E4 CIRCUITS LINEAIRES EN REGIME SINUSOÏDAL ETABLI / RESONANCE

Programme ATS

14. Circuits linéaires en régime sinusoïdal établi	
Signal sinusoïdal Pulsation et fréquence. Amplitude, phase. Représentation complexe d'un signal sinusoïdal	Passer de la représentation complexe d'un signal au signal réel et réciproquement (convention $e^{j\omega t}$).
Impédances complexes, association de deux impédances. Impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.	Établir l'expression de l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine. Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
Puissance moyenne reçue par un dipôle linéaire en régime sinusoïdal établi. Tension efficace. Intensité efficace. Facteur de puissance.	Établir et exploiter l'expression de la puissance moyenne reçue par un dipôle en fonction de la tension efficace, de l'intensité efficace et du facteur de puissance. Relier le facteur de puissance à l'impédance complexe.
Transport d'énergie électrique.	Justifier l'emploi de lignes à haute tension pour le transport d'énergie électrique. Analyser l'influence du facteur de puissance d'une installation sur les pertes d'énergie par effet Joule dans les lignes de transport.
Circuit RLC série en régime sinusoïdal établi. Résonance de courant. Facteur de qualité.	Établir l'expression de l'amplitude de la tension aux bornes de la résistance, de la bobine ou du condensateur en fonction de la fréquence en utilisant la notion d'impédance complexe. Tracer la courbe donnant l'amplitude de la tension aux bornes de la résistance en fonction de la fréquence. Relier l'amplitude et la largeur (à $1/\sqrt{2}$) du pic de résonance en courant au facteur de qualité et à la pulsation propre du circuit. **Mettre en évidence le phénomène de résonance de courant dans un circuit RLC série et estimer la valeur du facteur de qualité.**

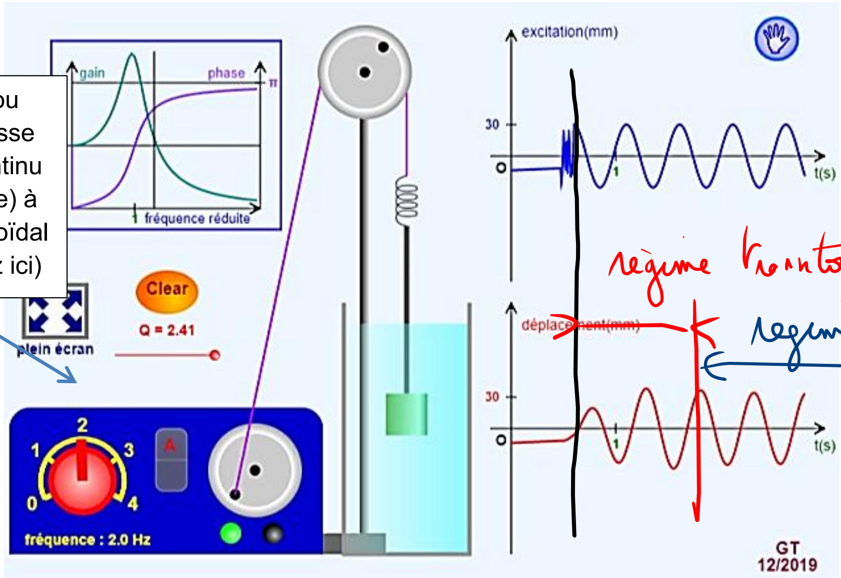
I) REGIME SINUSOÏDAL ETABLI (ou FORCE)

Mécanique : expérience

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.php?typanim=Javascript

On soumet un système oscillant électrique (circuit *RLC*) ou mécanique (système masse-ressort amorti) à une **excitation sinusoïdale** :

L'excitateur (ou générateur) passe d'un régime continu (fréquence nulle) à un régime sinusoïdal (fréquence 2 Hz ici)



excitation sinusoïdale

régime transitoire

établi / forcé / régime sinusoïdal permanent

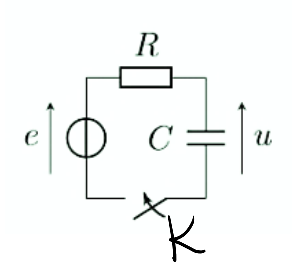
réponse : position de la masse

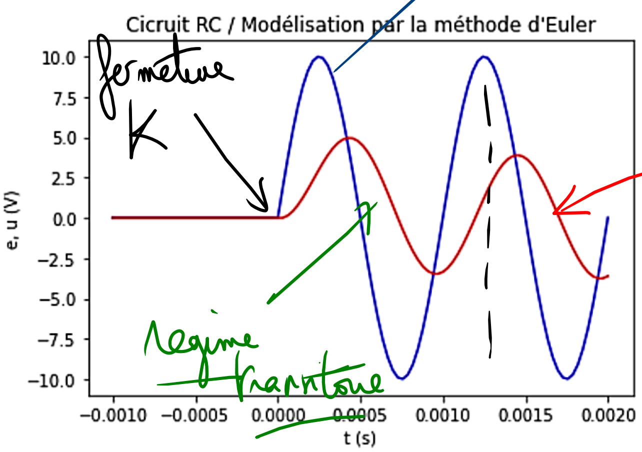
Phénomène de résonance remarquable :

