ELECTRICITE EN REGIME SINUSOÏDAL FORCE / RESONANCE

Travaux dirigés (2)

Exercice 1 : Relèvement du facteur de puissance d'une installation

On considère une installation électrique (**figure 1**) dont le modèle équivalent est l'association série des composants suivants :

- une résistance $R = 20\ \Omega$ représentant la partie active de l'installation (chauffages, etc ...) et consommant la puissance active P.
- une inductance $L = 100\ mH$ représentant la partie inductive de l'installation (moteurs, etc ...) et consommant la puissance réactive Q.

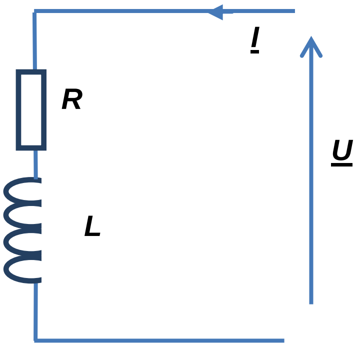


Figure 1

L'ensemble est alimenté par une tension sinusoïdale $u(t)$ de valeur efficace $U_{eff} = 230\ V$ et de fréquence $f = 50\ Hz$.

- La tension $u(t)$ s'écrit sous la forme : $u(t) = U_{max}\cos(\omega t)$.
- L'intensité $i(t)$ s'écrit sous la forme : $i(t) = I_{max}\cos(\omega t - \varphi)$, avec φ déphasage de l'installation. On rappelle que $\boldsymbol{\varphi = Arg(\underline{Z})}$.

On définit le facteur de puissance de l'installation $k = cos\varphi$. C'est aussi le rapport entre la puissance active P consommée et la puissance apparente S consommée : $k = cos\varphi = \frac{P}{S}$.

1) Donner et calculer toutes les caractéristiques, réelles et complexes, de la tension d'alimentation : U_{max} , ω , $u(t)$, amplitude complexe $\underline{U}$, grandeur complexe $\underline{u}(t)$.
2) Déterminer et calculer toutes les caractéristiques de l'impédance équivalente de l'installation : impédance complexe $\underline{Z_{eq}}$, module Z_{eq}, argument φ, facteur de puissance $k = cos\varphi$.
3) Déterminer et calculer toutes les caractéristiques, réelles et complexes, de l'intensité délivrée par le générateur (ou traversant l'installation !) : I_{max} , I_{eff} , φ , $i(t)$, amplitude complexe $\underline{I}$, grandeur complexe $\underline{i}(t)$.

Afin de relever le facteur de puissance de l'installation, on place un condensateur C (de valeur à déterminer) en parallèle de l'installation précédente (**figure 2**). On souhaite obtenir un facteur de puissance $\boldsymbol{k' = cos\varphi' = 1}$.

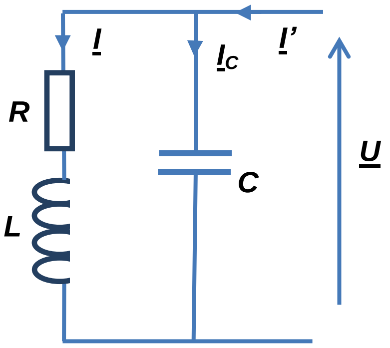
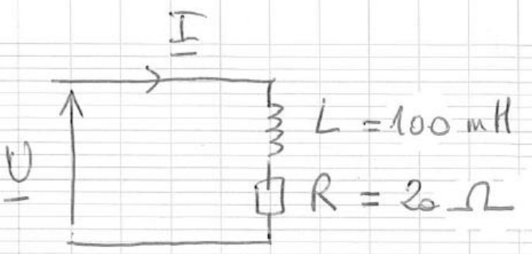


Figure 2

4) Déterminer l'expression de l'impédance équivalente $\underline{\boldsymbol{Z_{eq}}}'$ de l'ensemble, et la mettre sous la forme $\underline{\boldsymbol{Z_{eq}}}' = \frac{\boldsymbol{a+jb}}{\boldsymbol{c+jd}}$.
5) (***) Etablir la condition sur C permettant d'obtenir $\boldsymbol{k' = cos\varphi' = 1}$**.** Calculer C. Calculer $\underline{Z_C}$, et $\underline{I_C}$.
6) (**) Cette condition étant remplie, recalculer toutes les caractéristiques, réelles et complexes, de l'intensité délivrée par le générateur : I'_{max} , I'_{eff} , $i'(t)$, amplitude complexe $\underline{I'}$, grandeur complexe $\underline{i'}(t)$.

