

Modélisation d'un hamiltonien

(48)

(1) 1.  $E_{p, \text{elas}}(z) = \frac{1}{2} k (z - l_0)^2$

(1) 2.  $E_{p, \text{pes}}(z) = mgz + cte$

3.  $E_p(z) = \frac{1}{2} k (z - l_0)^2 + mgz + cte$

CL:

$E_p(z = l_0) = \frac{1}{2} k (l_0 - l_0)^2 + mgl_0 + cte = 0$

$\Rightarrow cte = -mgl_0$

d'où:  $E_p(z) = \frac{1}{2} k (z - l_0)^2 + mgz - mgl_0$

$E_p(z) = \frac{1}{2} k (z - l_0)^2 + mg(z - l_0)$

4.  $\frac{dE_p}{dz} = k(z - l_0) + mg = 0$

$k(z - l_0) = -mg$

$z - l_0 = -\frac{mg}{k}$

(on) PFS.

$z = z_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}$

5. Homogénéité:  $[z] = [l_0] = m$

$\left[\frac{mg}{k}\right] = \frac{N}{N \cdot m^{-1}} = m$

Cohérence:  $l_0 - \frac{mg}{k} \leq l_0$  OK.

Si  $m \uparrow$  alors  $z_{eq} \downarrow$  OK

Si  $k \uparrow$  alors  $z_{eq} \uparrow$  OK.

6. le système est soumis à 2 forces:

$\vec{P}$ : force conservative.

$\vec{F}_{\text{elas}}$ : force conservative.

le système est donc conservatif.

7.  $E_m = E_c + E_p \rightarrow \triangle$   
 $= \frac{1}{2} m v^2 + E_p$   
 $= \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} k (z - l_0)^2 + mg(z - l_0).$

Système conservatif  $\Rightarrow$  Conservation de l'énergie mécanique.

$\frac{dE_m}{dt} = m \dot{z} \ddot{z} + k \dot{z} (z - l_0) + mg \dot{z} = 0$

$\dot{z} (m \ddot{z} + k z - k l_0 + mg) = 0$   
 $\dot{z} = 0$  non pertinent

(a)

$m \ddot{z} + k z - k l_0 + mg = 0$

Sous forme canonique

$\ddot{z} + \frac{k}{m} z = \frac{k l_0}{m} - g = \frac{k}{m} (l_0 - \frac{mg}{k})$   
 $= \frac{k}{m} z_{eq}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

(2) 8.  $z(t=0) = z_{eq} - h$   
 $\dot{z}(t=0) = 0$

9.  $z(t) = z_p + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

$z_p = z_{eq}$

$\dot{z}(t) = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B \omega_0 \cos(\omega_0 t)$

d'où:  $z(0) = z_{eq} + A = z_{eq} - h$   
 $\Rightarrow A = -h$

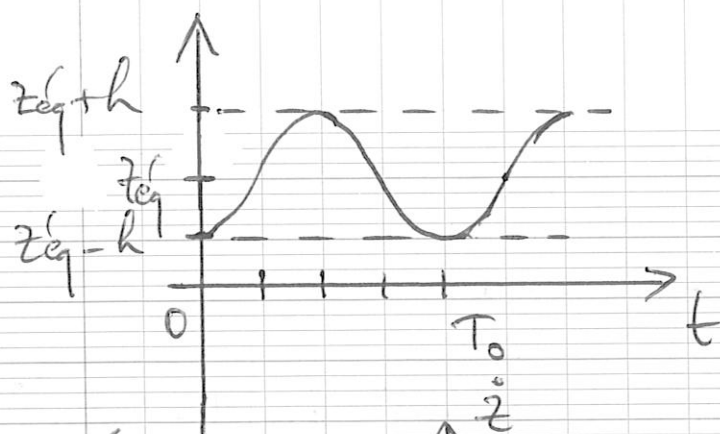
$\dot{z}(0) = B \omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0$

d'où:  $z(t) = z_{eq} - h \cos(\omega_0 t)$

(1) 10.  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

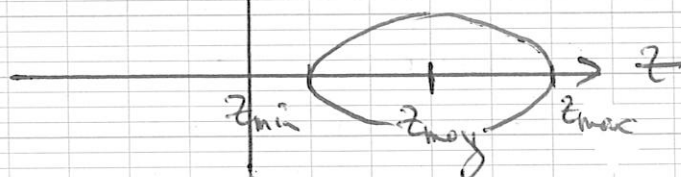
11.

(3)



12.

13.



ellipse

$$(1) 13. z(t_1) = l_0$$

$$\Leftrightarrow z_{eq} - h \cos(\omega_0 t_1) = l_0$$

$$\Leftrightarrow l_0 - \frac{mg}{k} - h \cos(\omega_0 t_1) = l_0$$

$$14. h \cos(\omega_0 t_1) = -\frac{mg}{k}$$

(1)

$$\cos(\omega_0 t_1) = -\frac{mg}{kh}$$

Il faut  $|\cos(\omega_0 t_1)| < 1$  donc  $\frac{mg}{kh} < 1$   
donc  $h$  suffisamment grand.

$$(1) 15. \dot{z}(t) = h\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$16. v_0 = \dot{z}(t_1) = h\omega_0 \sin(\omega_0 t_1)$$

donc :

$$v_0 = h\omega_0 \sin(\arccos(\cos \omega_0 t_1))$$

1

$$v_0 = h\omega_0 \sin(\arccos(\frac{mg}{kh}))$$

or

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

En élevant  $\theta = \arccos(x)$ .

(4)

(3)

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} \\ = \sqrt{1 - x^2}$$

1 On obtient :

$$v_0 = h\omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{mg}{kh}\right)^2} = h\omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{g}{h\omega_0^2}\right)^2}$$

⚠ ← 17. Référentiel : Terre (galiléen)  
Système : athlète.

1 Bilan des forces :  $\vec{P}' = m\vec{g}'$   
1 PFD :  $m\vec{g}' = m\vec{a}'$   
 $\vec{a}' = \vec{g}'$

1  $a \cdot \vec{u}_z = -g \cdot \vec{u}_z$   
 $\ddot{z} = a = -g$  Mouvement uniformément accéléré.