Pont Tacoma - Résonance mécanique

Electricité : simulation

Générateur de tension e(t) sinusoïdale





fermeture K

Régime transitoire

Régime établi : tension condensateur u(t) : sinusoïdale de même fréquence que la tension du générateur mais amplitude ≠ et pas en phase

après un certain temps ($3\tau = 3RC$)

Conclusion : Après un régime transitoire, le système évolue en **régime permanent sinusoïdal établi (ou forcé)** : toutes les grandeurs (en mécanique : position, vitesse, … ; en électricité : tensions, intensités) … sont **sinusoïdales**, de **même fréquence** que le générateur, **d'amplitude différente**, et **déphasées**.

II) REPRESENTATION COMPLEXE D'UN SIGNAL SINUSOÏDAL

II)1) Définition

La grandeur sinusoïdale ***u(t) = U$_m$cos(ωt+ϕ)*** est représentée par le nombre complexe

$$\underline{u}(t) = U_m \exp(j(\omega t + \varphi)) = \underbrace{U_m \exp(j\varphi)}_{\underline{U}} \exp(j\omega t)$$

$\underline{u}(t) = \underline{U} e^{j\omega t}$

$\underline{u}(t)$ = grandeur / nombre complexe associé à $u(t)$

U_m = valeur max ou amplitude de $u(t)$ ou $U_m = |\underline{U}|$

$\underline{U} = U_m \exp(j\varphi) = U_m e^{j\varphi}$ = amplitude complexe de $u(t)$

φ = phase à l'origine de $u(t)$ ou $\varphi = \arg(\underline{U})$

Remarque : la grandeur *u(t)* est la partie réelle de *$\underline{u}$(t)* :

$$u(t) = Re(\underline{u}(t)) = Re\left(U_m e^{j(\omega t + \varphi)}\right) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

II)2) Propriétés des grandeurs complexes

Linéarité

Si $u(t) = u_1(t) + u_2(t) \rightarrow$ grandeurs réelles qui dépendent du temps

alors $\underline{u}(t) = \underline{u_1}(t) + \underline{u_2}(t) \rightarrow$ grandeurs complexes qui dépendent du temps

$\underline{U} = \underline{U_1} + \underline{U_2} \rightarrow$ amplitudes complexes qui ne dépendent PAS du temps

Dérivation et intégration

u(t) = U$_m$cos(ωt+ϕ) => $\frac{du}{dt}(t) = -\omega U_m \sin(\omega t + \varphi)$

~~$\underline{U} = U_m e^{j\varphi}$ =>~~

$$\underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi)} \Rightarrow \frac{d\underline{u}}{dt}(t) = j\omega U_m e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega \, \underline{u}(t)$$

$p \Leftrightarrow j\omega$

* Dériver une représentation complexe revient à multiplier par $j\omega$
* Intégrer ——— diviser par $j\omega$

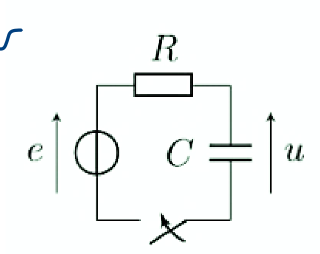
II)3) Résoudre une équation différentielle par la méthode complexe

Circuit RC

L'équation différentielle vérifiée par *u* s'écrit, pout *t* > 0 :

$$\frac{du}{dt}(t)+\frac{1}{\tau}u(t)=\frac{1}{\tau}e(t) \qquad \text{avec} \qquad \boxed{e(t)=E_m\cos(\omega t+\varphi)}$$

générateur



On cherche une solution particulière sous la forme $u(t)=U_m\cos(\omega t+\varphi')$.

1. Ecrire cette équation différentielle en faisant apparaître les amplitudes complexes $\underline{U}$ et $\underline{E}$.
2. Résoudre cette équation différentielle pour déterminer $\underline{U}$.
3. *En déduire l'expression de* U_m *et du déphasage* $\varphi' - \varphi$.

On ferme l'interrupteur à $t = 0$.