Conclusion :

En relevant le facteur de puissance d'une installation, celle-ci consomme la même puissance (active) P, tout en consommant moins de courant.



$f = 50\ Hz$

$U_{eff} = 230\ V$

* $\underline{Z}_{eq} = R + jL\omega$
$= R + j2\pi L f = \underline{20 + 31{,}4\,j}$

* $\underline{U} = U_{eff}\sqrt{2}$ $\quad \underline{u}(t) = U_{eff}\sqrt{2}\, e^{j\omega t} = \underline{325\, e^{j\omega t}}$

$\underline{I} = I_{eff}\sqrt{2}$ $\quad \underline{i}(t) = I_{eff}\sqrt{2}\, e^{j(\omega t + \varphi)}$

avec : $\omega = 2\pi f$
$= 314\ rad.s^{-1}$

$\underline{I} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}_{eq}}$ $\Rightarrow$ $I_{eff} = \dfrac{U_{eff}}{|\underline{Z}_{eq}|}$ $\quad I_{max} = \dfrac{U_{max}}{|\underline{Z}_{eq}|}$

* $\underline{I}$? $\;|\; i(t)$? $\;\underline{i}(t)$? $\;I_{eff}$?

$|\underline{Z}_{eq}| = \sqrt{20^2 + 31{,}4^2} = \underline{37{,}2\ \Omega}$

Facteur de puissance : $\underline{\cos\varphi = 0{,}537}$

$I_{eff} = \dfrac{U_{eff}}{|\underline{Z}_{eq}|} = \dfrac{230}{37{,}2} = \underline{6{,}18\ A}$

$I_{max} = \dfrac{U_{max}}{|\underline{Z}_{eq}|} = \dfrac{325}{37{,}2} = \underline{8{,}74\ A}$

$\arg(\underline{Z}) = \varphi = \arctan\left(\dfrac{L\omega}{R}\right) = \arctan\left(\dfrac{31{,}4}{20}\right) = \underline{57{,}5°}$
$= \underline{1{,}00\ rad}$

D'où :

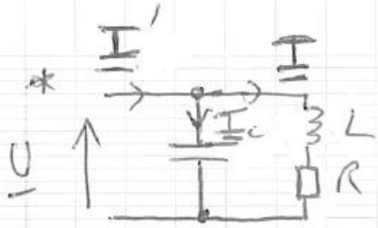
$\underline{I} = I_{max}\, e^{-j\varphi} = 8{,}74\, e^{-j\varphi}$ $\quad$ avec : $\varphi = 1{,}00\ rad$

$\underline{i}(t) = 8{,}74\, e^{j(\omega t - \varphi)}$ $\quad \omega = 314\ rad.s^{-1}$

$i(t) = 8{,}74 \cos(\omega t - \varphi)$

signe $\ominus$: $i(t)$ en retard sur $u(t)$.

*



On veut :
$\cos \varphi' = 1$

Il faut $\mathrm{Im}(\underline{Z}'_{eq}) = 0$

$$\underline{Z}'_{eq} = \frac{\underline{Z}_C \times \underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_{eq}}$$

$$= \frac{\frac{1}{jC\omega} \times (R + jL\omega) \quad (\times jC\omega)}{\frac{1}{jC\omega} + (R + jL\omega) \quad (\times jC\omega)}$$

$$= \frac{R + jL\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

$$= \frac{R + jL\omega}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega} \; \frac{\times((1 - LC\omega^2) - jRC\omega)}{\times((1 - LC\omega^2) - jRC\omega)}$$

$$= \frac{(R + jL\omega)((1 - LC\omega^2) - jRC\omega)}{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}$$

On veut $\mathrm{Im}(\underline{Z}'_{eq}) = 0$

$$\Rightarrow L\omega(1 - LC\omega^2) - R^2 C\omega = 0$$

$$\Rightarrow L\cancel{\omega} - L^2 C\omega^{\cancel{3}\,2} - R^2 C\cancel{\omega} = 0$$

$$C\left(R^2+L^2\omega^2\right)=L$$

$$\frac{s}{\Omega} \leftarrow C=\frac{L}{R^2+L^2\omega^2} \quad \begin{matrix} \rightarrow H=\Omega.s \\ \rightarrow \Omega^2 \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} Z_L=L\omega \\ L=\frac{Z_L}{\omega}\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{1}{\Omega.s^{-1}}\left(Z_c=\frac{1}{C\omega},\ C=\frac{1}{Z_c\omega}\right)$$

$$C=\frac{L}{R^2+L^2\omega^2}$$

A.N :

$$C=\frac{0{,}1}{20^2+0{,}1^2\times 314^2}=\underline{7{,}22.10^{-5}\,F}.$$

Verification :

$$\underline{Z}_c=\frac{1}{jC\omega}=\underline{-44{,}1\,j}$$

$$\underline{I}_c=\frac{\underline{U}}{\underline{Z}_c}=\frac{325}{-44{,}1j}=\underline{7{,}22\,j}$$

