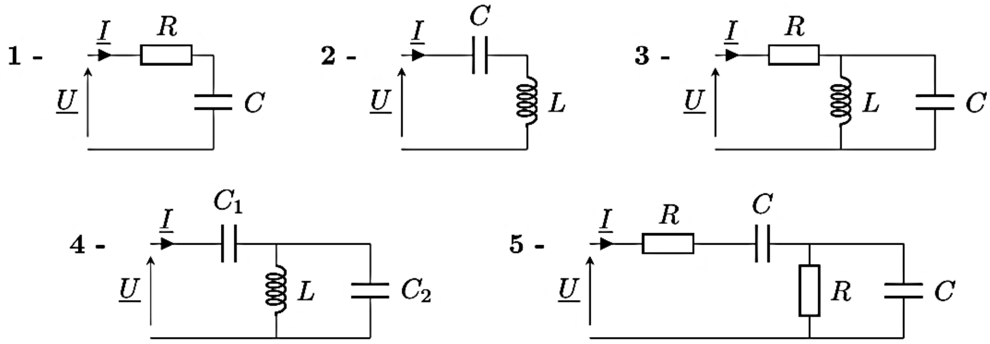
ELECTRICITE EN REGIME SINUSOÏDAL FORCE / RESONANCE

Travaux dirigés

<u>Exercice 1 : Détermination d'impédances</u>

Pour chaque dipôle ci-dessous, déterminer son impédance complexe équivalente. Ecrire le résultat sous forme d'une fraction unique, faisant apparaître des grandeurs sans dimension du type $RC\omega$, $L\omega/R$ ou $LC\omega^2$.



1. $\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_C = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1+jRC\omega}{jC\omega}$

$$= \frac{1+jRC\omega}{jRC\omega} R$$

2. $\underline{Z} = \underline{Z}_C + \underline{Z}_L = \frac{1}{jC\omega} + jL\omega = \frac{1-LC\omega^2}{jC\omega}$

$$= \frac{1-LC\omega^2}{jRC\omega} R$$

3. $\underline{Z} = R + \frac{\underline{Z}_L \underline{Z}_C}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = R + \frac{jL\omega \times \frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$

$$\underline{Z} = R + \frac{jL\omega}{1-LC\omega^2}$$

4. $\underline{Z} = \frac{1}{jC_1\omega} + \frac{jL\omega}{1-LC_2\omega^2}$

$$\underline{Z} = \frac{1-LC_2\omega^2 - LC_1\omega^2}{jC_1\omega(1-LC_2\omega^2)} = \frac{1-L(C_1+C_2)\omega^2}{jC_1\omega(1-LC_2\omega^2)}$$

5. $\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{R \times \frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}}$

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{R}{1+jRC\omega}$$

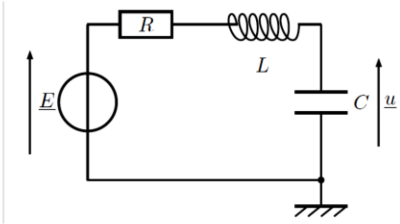
$$\underline{Z} = \frac{jRC\omega(1+jRC\omega) + 1 + jRC\omega + jRC\omega}{jC\omega(1+jRC\omega)}$$

$$\underline{Z} = \frac{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2}{jC\omega(1+jRC\omega)}$$

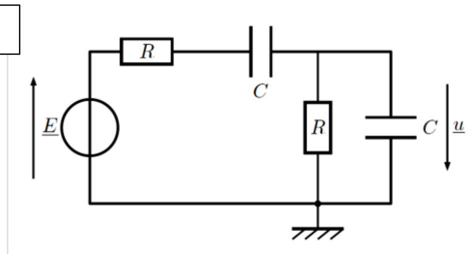
Exercice 2 : Détermination de tensions

Dans les circuits suivants, le générateur fournit une tension sinusoïdale e(t) = E.cos(ωt). Exprimer la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur.