$\Rightarrow$ Après $t = 3\tau$, on obtient le régime sinusoïdal établi :

$u(t) = U_m\cos(\omega t+\varphi')$ $\quad \left| \begin{array}{l} U_m \neq E_m \\ \varphi' \neq \varphi \end{array}\right.$

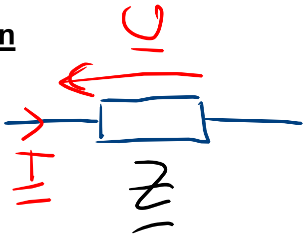
réelles	complexes
$u(t) \Rightarrow$	$\underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t+\varphi')} = U_m e^{j\varphi'} e^{j\omega t} = \underline{U} e^{j\omega t}$
$e(t) \Rightarrow$	$\underline{e}(t) = E_m e^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{E}\, e^{j\omega t}$
$\frac{du}{dt}(t) \Rightarrow$	$j\omega \underline{U} e^{j\omega t}$

1.

III) LOIS DE L'ELECTRICITE EN REPRESENTATION COMPLEXE

III)1) Impédance et admittance complexes

Définition



$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\underline{U}\,\cancel{e^{j\omega t}}}{\underline{I}\,\cancel{e^{j\omega t}}} \quad (\Omega)$$

↳ Impédance complexe

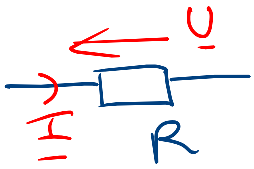
Admittance complexe : $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}$ (Ω^{-1} ou S)

Module : $|\underline{Z}| = \left|\frac{\underline{U}}{\underline{I}}\right| = \frac{U_{max}}{I_{max}}$

$Arg(\underline{Z}) = arg(\underline{U}) - arg(\underline{I}) = \varphi_{u/i}$

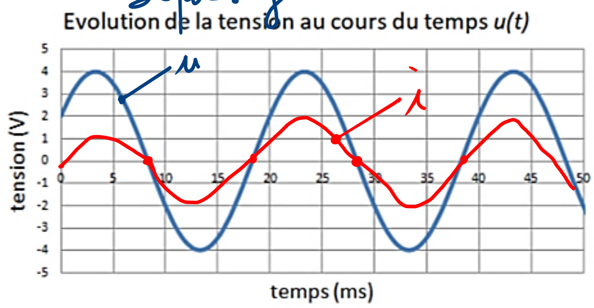
Déphasage

Résistance

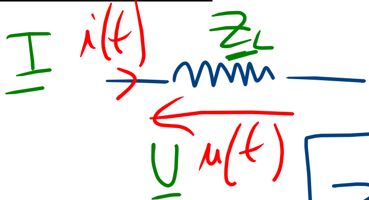


$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{Z}_R = R \\ \underline{Y}_R = \frac{1}{R}\end{array}}$$

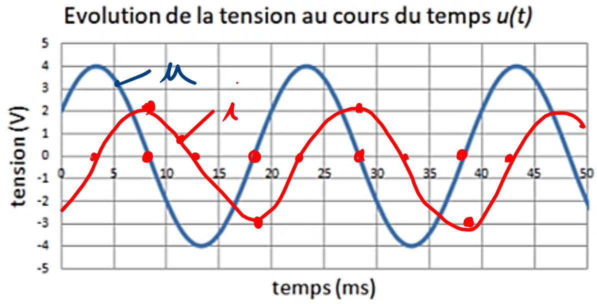
$u(t)$ et $i(t)$ sont en phase



Bobine parfaite



$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{Z}_L = jL\omega = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \\ \underline{Y}_L = \frac{1}{jL\omega}\end{array}}$$



$\underline{U} = \underline{Z}_L \underline{I}$
$= jL\omega \underline{I}$

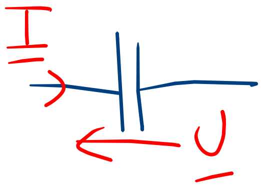
$\times j$ avance de $\frac{\pi}{2}$ | la tension est en avance sur le courant de $\frac{\pi}{2}$
| le courant est en retard sur la tension de $\frac{\pi}{2}$

$\varphi_{u/i} = \frac{\pi}{2}$

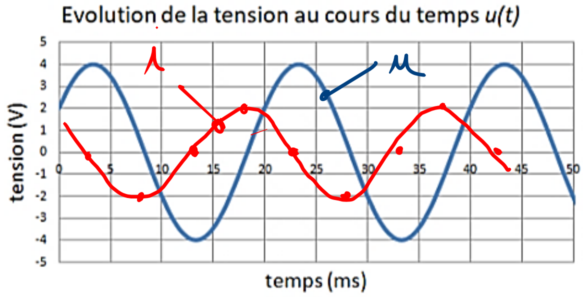
Limites : $|\underline{Z}_L| = L\omega \xrightarrow[\omega \to \infty]{} \infty$: L ⟺ —•⁄ •— en HF