Or :

$$\underline{I}=8{,}74\,e^{-j\varphi}$$
$$=8{,}74\cos(-\varphi)+j\,8{,}74\sin(-\varphi)$$
$$=\underline{4{,}70-7{,}37\,j}$$

D'où :

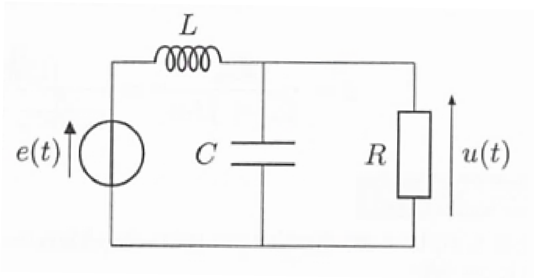
$$\underline{I}'=\underline{I}_c+\underline{I}$$
$$=4{,}70+\underbrace{\cancel{7{,}22j-7{,}37j}}_{\simeq 0}$$

$$\underline{\underline{I}'=4{,}70} \qquad \text{avec } \varphi'\simeq 0$$
$$\cos\varphi'\simeq 1$$

$$I'_{max}=\underline{4{,}70\,A}<I_{max}=8{,}74\,A$$
$$I'_{eff}=\frac{4{,}70}{\sqrt{2}}=\underline{3{,}32\,A}<I_{eff}<6{,}18\,A$$

Exercice

On donne le circuit ci-dessous, alimenté par un générateur qui délivre une tension harmonique de pulsation ω : *e(t)* = *Ecos(ωt)*.

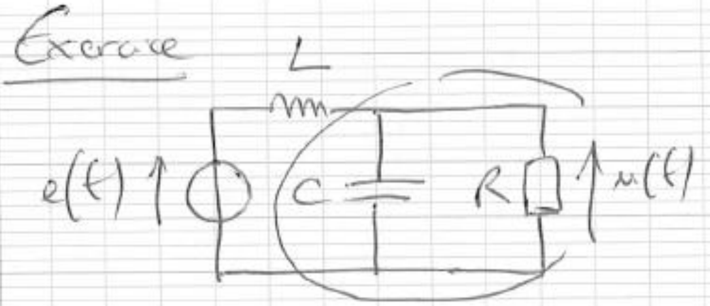


1) Déterminer l'amplitude complexe $\underline{U}$ associée à la tension *u(t)*, en fonction de *E*, *R*, *C*, *L* et ω.
2) Mettre cette expression sous forme canonique :

$\underline{U} = \frac{E}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}$ *x* étant la pulsation réduite : $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$.

3) Déterminer l'expression du module et de l'argument de $\underline{U}$.
4) Déterminer la condition de résonance, ainsi que la pulsation de résonance ω_R.
5) Tracer les allures du module de $\underline{U}$ en fonction de ω suivant la valeur du facteur de qualité *Q*.
6) Tracer l'allure de l'argument de $\underline{U}$ en fonction de ω. Que représente l'argument de $\underline{U}$?
7) En déduire l'expression de la grandeur réelle *u(t),* en précisant l'expression de son amplitude et de son déphasage.

Exercice



$$e(t) = E\cos(\omega t)$$
$$\underline{E} = E$$
$$\underline{e}(t) = E e^{j\omega t}$$

1) $\underline{Z}_{eq}$?