1



2



$\boxed{1}$ $\underline{e} = E e^{j(\omega t)}$

Diviseur de tension :

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R + \underline{Z}_L}\,\underline{e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega}\,\underline{e}$$

$$\underline{u} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}\,\underline{e}$$

$$\underline{u} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}\,E e^{j\omega t}$$

D'où : Amplitude complexe de $\underline{u}$:

$$\underline{U} = \frac{E}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Module :

$$U = |\underline{U}| = \frac{E}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}$$

Argument :

$$\mathrm{Arg}(\underline{U}) = \underbrace{\mathrm{Arg}(\underline{E})}_{} - \arctan\left(\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}\right)$$

$$\varphi = \mathrm{Arg}(\underline{U}) = -\arctan\left(\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}\right)$$

On en déduit $u(t)$:

$$u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$$

$\boxed{2}$ Diviseur de tension ⊕ Sens de $\underline{u}$:

$$\underline{u} = -\frac{\underline{Z}_{eq}}{R + \frac{1}{jC\omega} + \underline{Z}_{eq}}\,\underline{e}$$

Avec $\underline{Z}_{eq} = \dfrac{R \times \frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \dfrac{R}{1 + jRC\omega}$

$$\underline{u} = -\frac{\frac{R}{1+jRC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{R}{1+jRC\omega}}\,\underline{e}$$

$$\underline{u} = -\frac{R}{R + jR^2C\omega + \frac{1+jRC\omega}{jC\omega} + R}\,\underline{e}$$

$$\underline{u} = -\frac{jRC\omega}{jRC\omega - R^2C^2\omega^2 + 1 + jRC\omega + jRC\omega}\,\underline{e}$$

$$\underline{u} = -\frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2}\,\underline{e}$$

Amplitude complexe de $\underline{u}$:

$$\underline{U} = -\frac{jRC\omega E}{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2}$$

D'où : $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$, avec :

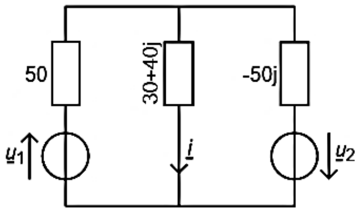
$$U = |\underline{U}| = \frac{RC\omega E}{\sqrt{(1-(RC\omega)^2)^2 + (3RC\omega)^2}}$$

$\varphi = \operatorname{Arg}(\underline{U})$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{3RC\omega}{1-(RC\omega)^2}\right)$$

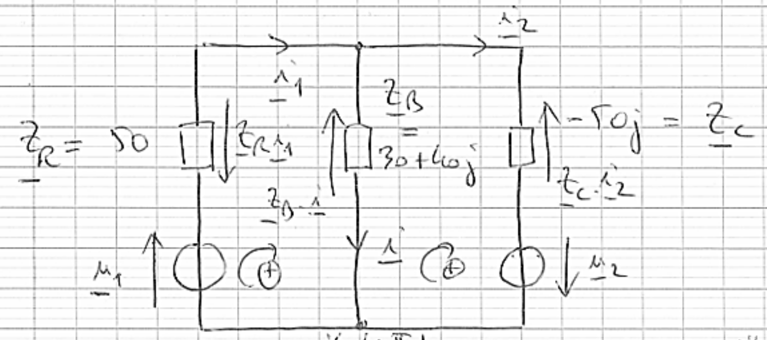
Exercice 3 : Réseau à deux mailles

Dans le circuit ci-contre, les deux sources délivrent des tensions sinusoïdales $u_1(t)$ et $u_2(t)$, de même fréquence. Les impédances complexes y sont indiquées en ohms.



$\underline{u}_1(j\omega t) = 50e^{j\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}$ et $\underline{u}_2(j\omega t) = 50e^{j\omega t}$

Calculer l'intensité complexe $\underline{i}$.



$\underline{u}_1(j\omega t) = 50\, e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}$ $\quad\quad$ $\underline{u}_2(j\omega t) = 50\, e^{j\omega t}$

Loi des noeuds :

$$\underline{i}_1 = \underline{i} + \underline{i}_2 \quad (1)$$

Loi des mailles :

Gauche : $\underline{u}_1 - \underline{Z}_R \underline{i}_1 - \underline{Z}_B \underline{i} = 0 \quad (2)$