$|\underline{Z}_L| = L\omega \xrightarrow[\omega \to 0]{} 0$ L ⟺ —•—•— en BF

Condensateur parfait



$$\boxed{\underline{Z}_c = \frac{1}{jC\omega} \qquad \underline{Y}_c = jC\omega}$$



$\underline{I} = \underline{Y}_c \cdot \underline{U}$

$= jC\omega\,\underline{U}$

avance de $\frac{\pi}{2}$

le courant $i(t)$ est en avance sur la tension $u(t)$ de $\frac{\pi}{2}$

la tension $u(t)$ est en retard sur le courant $i(t)$ de $\frac{\pi}{2}$

limite : $|\underline{Z}_c| = \frac{1}{C\omega} \xrightarrow[\omega \to \infty]{} 0$: $C \Leftrightarrow$ en HF

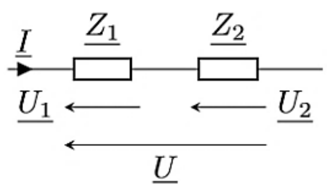
$|\underline{Z}_c| = \frac{1}{C\omega} \xrightarrow[\omega \to 0]{} \infty$: $C \Leftrightarrow$ en BF

III)2) Association de dipôles

En régime sinusoïdal, on applique les règles d'associations vues en régime continu, en remplaçant :

- Les tensions U et intensités I par les amplitudes complexes $\underline{U}$ et $\underline{I}$.
- Les résistances R par les impédances $\underline{Z}$.

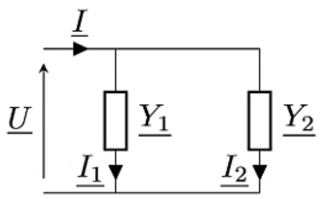
Association série



$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$

Diviseur de tension : $\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{U}$

Association parallèle

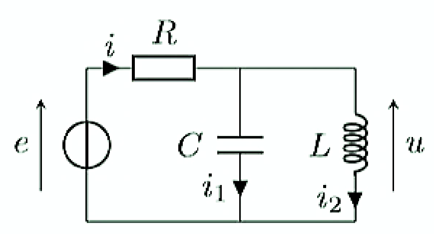


$\underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$ ou $\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$

$\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$

III)3) Exemple

En appliquant la loi des mailles et la loi des nœuds, et en utilisant les admittances complexes, exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}$ en fonction de $\underline{E}$, L, C, R, et ω.



IV) PUISSANCE EN REGIME SINUSOÏDAL FORCE

IV)1) Valeur efficace d'une grandeur

Définition

On appelle valeur efficace d'un signal périodique *s(t)*, de période *T*, la grandeur S_{eff} :

$$S_{eff} = \sqrt{\langle s^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t).dt}$$

Valeur efficace en anglais : RMS, Roor Mean Square

Pour une intensité : I_{eff} est la valeur de la composante continue qui produirait le même effet joule que la grandeur i(t) (dans une résistance identique).

Expression en régime sinusoïdal

$s(t) = S_m cos(\omega t + \varphi)$

D'où : $s^2(t) = S_m{}^2 cos^2(\omega t + \varphi) = S_m{}^2 \left(\frac{1+\cos(2\omega t+2\varphi)}{2}\right)$ car $cos^2 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)$

D'où : $S_{eff}{}^2 = \langle s^2 \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t).dt = \frac{1}{T}\int_0^T S_m{}^2 \left(\frac{1+\cos(2\omega t+2\varphi)}{2}\right) dt = \frac{S_m{}^2}{T}\left[\frac{t}{2} + \frac{sin(2\omega t+2\varphi)}{4\omega}\right]_0^T$

$$S_{eff}{}^2 = \frac{S_m{}^2}{T}\left[\frac{T}{2} - 0 + \frac{sin(2\omega T+2\varphi) - \sin(2\varphi)}{4\omega}\right]$$

Or : $sin(2\omega T + 2\varphi) = \sin(4\pi + 2\varphi) = \sin(2\varphi)$ car $\omega T = 2\pi$ et fonction *sinus* périodique de période 2π.

On obtient :

$S_{eff}{}^2 = \frac{S_m{}^2}{T}\left[\frac{T}{2}\right] = \frac{S_m{}^2}{2}$

C'est-à-dire :

$S_{eff} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}$ **en régime sinusoïdal forcé**

IV)2) Puissance moyenne consommée par un dipôle

En régime sinusoïdal forcé, seules les opérations linéaires peuvent être réalisées à l'aide des grandeurs complexes : addition, soustraction, multiplication par une constante.