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = jC\omega + \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{jRC\omega + 1}{R}$$

$$\Rightarrow \underline{Z}_{eq} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + \underline{Z}_L}\,\underline{E}$$

$$\underline{U} = \frac{\frac{R}{1+jRC\omega}}{\frac{R}{1+jRC\omega} + jL\omega}\,\underline{E} = \frac{\frac{R}{1+jRC\omega}}{\frac{R + jL\omega - RLC\omega^2}{1+jRC\omega}}\,\underline{E}$$

2)

$$\underline{U} = \frac{R \quad (\div R)}{R + jL\omega - RLC\omega^2 \quad (\div)R}\,\underline{E}$$

$$\underline{U} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2}\,\underline{E} = \frac{E}{1 + j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2}$$

On propose :

$$\underline{U} = \frac{E}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} = \frac{E}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

Identification :

$$\begin{cases} -LC(\omega)^2 = -\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \Rightarrow \omega_0^{\,2} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ j\frac{L}{R}\cancel{\omega} = j\frac{\cancel{\omega}}{Q\omega_0} \Rightarrow Q = \frac{1}{\omega_0}\frac{R}{L} = \sqrt{LC}\,\frac{R}{L} \end{cases}$$

$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

1

3) $|\underline{U}| = \dfrac{E}{\sqrt{(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$

$$\arg(\underline{U}) = -\arg\Big(\underbrace{(1-x^2)}_{a} + j\underbrace{\frac{x}{Q}}_{b}\Big)$$

$$= -\arctan\left(\frac{\frac{x}{Q}}{1-x^2}\right) \quad \left(= -\arctan\frac{b}{a}\right)$$

ou

$$-\arcsin\frac{\frac{x}{Q}}{\sqrt{(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2}} \quad \left(= -\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

ou

$$-\arccos\left(\frac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2}}\right) \quad \left(= -\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

4) Condition de résonance :

$|\underline{U}|$ passe par un maximum si $(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2$ passe par un minimum

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2\right) = 0$$

$$-4x(1-x^2) + \frac{2x}{Q^2} = 0$$

$$2x\left(-2+2x^2+\frac{1}{Q^2}\right) = 0$$

$x = 0$

ou $-2+2x^2+\dfrac{1}{Q^2} = 0$

$$2x^2 = 2 - \frac{1}{Q^2}$$

$$x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

$$x = x_R = \sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} \qquad \omega_R = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$$

Condition de résonance $\longrightarrow$ ②

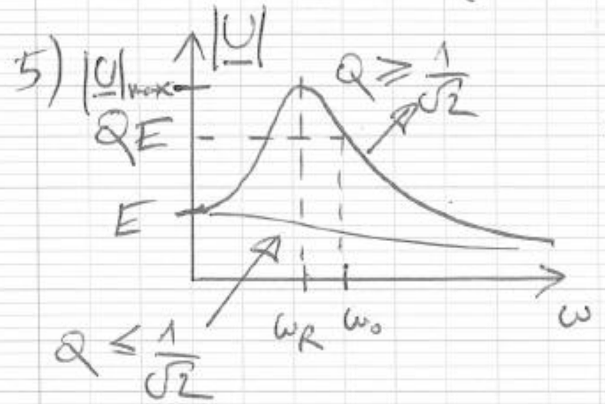
Condition de résonance :

$$1-\frac{1}{2Q^2} \geq 0$$

$$1 \geq \frac{1}{2Q^2}$$

$$1 \leq 2Q^2 \Rightarrow Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

5)



Pour $x = 1 \Leftrightarrow \omega = \omega_0$

$$|\underline{H}| = \frac{E}{\sqrt{\left(\frac{1}{Q}\right)^2}} = QE$$

6) $\arg(\underline{U}) = -\arccos \dfrac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$

$x \to 0 \Rightarrow \arg(\underline{U}) \to -\arccos(1) = 0$

$x \to \infty \Rightarrow \arg(\underline{U}) \sim -\arccos\left(\frac{-x^2}{x^2}\right)$

$= -\arccos(-1)$

$= \pi$ ou $-\pi$

l'étude de arcsin permettrait de valider $-\pi$

$x = 1 \Rightarrow \arg(\underline{U}) = -\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$

$\arg(\underline{E}) = 0 \Rightarrow \arg(\underline{U})$ représente le déphasage de $u(t)$ par rapport à $e(t)$

Ici : $\mathrm{Arg}(\underline{U}) = \varphi < 0$ car $u(t)$ en retard sur $e(t)$

(3)

7) $\underline{U} = \dfrac{E}{(1-x^2)+j\frac{x}{Q}} = U e^{j\varphi}$

d'où :

$\underline{u}(t) = U e^{j(\omega t+\varphi)} = \dfrac{E e^{j\omega t}}{(1-x^2)+j\frac{x}{Q}}$

$u(t) = U\cos(\omega t+\varphi)$

avec $\begin{cases} U = |\underline{U}| \\ \varphi = \arg(\underline{U}) \end{cases}$