Droite : $\underline{Z}_B \cdot \underline{i} - \underline{Z}_C \underline{i}_2 + \underline{u}_2 = 0 \quad (3)$

$$(2) \Rightarrow \underline{i}_1 = \frac{\underline{u}_1 - \underline{Z}_B \underline{i}}{\underline{Z}_R}$$

$$(3) \Rightarrow \underline{i}_2 = \frac{\underline{Z}_B \cdot \underline{i} + \underline{u}_2}{\underline{Z}_C}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\underline{u}_1}{\underline{Z}_R} - \frac{\underline{Z}_B}{\underline{Z}_R}\underline{i} = \underline{i} + \frac{\underline{Z}_B \underline{i}}{\underline{Z}_C} + \frac{\underline{u}_2}{\underline{Z}_C}$$

$$\underline{i}\left(1 + \frac{\underline{Z}_B}{\underline{Z}_C} + \frac{\underline{Z}_B}{\underline{Z}_R}\right) = \frac{\underline{u}_1}{\underline{Z}_R} - \frac{\underline{u}_2}{\underline{Z}_C}$$

On multiplie par $\underline{Z}_R \underline{Z}_C$ à gauche et à droite

$$\underline{i}\left(\underline{Z}_R \underline{Z}_C + \underline{Z}_B \underline{Z}_R + \underline{Z}_B \underline{Z}_C\right) = \underline{u}_1 \underline{Z}_C - \underline{u}_2 \underline{Z}_R$$

$$\underline{i} = \frac{\underline{u_1}\,\underline{Z_C} - \underline{u_2}\,\underline{Z_R}}{\underline{Z_R}\,\underline{Z_C} + \underline{Z_B}\,\underline{Z_R} + \underline{Z_B}\,\underline{Z_C}}$$

D'où :

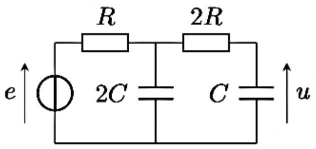
$$\underline{i} = \frac{50 e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} \times -50j - 50 e^{j\omega t} \times 50}{50 \times (-50j) + (30 + 40j) \times 50 + (30 + 40j) \times -50j}$$

$$\underline{i} = \frac{50 \times 50 \times e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} - 50 \times 50 e^{j\omega t}}{\underline{\text{Dénominateur}}}$$

$$\underline{i} = \frac{50 \times 50 \times \cancel{e^{-j\frac{\pi}{2}}} \times e^{j\omega t} \times \cancel{e^{j\frac{\pi}{2}}} - 50 \times 50 e^{j\omega t}}{\underline{\text{Dénominateur}}}$$

$\underline{i} = \underline{0}$ (Cas très particulier !)

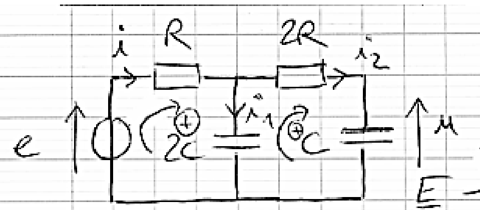
Exercice 4 : Obtention d'une équation différentielle



En utilisant les complexes, montrer que la tension u est solution de l'équation différentielle

$$4\tau^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 5\tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = e\,,$$

en posant $\tau = RC$.



$$i = i_1 + i_2$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \quad (1)$$

$$\underline{E} - R\underline{I} - \frac{1}{2jC\omega}\underline{I}_1 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2jC\omega}\underline{I}_1 - 2R\underline{I}_2 - \underline{U} = 0 \quad (3)$$

et enfin $\underline{U} = \frac{1}{jC\omega}\underline{I}_2 \quad (4)$

4 équations, 4 inconnues : $\underline{U}, \underline{I}, \underline{I}_1, \underline{I}_2$.

(4) $\underline{I}_2 = jC\omega\underline{U}$

(3) $\Rightarrow \frac{1}{2jC\omega}\underline{I}_1 - 2jRC\omega\underline{U} - \underline{U} = 0 \quad (5)$

(1) $\underline{I}_1 = \underline{I} - \underline{I}_2 = \underline{I} - jC\omega\underline{U}$

(5) $\Rightarrow \frac{1}{2jC\omega}\underline{I} - \frac{1}{2}\underline{U} - 2jRC\omega\underline{U} - \underline{U} = 0 \quad (6)$

(2) $\Rightarrow \underline{E} - R\underline{I} - \frac{1}{2jC\omega}\underline{I} + \frac{1}{2}\underline{U} = 0 \quad (7)$