Les opérations plus complexes, et en particulier le produit de deux grandeurs dépendant du temps, ne peuvent pas être réalisées à l'aide des grandeurs complexes.

Puissance instantanée consommée par un dipôle en convention récepteur : $p = u.i$

Puissance moyenne consommée par un dipôle : $\langle p \rangle = \langle u.i \rangle$

Facteur de puissance

$k = \frac{P}{S} = \cos\varphi$ en regime sinusoidal

En régime sinusoïdal :

$i(t) = I_m cos(\omega t)$ et $u(t) = U_m cos(\omega t + \varphi)$

D'où : $\langle p \rangle = \langle U_m I_m cos(\omega t + \varphi) cos(\omega t) \rangle = \langle \frac{U_m I_m cos(2\omega t+\varphi)}{2} \rangle + \langle \frac{U_m I_m cos(\varphi)}{2} \rangle$

Car $cosa\ cosb = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

Or : $\langle \frac{U_m I_m cos(2\omega t+\varphi)}{2} \rangle = 0$ car la valeur moyenne de la fonction *cosinus* est nulle,

On obtient : $\langle p \rangle = \langle \frac{U_m I_m cos(\varphi)}{2} \rangle = \frac{U_m I_m cos(\varphi)}{2} = U_{eff} I_{eff} cos(\varphi)$

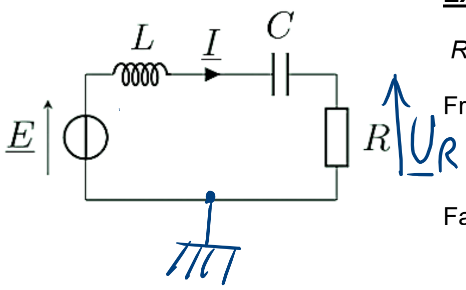
La puissance moyenne consommée par un dipôle en régime sinusoïdal forcé s'écrit : $\langle \boldsymbol{p} \rangle = \frac{\boldsymbol{U_m I_m cos(\varphi)}}{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{U_{eff} I_{eff} cos(\varphi)}$

Puissance moyenne = Puissance active

Page 9

V) ANALYSE FREQUENTIELLE DU CIRCUIT RLC SERIE

V)1) Résonance en courant



Expérience

R = 1kΩ, L = 1H, C = 50 nF

$U_R = RI$: $u_R(t)$ est l'image de $i(t)$

Fréquence de résonance du circuit *RLC* :

$$\omega_R = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Facteur de qualité Q du circuit *RLC* :

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

On relève à l'oscilloscope la tension $e(t) = E_m\cos(\omega t)$ et la tension $u_R(t) = R.i(t)$, image du courant $i(t)$ dans le circuit.

On fait varier la fréquence f (ou la pulsation ω) du générateur.

Observations

- Amplitude I_m de $i(t)$:

  En BF, $I_m \to 0$

  En HF, $I_m \to 0$

  Pour $f = f_R$, I_m est maximale

- Déphasage de $i(t)$ par rapport à $e(t)$:

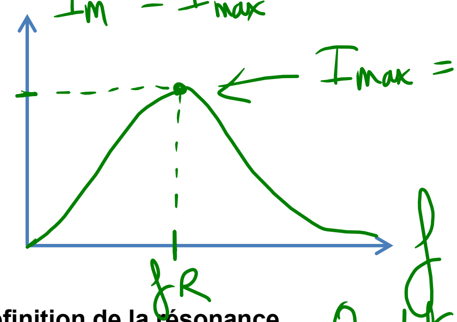
  * Pour $f = f_R$, $u_R(t)$ et $e(t)$ sont en phase
  * Pour $f < f_R$, $i(t)$ est en avance sur $e(t)$: Comportement capacitif
  * Pour $f > f_R$, $i(t)$ est en retard sur $e(t)$: Comportement inductif.

f_R = fréquence de résonance

Remarques

Allure de I_m en fonction de f :

$I_m = I_{max}$



$I_{max} = \frac{E_{max}}{R}$

L et C se compensent.

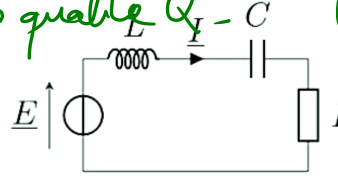
Définition de la résonance

On dit qu'il y a phénomène de résonance d'un système lorsque l'amplitude du signal passe par un maximum, pour une fréquence donnée, appelée fréquence de résonance.

Remarque Plus le pic de résonance est étroit autour de f_0, plus la résonance est aiguë.