⚠ ← 18. En intégrant par rapport au temps :

1  $\dot{z} = -gt + c_1$   
1 C.I. :  $\dot{z}(0) = v_0 \Rightarrow c_1 = v_0$   
d'où :  $\dot{z} = -gt + v_0$

4 En intégrant de nouveau par rapport au temps :

1  $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + c_2$   
1 C.I. :  $z(0) = l_0 \Rightarrow c_2 = l_0$   
d'où :

1  $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + l_0$

1 19. Hauteur maximale :  $\dot{z} = 0$

20.  $\dot{z} = 0$   
 $-gt_{\text{MAX}} + v_0 = 0$

1  $t_{\text{MAX}} = \frac{v_0}{g}$



1

$$z_{\max} = -\frac{1}{2}gt_{\max}^2 + v_0 t_{\max} + l_0 -$$

(3)

$$z_{\max} = -\frac{1}{2}g \frac{v_0^2}{g^2} + v_0 \frac{v_0}{g} + l_0$$

1

$$z_{\max} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} + l_0 -$$

$$\text{21. } E_m(z_{\min}) = E_c(z_{\min}) + E_p(z_{\min})$$

$$= 0 + \frac{1}{2}k(z_{\min} - l_0)^2 + mg(z_{\min} - l_0)$$

(1)

$$\text{Avec: } z_{\min} = z_{\text{eq}} - h$$

$$= l_0 - \frac{mg}{k} - h$$

On obtient:

$$E_m(z_{\min}) = \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k} + h\right)^2 - mg\left(\frac{mg}{k} + h\right)$$

$$= \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k} + h\right)^2 - \frac{m^2g^2}{k} - mgh$$

$$\text{22. } E_m'(z_{\max}) = E_c(z_{\max}) + E_p(z_{\max})$$

$$= 0 + mg(z_{\max} - l_0)$$

(1)

$$E_m'(z_{\max}) = mg(z_{\max} - l_0) -$$

$$\text{23. } E_m = E_m'$$

d'où:

$$\frac{1}{2}k(z_{\min} - l_0)^2 + mg(z_{\min} - l_0) = mg(z_{\max} - l_0)$$

$$\frac{1}{2}k(z_{\min} - l_0)^2 + mgz_{\min} - mgl_0 = mgz_{\max} - mgl_0$$

(1)

$$\frac{1}{2}k(z_{\min} - l_0)^2 + mgz_{\min} = mgz_{\max} - (1)$$

1

$$\text{24. Il faut } z_{\min} > 0 -$$

$$\text{Cas limite: } z_{\min} = 0$$

1

$$\text{En repartant dans (1):}$$

(4)

$$\frac{1}{2} k l_0^2 = mg z_{\max}$$

$$k l_0^2 = 2 mg z_{\max}$$

$$k = \frac{2 mg z_{\max}}{l_0^2} = \frac{2 \times 80 \times 10 \times (6+1)}{1^2} = 10 \cdot 10^3 \text{ N.m}^{-1}$$

⚠ ← 25. Th. de l'Énergie Mécanique: (ou) PFD  
1 12  $\frac{dE_m}{dt} = P_{\text{non cons}}$

En reprenant l'expression de  $E_m$  du 7.:

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} k (z - l_0)^2 + mg(z - l_0)$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \dot{z} (m \ddot{z} + k z - k l_0 + mg) = -\alpha v^2 = -\alpha \dot{z}^2$$

En simplifiant par  $\dot{z}$ :

$$m \ddot{z} + k z - k l_0 + mg = -\alpha \dot{z}$$

$$\text{(ou)} \quad m \ddot{z} + \alpha \dot{z} + k z = 0 + k l_0 - mg = k \left( l_0 - \frac{mg}{k} \right) = k z_{\text{eq}}$$

$$\text{(ou)} \quad \ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = \frac{k}{m} z_{\text{eq}} \quad \text{--- (II)}$$

On identifie:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$z = z' + z_{\text{eq}} \Rightarrow \dot{z} = \dot{z}' \quad \text{et} \quad \ddot{z} = \ddot{z}'$$

En remplaçant dans (II):

$$\ddot{z}' + \frac{\alpha}{m} \dot{z}' + \frac{k}{m} (z' + z_{\text{eq}}) = \frac{k}{m} z_{\text{eq}}$$

(6)

$$\textcircled{an} \quad \ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = 0$$

$$\textcircled{an} \quad \ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

1 ~~24~~ 14. Régime pseudo-périodique :  $\Delta < 0$  -  
Equation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_0^2}{Q^2} < 4\omega_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Q^2} < 4 \Rightarrow \frac{1}{Q} < 2 \Rightarrow Q > \frac{1}{2}$$

1 (Z en secondes)

15 ~~28~~ 16.  $z(0) = l_0$   
C'est à dire  $\dot{z}(0) + z(0) = l_0$  -  
ou  $z(0) + \cancel{l_0} - \frac{mg}{k} = \cancel{l_0}$

$$z(0) = \frac{mg}{k}$$

$$\dot{z}(0) = \dot{z}(0) = v_0$$

$$\textcircled{28} \textcircled{16} \quad z(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)$$

$$\dot{z}(t) = -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)$$

$$+ e^{-\frac{t}{\tau}} (-A \Omega \sin \Omega t + B \Omega \cos \Omega t)$$

d'où :

$$\textcircled{1} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} z(0) = A \\ \dot{z}(0) = -\frac{A}{\tau} + B\Omega \end{array}$$

On identifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} z(0) = z_0 = A \Rightarrow \underline{A = z_0} \\ \dot{z}(0) = v_0 = -\frac{A}{\tau} + B\Omega \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow B\Omega = v_0 + \frac{A}{\tau} = v_0 + \frac{z_0}{\tau}$$

$$\Rightarrow \underline{B = \frac{v_0}{\Omega} + \frac{z_0}{\Omega\tau}}$$

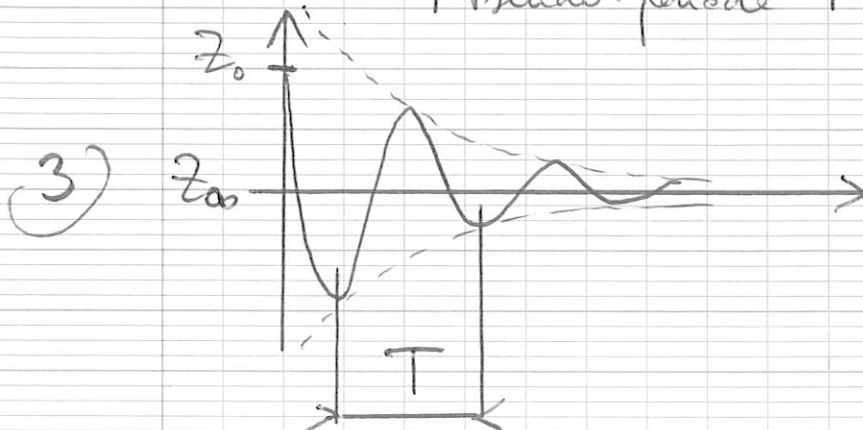
$$\textcircled{2} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{26.} \\ 17 \end{array} \quad \begin{array}{l} z_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)) = 0 \end{array}$$

$$z_\infty = 0 \Leftrightarrow z_\infty = z_\infty + z_{eq} = z_{eq}$$

$$\text{28.} \quad z(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \left( z_0 \cos \Omega t + \left( \frac{v_0}{\Omega} + \frac{z_0}{\Omega\tau} \right) \sin \Omega t \right)$$

Régime pseudo-périodique, avec

$$\left\{ \begin{array}{l} z(0) = z_0 \\ z(\infty) = 0 \\ \text{pseudo-période } T \end{array} \right.$$







③

$$E_{pe} = 2 \times \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 = k (l - l_0)^2$$

d'où :

$$E_{pe} = k \left( \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2} - l_0 \right)^2$$

① 33.  $E_{rpes} = -mgx + \text{cte}$   
(axe x orienté vers le bas).

34. D'où :

$$E_p = k \left( \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2} - l_0 \right)^2 - mgx + \text{cte}$$

Avec

③

$$E_p(0) = 0$$

$$E_p(0) = k \left( \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2} - l_0 \right)^2 + \text{cte}$$

$$= k \left( \frac{d}{2} - l_0 \right)^2 + \text{cte} = 0$$

On obtient :

$$\text{cte} = -k \left( \frac{d}{2} - l_0 \right)^2$$

C'est à dire :

$$E_p(x) = k \left( \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2} - l_0 \right)^2 - mgx - k \left( \frac{d}{2} - l_0 \right)^2$$

⚠ 35.  $\frac{dE_p}{dx} = 0$  pour  $x = 0,27 \text{ m}$  -  
(graphiquement)  
Position stable car il s'agit d'un minimum d'énergie potentielle.

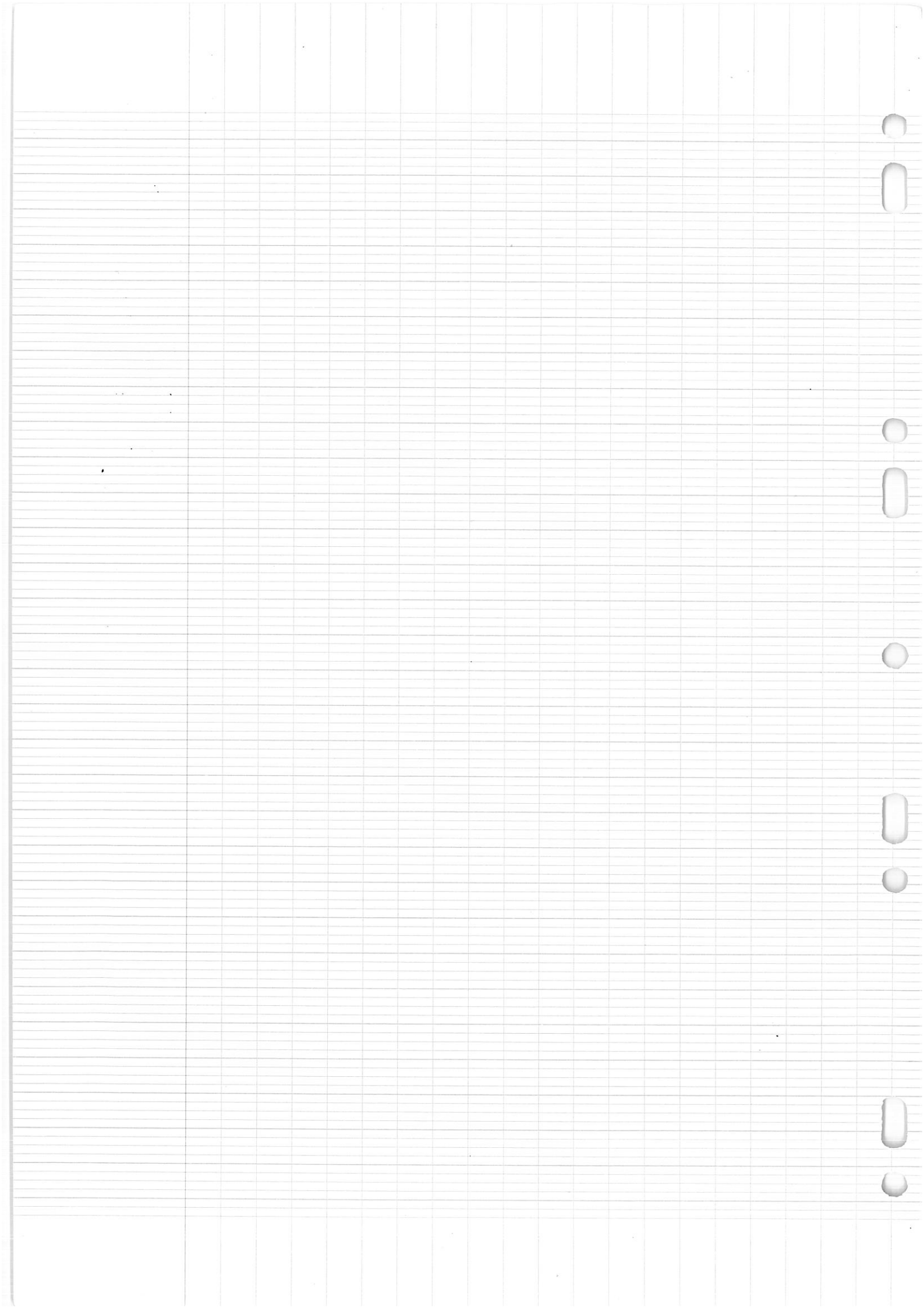
36.  $x_{eq1} = \frac{mg}{R}$

A.N.  $x_{eq1} = \frac{80 \times 10}{4 \cdot 10^3} = 0,20 \text{ m} = 20 \text{ cm}$

