizontal (Ox). L'autre extrémité du ressort est fixe ; elle est accrochée en un point O constituant l'origine de l'axe horizontal (Ox).

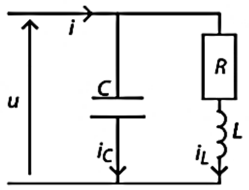
Le point M est de plus soumis à une force excitatrice $\overrightarrow{F_e} = F_m \cos(\omega t)\, \overrightarrow{e_x}$ ainsi qu'à des frottements fluides $\vec{f} = -\mathbf{h}\vec{\mathbf{v}}$.

1) Établir l'équation différentielle vérifiée par la position x du point M.
2) Déterminer l'expression de l'amplitude complexe de l'élongation.
3) En déduire l'expression de l'amplitude réelle de l'élongation.

Exercice 8 : Etude d'un oscillogramme

Exercice 9

Le circuit ci-contre est alimenté par une source de tension sinusoïdale $u(t) = U_{\max} \cos \omega t$ et de fréquence $f = 50$Hz.



1) Quelle est la représentation complexe de $u(t)$? Donner en fonction de $R, L, C, \omega, \underline{u}$: les expressions des grandeurs instantanées complexes $\underline{i}_C$, $\underline{i}_L$. En déduire les amplitudes I_{Cmax}, I_{Lmax} ainsi que les déphasages respectifs ψ_C, ψ_L de ces courants par rapport à u.
   Application numérique.
2) De même, donner l'expression littérale de $\underline{i}$; puis de l'amplitude I_{max} et du déphasage ψ de ce courant par rapport à u.

On donne: $U_{max} = 12$ V ; $C = 1$ µF ; $L = 100$ mH ; $R = 200$ Ω.

Exercice 10 : Résonance d'un circuit RLC parallèle

L'antenne d'un émetteur est modélisée par un circuit électrique composé de l'association en parallèle d'un résistor de résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C (Fig. 33). Le composant électronique qui alimente l'antenne se comporte comme une source de courant idéale, dont l'intensité caractéristique varie de manière sinusoïdale dans le temps :

$$i(t) = I\cos(\omega t),$$

dont la pulsation est réglable (on parle de pulsation ou fréquence porteuse).

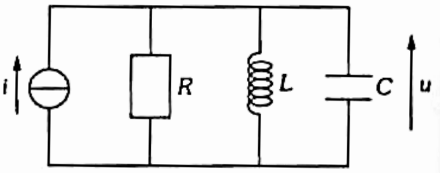


Figure 33

On s'intéresse à la manière dont l'amplitude de la tension u aux bornes de l'antenne dépend de ω.

a) Peut-on parler de circuit linéaire ?

b) Déterminer l'impédance complexe de l'association équivalente à l'antenne.

c) En déduire l'amplitude complexe de la tension u en fonction de ω, I et des valeurs des composants.

d) Pour quelle pulsation, l'amplitude V de la tension u prend-elle la valeur maximale notée V_{max} ? Commenter.

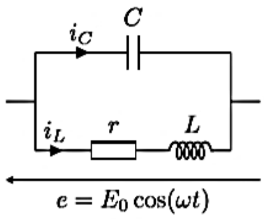
e) Représenter le graphe donnant $\frac{V}{V_{max}}$ en fonction d'une pulsation réduite u que l'on définira.

On se place dans le cas $R = 37\,\Omega$, $L = 1{,}2.10^{-8}$ H et $C = 2{,}3.10^{-10}$ F.

f) Caractériser quantitativement l'acuité de la résonance. Interpréter sa dépendance en R.

g) Quel est le déphasage entre la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$? Comment varie-t-il avec la pulsation réduite ?

Exercice 11 : Circuit bouchon



Considérons un dipôle constitué d'une bobine (inductance L et résistance interne r) montée en dérivation avec un condensateur (capacité C). Il est alimenté par la tension sinusoïdale $e(t)$ de pulsation ω variable.

1 - Question préliminaire : exprimer l'impédance complexe $\underline{Z_s}$ d'un dipôle où r, L et C seraient montés *en série*, d'abord en fonction des composants puis de la résistance r, de la pulsation propre $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et du facteur de qualité $Q = L\omega_0/r$.

2 - Exprimer l'impédance complexe $\underline{Z}$ du dipôle parallèle sous la forme

$$\underline{Z} = \frac{r}{jC\omega\,\underline{Z_s}}\left(1 + \frac{jQ\omega}{\omega_0}\right).$$

3 - Montrer que lorsque le facteur de qualité est très élevé ($Q \gg 1$) et la pulsation ω pas trop faible ($\omega \gg \omega_0/Q$) l'impédance $\underline{Z}$ peut se mettre sous forme approchée

$$\underline{Z} \simeq \frac{Q^2 r^2}{\underline{Z_s}}.$$

On se place dans ces hypothèses pour toute la suite de l'exercice.

4 - Montrer que $|\underline{Z}|$ est maximal lorsque $\omega = \omega_0$. Quel est alors le comportement du circuit ? Justifier sa dénomination de « circuit bouchon ».

5 - On se place à $\omega = \omega_0$. Déterminer en fonction de E_0, Q et r les intensités réelles $i_C(t)$ et $i_L(t)$ qui traversent respectivement le condensateur et la bobine. Commenter les résultats obtenus.