L'acuité (aiguë ou pas) de la résonance est déterminée par le facteur de qualité Q.

Application



$\underline{U}_R = R\underline{I}$

1. Que représente physiquement la fonction de transfert $\underline{I}\,/\,\underline{E}$?
2. En déduire son expression en fonction de R, L et C puis en fonction de $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et enfin en fonction de la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.
3. Interpréter les comportements limites en Haute Fréquence (HF) et Basse Fréquence (BF).
4. Déterminer la pulsation de résonance ω_R. Déterminer l'amplitude I_{mR} de $i(t)$ à la résonance ainsi que le déphasage de $i(t)$ par rapport à $e(t)$.
5. Déterminer les 2 pulsations réduites de coupures x_1 et x_2, puis la largeur en pulsation de la résonance $\Delta\omega$ en fonction de ω_0 et Q.

1) $\underline{T} = \frac{\underline{I}}{\underline{E}} = \underline{Y}_{eq}$ (admittance) $= \frac{1}{\underline{Z}_{eq}}$ avec

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$$

$$\underline{T} = \frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{R + jL\omega - \frac{j}{C\omega}} = \frac{1\ (\div R)}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)(\div R)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{R}\right)}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

A identifier à : $\underline{T} = \frac{\left(\frac{1}{R}\right)}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ (proposé)

On identifie :

$$\begin{cases} \frac{L\cancel{\omega}}{R} = Q\frac{\cancel{\omega}}{\omega_0} \\ \frac{1}{RC\cancel{\omega}} = Q\frac{\omega_0}{\cancel{\omega}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{L}{R} = \frac{Q}{\omega_0} \quad (1) \\ \frac{1}{RC} = Q\omega_0 \quad (2) \end{cases}$$

$(1)\times(2)$: $\frac{L}{R^2C} = \frac{Q}{\cancel{\omega_0}} \times Q\cancel{\omega_0} \Rightarrow Q^2 = \frac{1}{R^2}\frac{L}{C} \Rightarrow \boxed{Q = +\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$

$\left(\frac{2}{1}\right)$: $\frac{\left(\frac{1}{RC}\right)}{\left(\frac{L}{R}\right)} = \frac{\cancel{R}}{\cancel{R}LC} = \frac{Q\omega_0}{\left(\frac{Q}{\omega_0}\right)} = \omega_0^2 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = +\frac{1}{\sqrt{LC}}}$

On obtient : $\underline{T} = \underline{Y}_{eq} = \dfrac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \dfrac{\left(\frac{1}{R}\right)}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \dfrac{\frac{1}{R}}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)}$

avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ pulsation réduite

3. BF : $x \to 0$

$\Rightarrow \underline{T} \to 0 \qquad |\underline{T}| \to 0$

HF : $x \to \infty$

$\Rightarrow \underline{T} \to 0 \qquad |\underline{T}| \to 0$

4. $|\underline{T}| = \dfrac{\left(\frac{1}{R}\right)}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$ On cherche x pour avoir $|\underline{T}|$ maximal

Il faut : $Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ minimum

$x - \dfrac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $\cancel{-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\omega}{\omega_0} = 1 \qquad \boxed{\omega = \omega_R = \omega_0}$ Pulsation de résonance de $\underline{T}$ donc de $\underline{I}$ (résonance d'intensité).

Pour $x = 1$

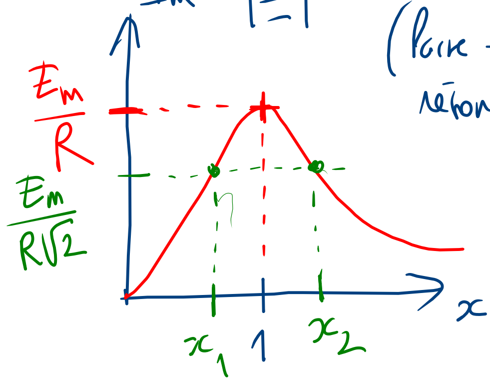
$\underline{T} = \dfrac{1}{R} \Leftrightarrow \underline{Y}_{eq} = \dfrac{1}{R} \Leftrightarrow \underline{Z}_{eq} = R \Leftrightarrow \dfrac{\underline{E}}{\underline{I}} = R$

* Module : $\dfrac{|\underline{E}|}{|\underline{I}|} = R \Leftrightarrow \dfrac{E_m}{I_m} = R \Leftrightarrow \boxed{I_m = \dfrac{E_m}{R}}$ à la résonance

* Argument : $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{\underline{E}}{\underline{I}}\right) = \arg(R) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{e(t) \text{ et } i(t) \text{ sont en phase}}$ à la résonance

$I_m = |\underline{I}|$



(Passe-bande résonant)