(6) $\Rightarrow \underline{U}\left(\frac{3}{2} + 2jRC\omega\right) = \frac{1}{2jC\omega}\underline{I}$

$$\underline{U}(3 + 4jRC\omega) = \frac{1}{jC\omega}\underline{I}$$

$$\underline{U}(3jC\omega - 4RC^2\omega^2) = \underline{I}$$

$$(7) \Rightarrow \underline{E} - \left(R + \frac{1}{2jC\omega}\right)(3jC\omega - 4RC^2\omega^2)\underline{U} + \frac{1}{2}\underline{U} = 0$$

$$\underline{E} + \underline{U}\left(-3jRC\omega + 4R^2C^2\omega^2 - \frac{3}{2} - 2jRC\omega\right) + \frac{1}{2}\underline{U} = 0$$

$$\underline{E} + \underline{U}(-1 - 5jRC\omega + 4R^2C^2\omega^2) = 0$$

$$\underline{E} = \underline{U}(1 + 5jRC\omega + 4j^2R^2C^2\omega^2)$$

$$\underline{E} = \underline{U}(1 + 5j\tau\omega + 4j^2\tau^2\omega^2)$$

$j\omega \rightarrow$ dérivée

$(j^2\omega^2) \rightarrow$ dérivée seconde

En repassant en temporel :

$$e = u + 5\tau\frac{du}{dt} + 4\tau^2\frac{d^2u}{dt^2}$$

Exercice 5 : Etude fréquentielle de l'amplitude d'un oscillateur forcé

Considérons un système subissant des oscillations forcées vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \omega_0^2\,X_0\cos(\omega t)$$

1) En exploitant cette équation différentielle, établir l'expression de l'amplitude complexe $\underline{X}_M$ de l'élongation du ressort en fonction de la pulsation puis de la pulsation réduite $u = \frac{\omega}{\omega_0}$.
2) En déduire l'expression de l'amplitude réelle de l'élongation.
3) Effectuer l'étude asymptotique de cette amplitude à basse et haute fréquence.
4) Exprimer l'amplitude pour $\omega = \omega_0$
5) Etudier la résonance en élongation du système : condition d'existence et pulsation de résonance.

Exercice 6 : Résonance en vitesse

On considère la suite de l'étude de l'exercice 2, avec un système subissant des oscillations forcées vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \omega_0^2\,X_0\cos(\omega t)$$

Et une amplitude complexe telle que $\underline{X}_M = \frac{\omega_0^2 X_0}{\left(-u^2\omega_0^2 + i\omega_0^2\frac{u}{Q} + \omega_0^2\right)}$ ou $\underline{X}_M(u) = \frac{X_0}{1 - u^2 + i\frac{u}{Q}}$ avec $u = \frac{\omega}{\omega_0}$.

1) Etablir l'expression de l'amplitude complexe de la vitesse, puis de l'amplitude réelle de la vitesse.
2) Etudier la résonance en vitesse : condition, pulsation de résonance, amplitude à la résonance.

Exercice 8 : Etude d'un oscillogramme

On réalise le montage représenté sur la **figure 1,** qui comporte un résistor de résistance 10 Ω, une bobine d'inductance L et de résistance négligeable, et un condensateur de capacité C. L'ensemble est alimenté par un générateur fournissant une tension alternative sinusoïdale de fréquence f.

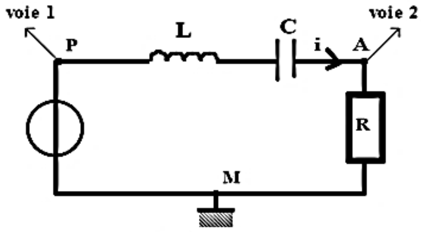


Figure 1

L'oscillogramme obtenu est reproduit figure 2.