On a donc :

$$x_{eq2} = 0,27 \text{ m} > x_{eq1} = 0,20 \text{ m}$$

③



## Moteur de Stirling

(53) + (3) Bonus

III.1.  $PV = nRT$        $n = 40 \text{ mmol}$        $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

En A :  $T_A = T_f = 330 \text{ K}$   
 $V_A = 1 \text{ L}$

Donc :

$$P_A = \frac{nRT_A}{V_A} = \frac{40 \cdot 10^{-3} \times 8,31 \times 330}{1 \cdot 10^{-3}}$$

$$= \frac{4 \times 8,31 \times 33}{10^{-3}} = 110 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$
$$= 1,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$
$$= 1,1 \text{ bar}$$

En B :  $T_B = T_f = 330 \text{ K}$   
 $V_B = \frac{V_A}{4} = 0,25 \text{ L}$

$$P_B = 4P_A = 4,4 \text{ bar}$$

En C :  $T_C = T_c = 930 \text{ K}$   
 $V_C = V_B = 0,25 \text{ L}$

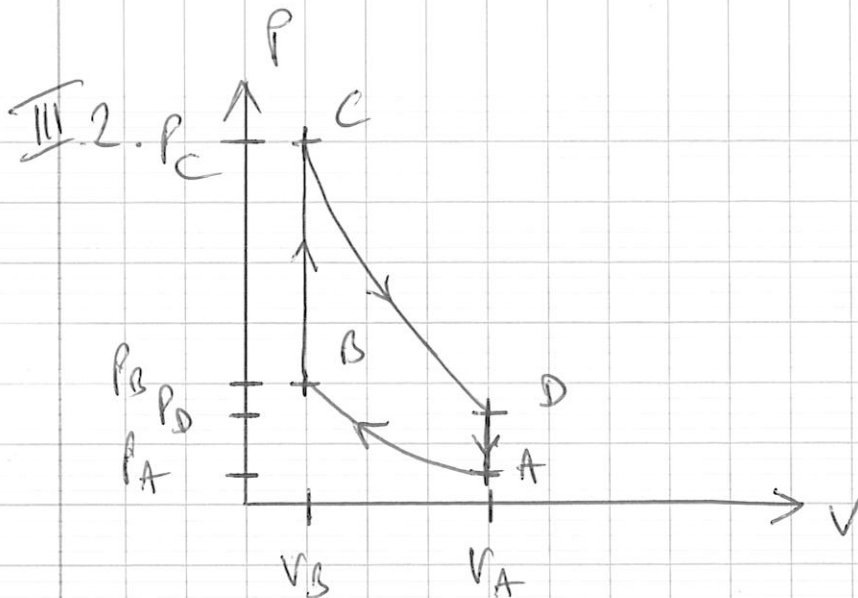
En D :  $T_D = T_c = 930 \text{ K}$   
 $V_D = V_A = 1 \text{ L}$

|                 | A     | B     | C     | D     |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|
| $T(\text{K})$   | (330) | (330) | (930) | (930) |
| $V(\text{L})$   | 1     | 0,25  | 0,25  | 1     |
| $P(\text{bar})$ | 1,1   | 4,4   | 12,4  | 3,1   |

(6)

(1)

(4)



② 1 III.3 Cycle moteur car sens de rotation horaire -  
1

III.4.  $C_p - C_v = nR$  et  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,66$ .

② 1  $\gamma C_v - C_v = nR \Rightarrow C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}$  -  
1  $C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$  -

III.5. A  $\rightarrow$  B isotherme

1  $\Rightarrow \Delta U_{AB} = C_v (T_B - T_A) = 0$  -

1  $W_{AB} = - \int_{V_A}^{V_B} P_{ext} dV = - \int_{V_A}^{V_B} P \cdot dV$  - avec  $P = \frac{nRT_f}{V}$

⑥  $= -nRT_f \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = -nRT_f \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$   
 $= -nRT_f \ln\left(\frac{1}{4}\right)$

1  $= \underline{nRT_f \ln 4} > 0$

Premier Principe :

1  $\Delta U_{AB} = W_{AB} + Q_{AB}$  -

1  $\Rightarrow Q_{AB} = -W_{AB} = \underline{-nRT_f \ln 4}$



Isotherme  $\neq$  Adiabatique.

②



1  $W_{AB} > 0$  : le Travail est reçu par le fluide  
lors de cette phase de compression.

1 III-6.  $B \rightarrow C$  isochore  
 $\Rightarrow W_{BC} = 0$

Premier Principe :

⑤ 1  $\Delta U_{BC} = W_{BC} + Q_{BC} = Q_{BC}$

1  $Q_{BC} = \Delta U_{BC} = C_V(T_C - T_B)$

1  $Q_{BC} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_C - T_B)$

$Q_{BC} > 0$  : le Transfert thermique (ou Chaleur)  
est reçu par le fluide lors de  
cet échauffement.

② 1 ~~III-7.~~  $S_{eBC} = \frac{Q_{BC}}{T_{source}} = \frac{Q_{BC}}{T_C} = \frac{nR}{T_C(\gamma - 1)}(T_C - T_B)$   
 $= \frac{nR}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_B}{T_C}\right)$

① 1 ~~III-8.~~  $\Delta S_{BC} = n \frac{R}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_C}{T_B}\right)$  car  $B \rightarrow C$   
isochore.