5. Pulsations réduites de coupure : x_1 et x_2 telles que

$I_m = \dfrac{\left(\frac{E_m}{R}\right)}{\sqrt{2}} = \dfrac{E_m}{R\sqrt{2}}$

Il faut : $\dfrac{\frac{1}{R}}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}} = \dfrac{\frac{1}{R}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\frac{1}{R}}{\sqrt{1+1}}$

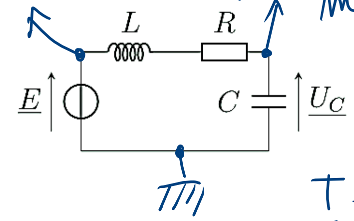
On $Q^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2 = 1 \Rightarrow$

Voie 1 : Tension générateur / Voie 2 : Tension condensateur

Page 12

V)2) Résonance en tension aux bornes du condensateur

Voie 1 Voie 2 même circuit



On s'intéresse désormais à la réponse en tension aux bornes du condensateur.

On établit la fonction de transfert $\underline{T} = \underline{U_C}/\underline{E}$.

$$\underline{T} = \frac{\underline{U_c}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z_c}}{\underline{Z_c}+\underline{Z_R}+\underline{Z_L}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega}+R+jL\omega}\ (\times jC\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega-LC\omega^2}$$

Identification

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$= \frac{1}{\boxed{\text{Fourni}}\ 1+j\frac{\omega}{Q\omega_0}-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1+j\frac{x}{Q}-x^2} = \frac{1}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}$$

En BF : $x \to 0$

$\underline{T} \to 1$

$\Rightarrow |\underline{T}| \to 1$

$Arg(\underline{T}) \to 0$

En HF :

$x \to \infty$

$\underline{T} \sim \frac{1}{-x^2}$

$|\underline{T}| \sim \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$Arg(\underline{T}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pi$ ou $-\pi$

Condition de résonance :

$$|\underline{T}| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$ passe par un maximum

si $(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2$ passe par un minimum

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2\right) = 2\times(-2x)\times(1-x^2)+\frac{2x}{Q^2} = 0$$

$$x\left(-4+4x^2+\frac{2}{Q^2}\right) = 0$$

$x = 0$ (maximum local)

ou $-4+4x^2+\frac{2}{Q^2} = 0$

$$\boxed{x^2 = 1-\frac{1}{2Q^2}} \Leftarrow -1+x^2+\frac{1}{2Q^2} = 0$$

Il faut : $1-\frac{1}{2Q^2} \geq 0$

$1 \geq \frac{1}{2Q^2}$

$1 \leq 2Q^2$

$\frac{1}{2} \leq Q^2$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \leq Q}$$ Condition de résonance

Pulsation réduite de résonance : $x_R = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

$|T| = Q = \frac{U_{cm}}{E_m}$

Pulsation de résonance :

$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \neq \omega_0$$

Lorsque ω = ω₀, la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{T} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{j}{Q} - 1} = \underline{\underline{-jQ}}$$

Conséquence 1 : l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur peut s'écrire : $U_{Cm} = Q.E_m$.

Donc, Si $Q > 1$, lorsque $f = f_0$, la tension aux bornes du condensateur est plus élevée que celle du générateur : phénomène de **surtension.**

Conséquence 2 : lorsque $f = f_0$, la tension aux bornes du condensateur est déphasée de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la tension du générateur.

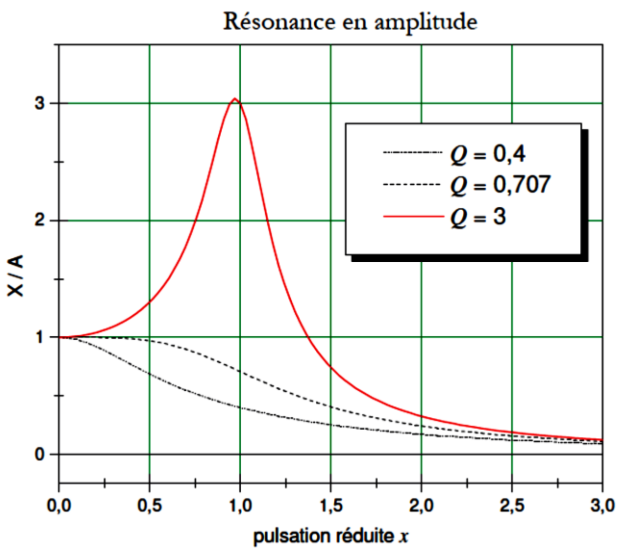
V)3) Résonance du circuit RLC série : Bilan