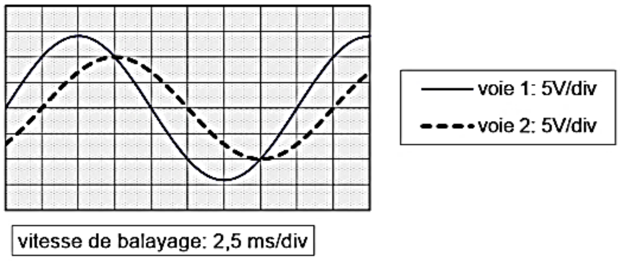


Figure 2

1) **Déduire de l'oscillogramme les valeurs de la fréquence f, de l'impédance Z du dipôle (P,M) et du déphasage ψ de l'intensité i par rapport à la tension appliquée aux bornes de tout le circuit.**
2) **Donner l'expression numérique de l'intensité instantanée $i(t)$ et de la tension instantanée $u_{PM}(t)$ en fonction du temps.**
3) **Déterminer en fonction de R,L,C,ω, les expressions littérales de l'impédance complexe $\underline{Z}$ et de ψ.**
   $C = 20$ µF. En déduire la valeur de L.
4) **Calculer les impédances de R, de L, de C. Comparer la somme de ces trois impédances à l'impédance Z calculée au 1).**

Exercice 7 : Oscillations forcées d'un système masse-ressort horizontal amorti

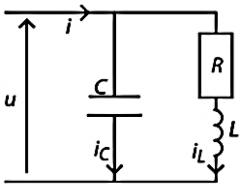
On considère une bille M, quasi ponctuelle, de masse m accrochée à un ressort horizontal de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k, se déplaçant sans frottements solides sur un axe horizontal (Ox). L'autre extrémité du ressort est fixe ; elle est accrochée en un point O constituant l'origine de l'axe horizontal (Ox).

Le point M est de plus soumis à une force excitatrice $\overrightarrow{F_e} = F_m \cos(\omega t)\, \overrightarrow{e_x}$ ainsi qu'à des frottements fluides $\vec{f} = -\mathbf{h}\vec{\mathbf{v}}$.

1) Établir l'équation différentielle vérifiée par la position x du point M.
2) Déterminer l'expression de l'amplitude complexe de l'élongation.
3) En déduire l'expression de l'amplitude réelle de l'élongation.

Exercice 9

Le circuit ci-contre est alimenté par une source de tension sinusoïdale $u(t) = U_{\max} \cos \omega t$ et de fréquence $f = 50$Hz.



1) Quelle est la représentation complexe de $u(t)$? Donner en fonction de $R, L, C, \omega, \underline{u}$: les expressions des grandeurs instantanées complexes $\underline{i}_C$, $\underline{i}_L$. En déduire les amplitudes I_{Cmax}, I_{Lmax} ainsi que les déphasages respectifs ψ_C, ψ_L de ces courants par rapport à u.
Application numérique.
2) De même, donner l'expression littérale de $\underline{i}$; puis de l'amplitude I_{max} et du déphasage ψ de ce courant par rapport à u.

On donne: $U_{max} = 12$ V ; $C = 1$ µF ; $L = 100$ mH ; $R = 200$ Ω.

Exercice 10 : Résonance d'un circuit RLC parallèle

L'antenne d'un émetteur est modélisée par un circuit électrique composé de l'association en parallèle d'un résistor de résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C (Fig. 33). Le composant électronique qui alimente l'antenne se comporte comme une source de courant idéale, dont l'intensité caractéristique varie de manière sinusoïdale dans le temps :

$$i(t) = I\cos(\omega t),$$

dont la pulsation est réglable (on parle de pulsation ou fréquence porteuse).

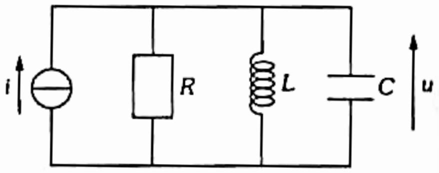


Figure 33

On s'intéresse à la manière dont l'amplitude de la tension u aux bornes de l'antenne dépend de ω.

a) Peut-on parler de circuit linéaire ?

b) Déterminer l'impédance complexe de l'association équivalente à l'antenne.

c) En déduire l'amplitude complexe de la tension u en fonction de ω, I et des valeurs des composants.

d) Pour quelle pulsation, l'amplitude V de la tension u prend-elle la valeur maximale notée V_{max} ? Commenter.

e) Représenter le graphe donnant $\dfrac{V}{V_{max}}$ en fonction d'une pulsation réduite u que l'on définira.