~~III-9.~~ Deuxième Principe :

② 1  $\Delta S_{BC} = S_{eBC} + S_{creiBC}$

1  $S_{creiBC} \neq 0$  - la transformation est  
irréversible.

III.10.  $C \rightarrow D$  isotherme

$\Rightarrow$  voir III.5.

$$W_{CD} = -nRT_C \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$$

$$W_{CD} = -nRT_C \ln 4$$

$$Q_{CD} = -W_{CD} = nRT_C \ln 4$$

III.11.  $D \rightarrow A$  isochore

$\Rightarrow$  voir III.6.

$$W_{DA} = 0$$

$$Q_{DA} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_A - T_D) = \frac{nR}{\gamma-1} (T_F - T_C)$$

III.12. Premier principe sur le cycle :

$$\Delta U_{\text{cycle}} = 0$$

$$= W_{AB} + Q_{AB} + W_{BC} + Q_{BC} + W_{CD} + Q_{CD} + W_{DA} + Q_{DA}$$

$$= W_{\text{Tot}} + \Sigma Q$$

(Non utile)

1

$$W_{\text{Tot}} = - (W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}) -$$

(2)

$$= -W_{AB} - W_{CD} \quad (\text{On parle de travail "fourni"})$$

1

$$W_{\text{Tot}} = nR \ln 4 (T_C - T_F)$$

1

$$\text{III.13. } \eta_{\text{mt}} = \frac{W_{\text{Tot}}}{Q_C} = \frac{nR \ln 4 (T_C - T_F)}{nR T_C \ln 4}$$

(3)

Valeur approchée

$$\eta = 1 - \frac{330}{930}$$

(Bonnes) 1

1

$$\eta \approx 0,67$$

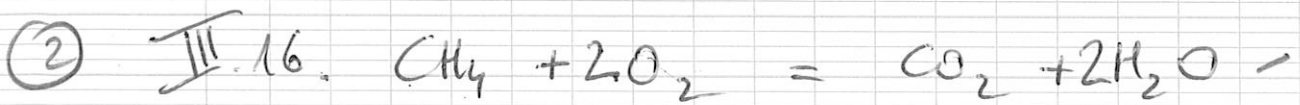
$$= \frac{T_C - T_F}{T_C}$$

$$= 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

(4)

④ III. 14.  $W \leftrightarrow$  Aire du cycle -  
 Aire estimée à 10 carreaux -  
 $W \approx 10 \text{ carreaux} \times 1 \text{ bar/div} \times 100 \text{ cm}^3/\text{div}$   
 $W \approx 10 \times 10^5 \times 100 \cdot 10^{-6}$   
 $\approx 10 \times 100 \times 10^{-1} \approx \underline{100 \text{ J}}$

② III. 15.  $P_{\text{méc}} \approx \frac{W}{T} = W \cdot f = 100 \times 20$   
 $= \underline{2,0 \text{ kW}}$



III. 17. Masse Molaire du méthane:

$$M(\text{CH}_4) = 1 \times M(\text{C}) + 4 \times M(\text{H})$$

$$= 12 + 4 = \underline{16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}}$$

Quantité de méthane utilisée en 1 mn:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{100}{16} \approx \underline{6 \text{ mol.}}$$

⑥ Énergie thermique libérée en 10 s:

$$E_{\text{therm}} = n \times PCS$$

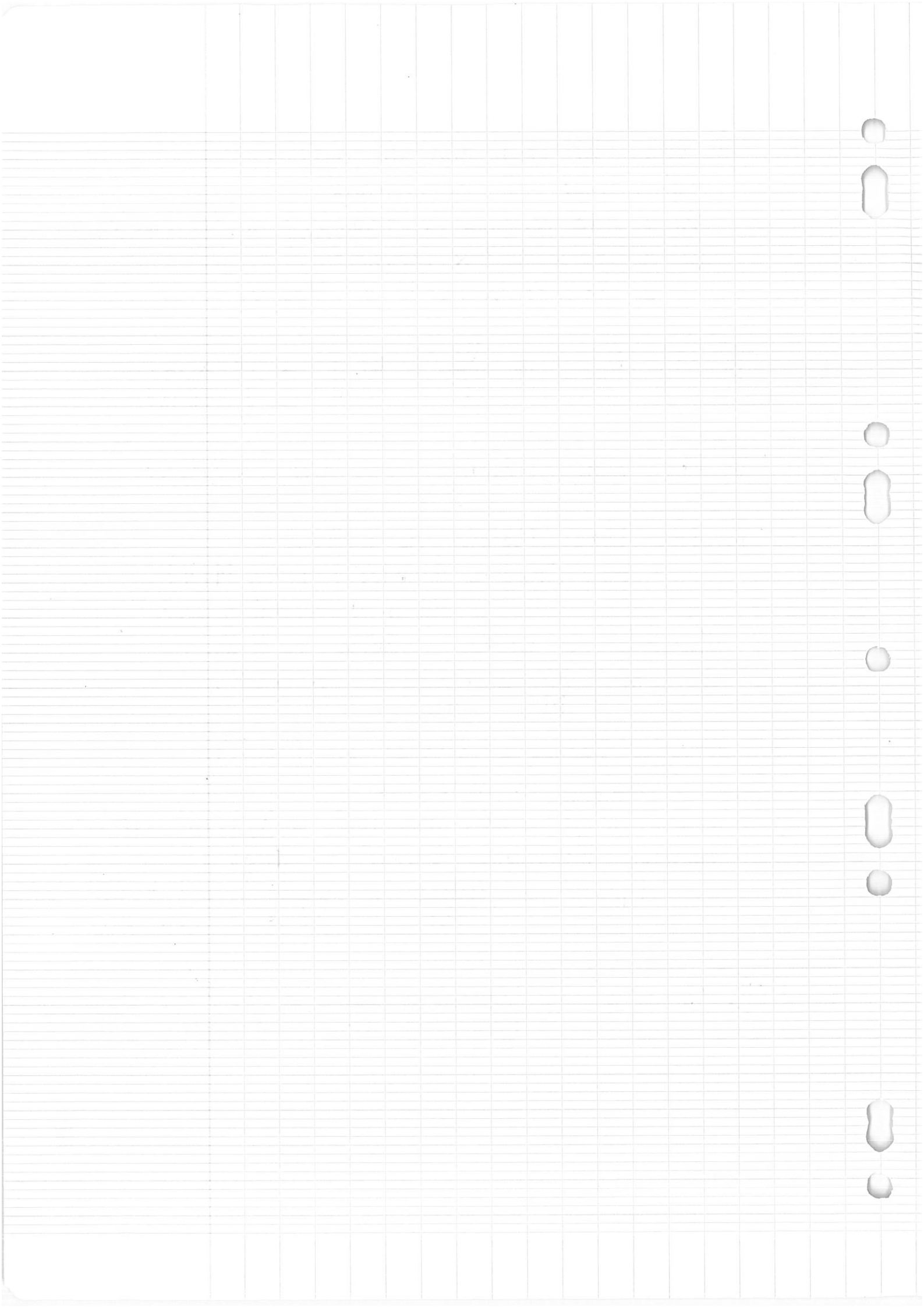
$$= 6 \cdot 900 \cdot 10^3 = \underline{5,4 \cdot 10^6 \text{ J}}$$