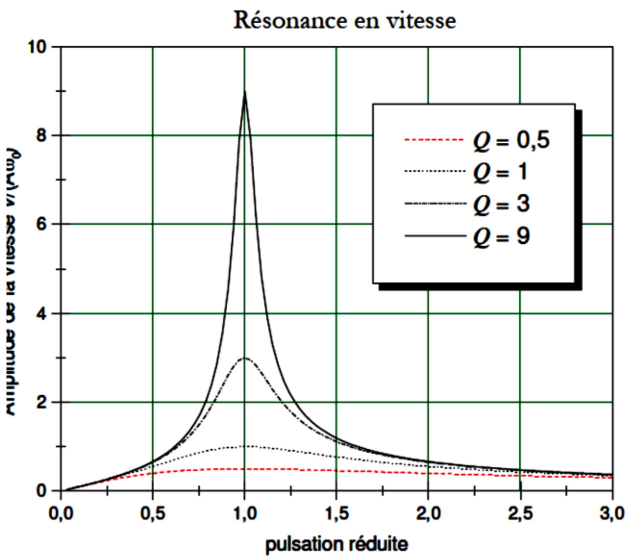
Page 13

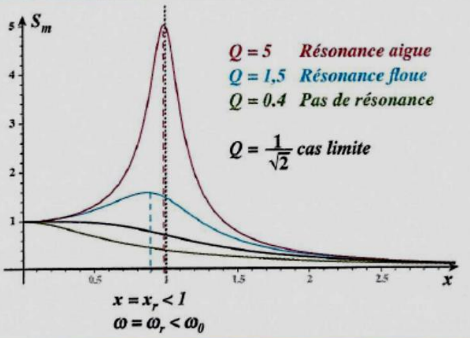
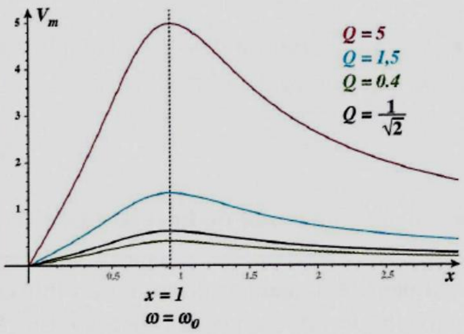
	Résonance en intensité	Résonance en tension
Existence	Toujours	Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$
Pulsation de résonance	$\omega_R = \omega_0$	$\omega_R = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$
Largeur de la résonance	$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$	$\Delta\omega \simeq \frac{\omega_0}{Q}$
Aspects notables à $\omega = \omega_R$	Maximum d'amplitude, $e(t)$ et $i(t)$ en phase	Maximum d'amplitude
Aspects notables à $\omega = \omega_0$	$\omega_0 = \omega_R$!	(+) $e(t)$ et $i(t)$ en quadrature $(\varphi = \frac{\pi}{2})$, $\frac{U_{cm}}{E_m} = Q$
Mesure de ω_0	On mesure ω_R	Quadrature de phase
Mesure de Q	$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$	$Q = \frac{U_{cm}}{E_m}$ lorsque quadrature

VI) ANALOGIE MECANIQUE ET CONCLUSIONS

Mécanique	Electricité
Elongation x (m)	Charge q (C)
Vitesse v ($m.s^{-1}$)	Intensité i (A)
Masse m (kg)	Inductance L (H)
Raideur k ($N.m^{-1}$)	$\frac{1}{C}$ avec Capacité C (F)
Frottement h ($N.m^{-1}.s$ ou $kg.s^{-1}$)	Résistance R (Ω)
Force F (N)	Tension u (V)





	Réponse en élongation ou charge (ou tension)	Réponse en vitesse ou intensité
Réponse réelle	$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$	$\dot{s}(t) = V_m \cos(\omega t + \psi)$
Amplitude complexe de la réponse	$\underline{S} = \dfrac{\omega_0^2 E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\dfrac{\omega_0 \omega}{Q}} = \dfrac{E_0}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}}$	$\underline{V} = \dfrac{Q\omega_0 E_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} = \dfrac{Q\omega_0 E_0}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$
Amplitude de la réponse	$S_m = \lvert\underline{S}\rvert = \dfrac{E_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\dfrac{x}{Q}\right)^2}}$	$V_m = \dfrac{Q\omega_0 E_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}}$
Courbes		
Abscisse du maximum (résonance)	$x = x_r = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$ et $\omega = \omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$	$x = 1$ et $\omega = \omega_0$
Maximum d'amplitude	Le maximum n'existe que si $Q > 1/\sqrt{2}$. x_r se rapproche de la fréquence propre quand Q augmente.	Quel que soit Q, le maximum existe et correspond toujours à la fréquence propre.