On se place dans le cas $R = 37\,\Omega$, $L = 1{,}2.10^{-8}$ H et $C = 2{,}3.10^{-10}$ F.

f) Caractériser quantitativement l'acuité de la résonance. Interpréter sa dépendance en R.

g) Quel est le déphasage entre la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$? Comment varie-t-il avec la pulsation réduite ?

a) Tous les composants linéaires
$\Rightarrow$ Circuit linéaire

b) Admittance complexe :

$$\underline{Y} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega} = \frac{R}{1 + \frac{R}{jL\omega} + jRC\omega}$$

c) $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} = \underline{Z}\,I$

$$\underline{U} = \frac{RI}{1 + \frac{R}{jL\omega} + jRC\omega}$$

d) U max si $\sqrt{1 + \left(-\frac{R}{L\omega} + RC\omega\right)^2}$ mini

$$-\frac{R}{L\omega} + RC\omega = 0$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{Pulsation de résonance}$$

Pour $\omega = \omega_0$ $\quad \underline{U} = R\underline{I}$

$$U_{max} = RI$$

e) $$\frac{U}{U_{max}} = \frac{|\underline{U}|}{|U_{max}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)^2}}$$

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} = \omega\sqrt{LC} \quad \text{Pulsation réduite}$$

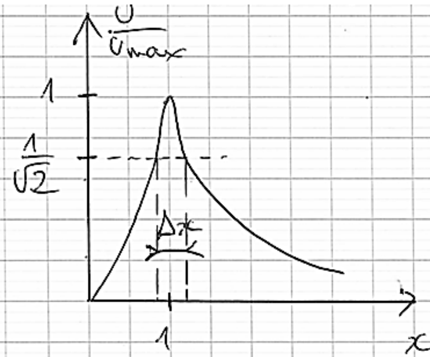
f) $$Q = \frac{R}{L\omega_0} = RC\omega_0 \quad \text{Facteur de qualité}$$

d'où :
$$\frac{U}{U_{max}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(Q\frac{\omega}{\omega_0}-Q\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$$

$$Q = \frac{R}{L\omega_0} = RC\omega_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$
$$Q = 37 \times \sqrt{\frac{2{,}3.10^{-10}}{1{,}2.10^{-8}}} \simeq 5$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2{,}3.10^{-10}\times 1{,}2.10^{-8}}} = \frac{1}{\sqrt{2{,}3\times 1{,}2\times 10^{-18}}}$$
$$= 0{,}60.10^{9}\ \text{rad.s}^{-1}$$
$$= 6{,}0.10^{8}\ \text{rad.s}^{-1}$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \qquad \Delta x = \frac{x_0}{Q} = \frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} x \to 0 \Rightarrow \dfrac{U}{U_{max}} \to 0 \\ x \to \infty \Rightarrow \dfrac{U}{U_{max}} \to 0 \\ x = 1 \Rightarrow \dfrac{U}{U_{max}} = 1 \end{cases}$$



f) Acuité à la résonance caractérisée par l'intervalle

$$\Delta x = \frac{1}{Q}$$ inversement proportionnel à R.

g) $\varphi = \arg(\underline{Z})$

$$= \arg\left(\frac{\underline{U}}{\underline{I}}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{R}{1 + \frac{R}{jL\omega} + jRC\omega}\right)$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{RC\omega - \frac{R}{L\omega}}{R}\right)$$

$$\varphi = -\arctan\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) = \arctan\left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)$$

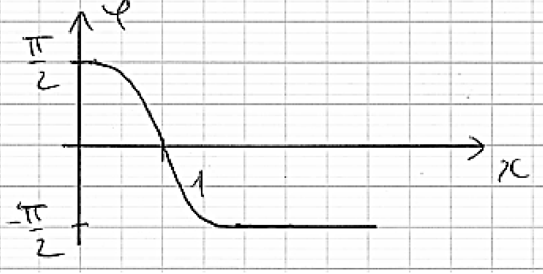
BF $\Rightarrow C\omega \ll \frac{1}{L\omega}$ et $\frac{1}{L\omega} \to +\infty$

$\Rightarrow \varphi \to \frac{\pi}{2}$

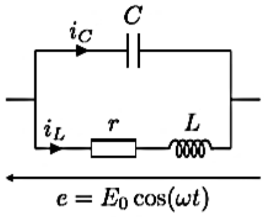
HF $\Rightarrow C\omega \gg \frac{1}{L\omega}$ et $C\omega \to +\infty$

$\Rightarrow \varphi \to -\frac{\pi}{2}$

$\omega = \omega_0$ $(x = 1) \Rightarrow \varphi = 0$



Exercice 11 : Circuit bouchon



Considérons un dipôle constitué d'une bobine (inductance L et résistance interne r) montée en dérivation avec un condensateur (capacité C). Il est alimenté par la tension sinusoïdale $e(t)$ de pulsation ω variable.