Puissance thermique libérée en 540 s:

$$P_{\text{therm}} = \frac{E_{\text{therm}}}{\Delta t} = \frac{5,4 \cdot 10^6}{540} = \underline{10 \cdot 10^4 \text{ W}}$$

$$= \underline{10 \text{ kW}}$$

③ III. 18.  $\eta \approx \frac{P_{\text{méc}}}{P_{\text{therm}}} = \frac{2}{10} = \underline{20\%}$  - Faible -



# Problème 1 : Circuit du second ordre

60

- 1) Interrupteur ouvert depuis longtemps  
 $\Rightarrow$  la bobine s'est démagnétisée dans la résistance

$$\Rightarrow i_2(0^-) = 0$$

Non-discontinuité du courant dans la bobine

$$\Rightarrow \underline{i_2(0^+) = 0}$$

Condensateur déchargé (+) non discontinuité de la tension aux bornes du condensateur

$$\Rightarrow \underline{u(0^+) = 0}$$

Donc : A  $t = 0^+$ ,  
 les mailles :

$$E - u - u' = 0$$

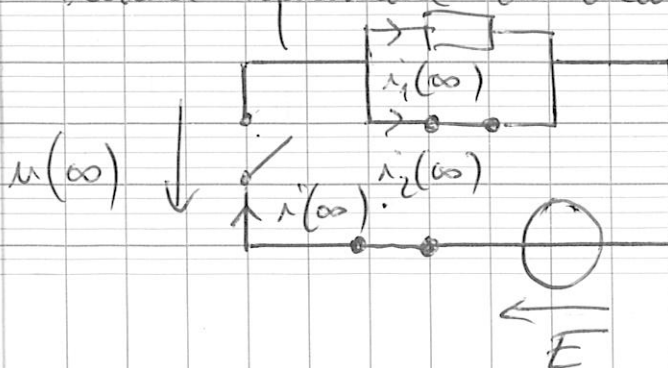
$$\underline{u'(0^+) = E}$$

$$\Rightarrow \underline{i_1(0^+) = \frac{E}{R} = i(0^+)}$$

- 2) Régime permanent atteint :

—  $\infty$  —  $\Rightarrow$  —

Modèle équivalent du circuit :



$$\underline{i(\infty) = 0}$$

$$\underline{i_2(\infty) = 0}$$

$$\underline{i_1(\infty) = 0}$$

$$\underline{u'(\infty) = 0}$$

$$\underline{u(\infty) = E}$$



1

1

3) loi des mailles :

$$E - u - u' = 0$$

loi des nœuds :

$$i = i_1 + i_2$$

loi pour les dipôles :

$$i = C \frac{du}{dt} \quad u' = L \frac{di_2}{dt} \quad u' = Ri_1$$

3

$$u' = L \frac{di_2}{dt} = L \frac{d}{dt} (i - i_1)$$

$$= L \frac{d}{dt} \left( C \frac{du}{dt} - \frac{u'}{R} \right)$$

$$= L \frac{d}{dt} \left( C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} - \frac{E}{R} \right)$$

$$E - u = LC \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{du}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = \frac{E}{LC}}$$

1

Par identification à :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E$$

$$\textcircled{5} \begin{matrix} 1 (\omega_0) \\ 1 (\text{norm}) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ - pulsation propre} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 1(Q) & 1(\text{norm}) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \omega_0 RC \end{cases}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{LC}} RC = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

si  $R \uparrow$ ,  $Q \uparrow$  - Facteur de qualité  
 si  $R \rightarrow \infty$ , le circuit tend vers un oscillateur LC

$$\textcircled{2}$$

1

4) régime critique :  $Q = \frac{1}{2}$ 

$$\frac{1}{2} = R \sqrt{\frac{C}{L}} \Rightarrow \underline{R_c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

(1) 5) Evolution <sup>stable et</sup> rapide du système.

1 6)  $u(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t} + \frac{SP}{1(SP)}$

$u(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t} + E$   
Conditions initiales:

1 (CI)  $u(0^+) = 0$   
 $i(0^+) = \frac{E}{R} = C \frac{du}{dt}(0^+)$   
 $\frac{du}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC}$

1 (B)  $u(0) = B + E = 0 \Rightarrow \underline{B = -E}$

1  $\frac{du}{dt}(t) = Ae^{-\omega_0 t} - \omega_0 (At + B)e^{-\omega_0 t}$

(8) 1  $\frac{du}{dt}(0) = A - \omega_0 B = \frac{E}{RC}$

1 (A)  $A + \omega_0 B = \frac{E}{RC} \quad A = \frac{E}{RC} - \omega_0 E$

$A = E \left( \frac{1}{RC} - \frac{1}{\sqrt{LC}} \right) = E \left( 2\sqrt{\frac{C}{L}} - \frac{1}{\sqrt{LC}} \right)$  (avec  $R = R_c$ )  
 $= E \left( 2\frac{1}{\sqrt{LC}} - \frac{1}{\sqrt{LC}} \right) = \frac{E}{\sqrt{LC}}$

$A = E\omega_0$

d'où:

1 (sol)  $u(t) = E(\omega_0 t - 1)e^{-\omega_0 t} + E$

Page 5

← 7)\*  
8) a) Courbe 1:

1  $u(0^+) = 0$  - OK

1  $u(\infty) = E \neq 0$  - OK

1 Faible dépassement et régime critique.

⑥

1

Courbe 2 :

$$i(0^+) = \frac{E}{R} \neq 0$$

1

1

$$i(\infty) = 0$$

④

$$i' = C \frac{di}{dt}$$

semble simple :

$$\begin{cases} t=0, i>0, \frac{di}{dt} > 0 \\ t=t_0, i=0, \frac{di}{dt} = 0 \end{cases}$$

b) Courbe 1 :

1(E)

$$u(\infty) = E = 5V$$

Courbe 2 :

1(i)

$$i(0^+) = \frac{E}{R} = 10^{-2} A$$

⑤

1(R)

$$\text{d'où : } R = \frac{5}{10^{-2}} = 500 \Omega = R_c$$

{ Courbe 1 :

$$\begin{cases} t_0 = 20 \mu s & \text{or } t_0 = \frac{2}{\omega_0} \end{cases}$$

(ou)

$$R_c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Méthode 1

1(L)

$$\Rightarrow R_c^2 = \frac{1}{4} \times \frac{L}{C}$$

1(H)

$$\begin{aligned} \Rightarrow L &= 4 R_c^2 C = 4 \times 500^2 \times 10 \cdot 10^{-9} \\ &= 4 \times 25 \times 10^4 \times 10 \cdot 10^{-9} \\ &= 100 \times 10 \times 10^{-5} \\ &= 10^3 \times 10^{-5} = 10^{-2} H \end{aligned}$$

3/a) En régime permanent : tous les courants sont nuls, seule la tension  $u$  est non nulle et égale à  $E$  d'où :

1

②

1

$$E_{mag} = \frac{1}{2} C E^2 = \frac{C E^2}{2}$$

1 \* 7)  $i(t) = C \frac{dv}{dt}(t)$

2)  $i(t) = EC(\omega_0)e^{-\omega_0 t} + EC(\omega_0 t - 1)(-\omega_0)e^{-\omega_0 t}$

$i(t) = ECe^{-\omega_0 t}(2\omega_0 - \omega_0^2 t)$

$i(t) = EC\omega_0(2 - \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$

9/b) lorsque  $u \uparrow$ ,  $E_C = \frac{1}{2}Cu^2 \uparrow$   
 $\Rightarrow$  le condensateur reçoit de l'énergie -  
 $t \in [0, t_0]$

lorsque  $u \downarrow$ ,  $E_C \downarrow$   
 $\Rightarrow$  le condensateur fournit de l'énergie -  
 $t \in [t_0, \infty]$

1 9/c)  $i_2(0^+) = 0 \Rightarrow E_L = \frac{1}{2}Li_2 = 0$

2) 1  $i_2(\infty) = 0 \Rightarrow E_L = 0$   
 la bobine ne stocke globalement aucune énergie.

1 9/d)  $E_G = \int_0^\infty E i(t) dt$  - NE PAS CALCULER!  
 $=$

2)  $E_G = E \int_0^\infty i(t) dt$   
 $= EC \int_0^\infty \frac{dv}{dt} dt$   
 $= EC [u]_0^\infty = \underline{CE^2}$

2) 1 9/e)  $E_R = E_G - E_C = CE^2 - \frac{CE^2}{2} = \underline{\frac{CE^2}{2}}$

10/a) On passe en régime pseudo-périodique

①

$$\Rightarrow Q \nearrow$$

$$\Rightarrow R \nearrow$$

1 (8) b)  $\delta = \ln \left( \frac{u(0) - u(\infty)}{u(1) - u(\infty)} \right) = \ln \left( \frac{8,1 - 5}{7 - 5} \right) = 0,61$

④

2  $\left( \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} (T) \right)$

$$T = (0,9 - 0,3) \cdot 10^{-4} = 0,6 \cdot 10^{-4} = 60 \mu s$$

↙  
Entre 2 "maxis"

1 c)  $\delta = \frac{\omega_0}{2Q} T$

$$\Rightarrow Q = \frac{\omega_0 T}{2\delta}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{LC}} \times \frac{1}{2\delta} \times T$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10^{-2} \times 10^{-8}}} \times \frac{T}{2\delta}$$

④

$$= 10^5 \times \frac{60 \cdot 10^{-6}}{2 \times 0,1} = 10^5 \times \frac{6 \cdot 10^{-5}}{2 \times 0,1}$$

$$= \frac{6}{2 \times 0,61} \approx 5$$

1

le coefficient  $Q$  pourrait être estimé avec le nombre de pseudo-périodes visibles

1

$$Q = R \sqrt{\frac{C}{L}} \Rightarrow R = Q \sqrt{\frac{L}{C}}$$

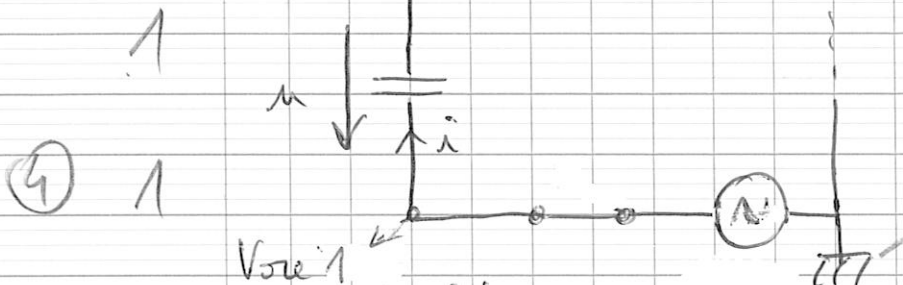
$$R = 5 \sqrt{\frac{10^{-2}}{10^{-8}}} = 5 \sqrt{10^6} = 5 \cdot 10^3 \Omega = 5 k\Omega$$