1 - Question préliminaire : exprimer l'impédance complexe $\underline{Z_s}$ d'un dipôle où r, L et C seraient montés *en série*, d'abord en fonction des composants puis de la résistance r, de la pulsation propre $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et du facteur de qualité $Q = L\omega_0/r$.

2 - Exprimer l'impédance complexe $\underline{Z}$ du dipôle parallèle sous la forme

$$\underline{Z} = \frac{r}{\mathrm{j}C\omega\,\underline{Z_s}}\left(1 + \frac{\mathrm{j}Q\omega}{\omega_0}\right).$$

3 - Montrer que lorsque le facteur de qualité est très élevé ($Q \gg 1$) et la pulsation ω pas trop faible ($\omega \gg \omega_0/Q$) l'impédance $\underline{Z}$ peut se mettre sous forme approchée

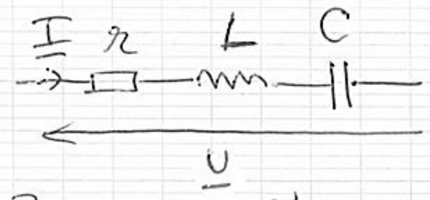
$$\underline{Z} \simeq \frac{Q^2 r^2}{\underline{Z_s}}.$$

On se place dans ces hypothèses pour toute la suite de l'exercice.

4 - Montrer que $|\underline{Z}|$ est maximal lorsque $\omega = \omega_0$. Quel est alors le comportement du circuit ? Justifier sa dénomination de « circuit bouchon ».

5 - On se place à $\omega = \omega_0$. Déterminer en fonction de E_0, Q et r les intensités réelles $i_C(t)$ et $i_L(t)$ qui traversent respectivement le condensateur et la bobine. Commenter les résultats obtenus.

1.



$$\underline{Z}_s = r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$$

$$= r + jL\omega - \frac{j}{C\omega}$$

$$= r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

avec $\begin{cases} \omega_0^2 = \dfrac{1}{LC} & (1) \\ Q = \dfrac{L\omega_0}{r} & (2) \end{cases}$

$(1)\times(2)$:

$$Q\omega_0^{\cancel{2}} = \frac{\cancel{\omega_0}}{rC} \Rightarrow C = \frac{1}{rQ\omega_0}$$

$\dfrac{(1)}{(2)}$: $$\frac{\omega_0^{\cancel{2}}}{Q} = \frac{r}{L^2C\omega_0} = \frac{rQr\cancel{\omega_0^2}}{L^2\times\cancel{\omega_0}}$$

$$\frac{\omega_0}{Q^2} = \frac{r^2}{L^2} \Rightarrow L^2 = \frac{r^2Q^2}{\omega_0}$$

(Il y a peut-être ⊕ simple ... !)

$$L = \frac{rQ}{\omega_0}$$

En remplaçant :

$$\underline{Z}_s = r + j\left(\frac{rQ}{\omega_0}\omega - \frac{rQ\omega_0}{C\omega}\right)$$

$$\underline{Z}_s = r + jrQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

$$\underline{Z}_s = r\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

2. $\underline{Z} = \dfrac{\dfrac{1}{jC\omega}\times(r+jL\omega)}{\underbrace{\dfrac{1}{jC\omega}+r+jL\omega}_{\underline{Z}_s}}$

d'où :

$$\underline{Z} = \frac{r+jL\omega}{jC\omega}\times\frac{1}{\underline{Z}_s}$$

$$= \frac{1}{jC\omega\underline{Z}_s}(r+jL\omega)$$

$$= \frac{r}{jC\omega\underline{Z}_s}\left(1+j\frac{L\omega}{r}\right)$$

$$= \frac{r}{jC\omega\underline{Z}_s}\left(1+j\underbrace{\frac{L\omega_0}{r}}_{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\underline{Z} = \frac{r}{jC\omega\underline{Z}_s}\left(1+jQ\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

3. $\omega \gg \dfrac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q\omega \gg \omega_0$