1



- 1 ~~11/a)~~ On fait varier la fréquence afin d'ajuster la période  $T_g$  -  
 On introduit une valeur moyenne ( $\frac{E}{2}$ ) en ajoutant un "DC offset" -  
 ③ 1 On fait varier l'amplitude C-C O-E  
 1 en jouant sur le niveau d'amplitude -

~~11/b)~~ Voie 2



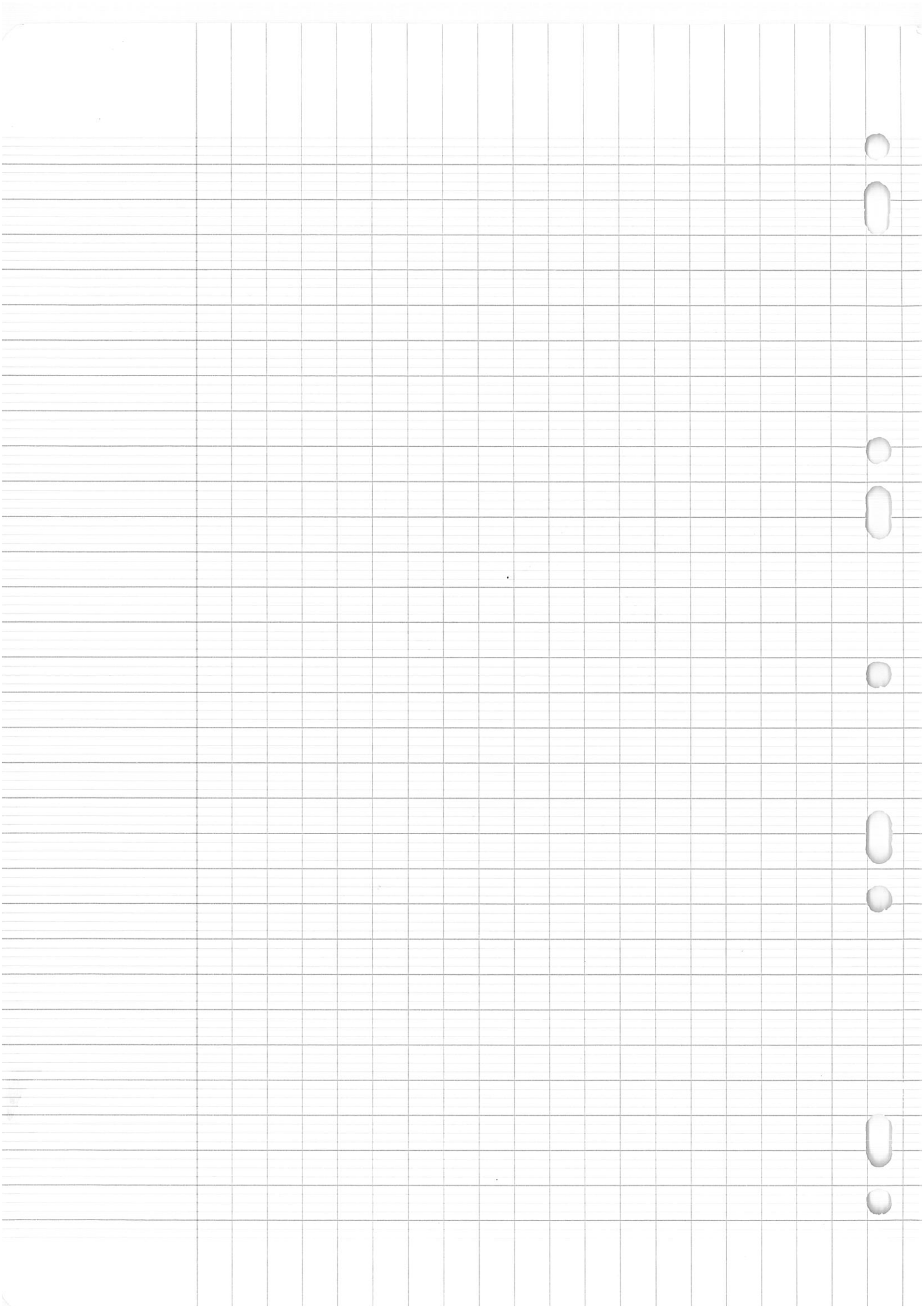
1 On relève  $e(t)$  en voie 1 -

1 On relève  $u(t)$  en réalisant l'opération MATH  
 / Voie 1  $\ominus$  Voie 2 -

1 ~~11/c)~~ Il faut  $T_g > 6T$  -

$$T_g > 12T$$

$$f_g < \frac{1}{12T} \quad 1300 \text{ Hz}$$



## Air dans un ballon de football

(20)

\* Volume Ballon

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times (10 \cdot 10^{-2})^3 \\ &= \frac{4}{3} \times \pi \times (10^{-1})^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 10^{-3} \\ &\approx \frac{4}{3} \times 3 \times 10^{-3} \approx \underline{4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3} \end{aligned}$$

\* Volume pompe

$$\begin{aligned} V &= L \times \pi r^2 = 200 \cdot 10^{-3} \times \pi \times (25 \cdot 10^{-3})^2 \\ &= 200 \times \pi \times 25 \times 25 \cdot 10^{-9} \\ &\approx 200 \times 3 \times 600 \cdot 10^{-9} \\ &\approx 36 \cdot 10^4 \cdot 10^{-9} \\ &\approx \underline{36 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3} \end{aligned}$$

\* Prendre en compte des pressions : la pompe aspire à  $p = 1 \text{ bar}$ , il faut gonfler le ballon  $P = 2 \text{ bars}$ .  
Ballon :

$$\begin{aligned} \text{Ballon : } PV &= NRT & N \text{ quantité de matière} \\ \text{Pompe : } pV &= nRT & n \text{ quantité de matière} \end{aligned}$$

\* Nombre de coups de pompe nécessaires :

$$\text{Nombre} = \frac{N}{n} = \frac{PV}{pV} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 36 \cdot 10^{-5}}$$

$$\approx 2 \times \frac{4}{36} \cdot 10^2$$

$$\approx \frac{1}{9} \cdot 10^2 \approx \underline{20} \text{ coups de pompe}$$