$\Rightarrow 1$ negligeable devant $jQ\dfrac{\omega}{\omega_0}$

d'où : $\underline{Z}_s \simeq \dfrac{r\cancel{j}Q\cancel{\omega}}{\cancel{j}C\cancel{\omega}\underline{Z}_s\omega_0}$

$$\simeq \frac{rQ}{C\underline{Z}_s\omega_0} = \frac{rQ\,rQ\cancel{\omega_0}}{\underline{Z}_s\cancel{\omega_0}} = \frac{r^2Q^2}{\underline{Z}_s}$$

4. $|\underline{Z}| = \dfrac{Q^2r^2}{|\underline{Z}_s|} = \dfrac{Q^2r^2}{\underline{Z}_s}$

$|\underline{Z}|$ inversement proportionnel à $|\underline{Z}_s|$

Or : $|\underline{Z}_s| = r^2\left(1+Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)$

est minimal pour $\dfrac{\omega}{\omega_0}$

4. $\underline{Z} = \dfrac{Q^2 r^2}{\underline{Z}_S} = \dfrac{Q^2 r}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

d'où :

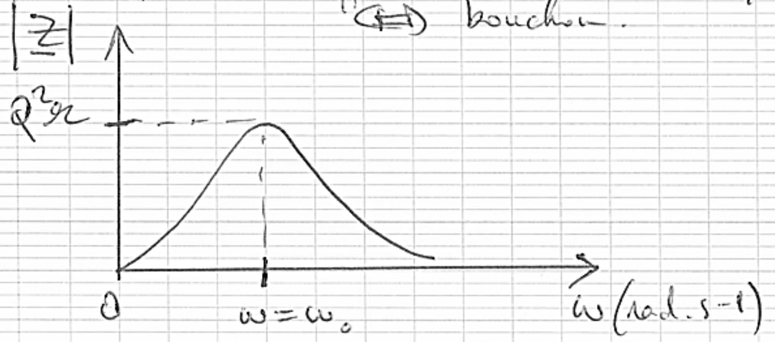
$$|\underline{Z}| = \frac{Q^2 r}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

d'où :

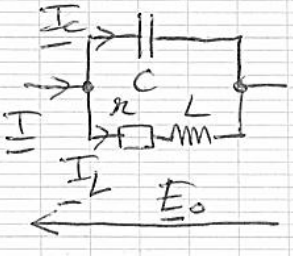
$|\underline{Z}|$ maximal pour $\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}=0$

c'est à dire : $\omega=\omega_0$

le circuit a alors une impédance maximale : il s'oppose à l'apparition d'un courant $|\underline{I}|$ $\Leftrightarrow$ bouchon.



5. $\omega=\omega_0 \Rightarrow \underline{Z} = Q^2 r$ et $\underline{Z}_S = r$



$$\underline{I} = \frac{E_0}{\underline{Z}} = \frac{E_0}{Q^2 r}$$

d'où (diviseur de courant) :

$$\underline{I}_C = \underline{I}\,\frac{\underline{Z}_{rL}}{\underline{Z}_{rL}+\underline{Z}_C} = \underline{I}\,\frac{r+jL\omega}{\underline{Z}_S}$$
$$= \underline{I}\left(1+j\frac{L\omega}{r}\right)$$
$$= \underline{I}\left(1+jQ\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$
$$= \underline{I}\left(1+jQ\right)$$
$$= \frac{E_0}{Q^2 r}\left(1+jQ\right) \quad (3)$$

et

$$\underline{I}_L = \underline{I}\,\frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_S} = \frac{1}{jrC\omega}\,\underline{I}$$
$$= \underline{I}\left(-jQ\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$
$$= \frac{E_0}{Q^2 r}\left(-jQ\right)$$

On obtient donc :

$$\underline{I}_C = \frac{E_0}{Q^2 r}(1 + jQ)$$

$$\underline{I}_L = \frac{E_0}{Q^2 r}(-jQ).$$

Les parties imaginaires de $\underline{I}_C$ et $\underline{I}_L$ se compensent !
⇒ le courant

$$\underline{I} = \underline{I}_C + \underline{I}_L \text{ est réel.}$$

⇒ $\underline{E}_0$ et $\underline{I}$ sont en phase.

Voir également "Relèvement du facteur de puissance"