MF1 STATIQUE DES FLUIDES / TD

Exercices de raisonnement

1. L'endroit le plus profond de l'Océan se situe au large des Philippines, avec une profondeur d'environ h = 10 km.
   a. Donner l'ordre de grandeur de la pression au fond de cette fosse.
   b. Qu'a-t-on négligé ?
   c. La pression réelle est-elle plus ou moins importante que l'estimation du a. ?

1. a. 10 km = 10.000 m
$z = 10.000$ m
$\rho g z \simeq 1000 \times 10 \times 10.000$
$\simeq 10^8$ Pa $= 1000$ bar.
b. Compressibilité de l'eau
$\rho(P) = \rho_0(1+\alpha(P-P_0))$
$\rho \nearrow$ si $P \nearrow$
c. Plus importante.

2. Estimer la pression en haut du Mont Blanc.

2. $P = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$ $H = 8,3$ km $\left(H = \frac{RT_0}{Mg}\right)$
$z = 4,81$ km $\Rightarrow P \simeq 0,55\, P_0$

3. a. Estimer la force exercée par l'air à pression et température usuelles sur une vitre en verre de surface S = 1 m^2.
   b. Au poids de quelle masse posée sur une vitre horizontale cette force correspond-elle ?
   c. Pourquoi la vitre n'explose-t-elle pas ?

3. a. $F = p.S$
$= 10^5 \times 1\,\text{m}^2 = 10^5$ N
b. $g \simeq 10$, $P = mg$
$10^5 = 10^4 \times 10$
10^4 kg $= 10$ tonnes.
c. Pression de l'autre côté !

4. a) À la surface d'un récipient contenant de l'eau, la pression change de P_0 à $P_0 + \Delta P$. Que dire du changement de pression dans l'eau ?

b) Commenter l'expérience dite du tonneau de Pascal. Un tonneau est percé de manière à être surmonté par une fine colonne d'eau. On ajoute un tout petit peu d'eau dans la colonne (fig. 35). Que va-t-il se passer ?

c) Un récipient contenant de l'eau possède deux ouvertures de sections très différentes $S_2 >> S_1$ fermées par des pistons (Fig. 36). Que se passe-t-il si on applique une force $\vec{f_1}$ sur le piston de surface S_1 ?

Figure 35

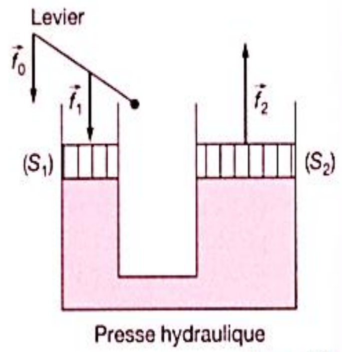


Figure 36

4.a. P augmente de ΔP partout

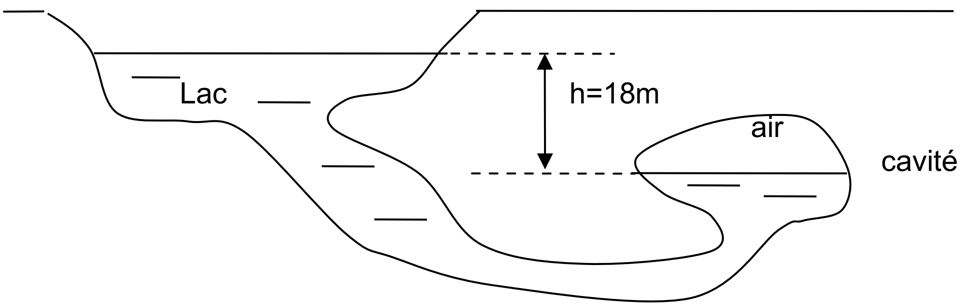
b. $h \Rightarrow \rho g h$.

c. $\Delta P = \frac{f_1}{S_1}$

$\Rightarrow f_2 = \Delta P . S_2 = f_1 \frac{S_2}{S_1} >> f_1$

Exercice 1 : Cavité souterraine (*)

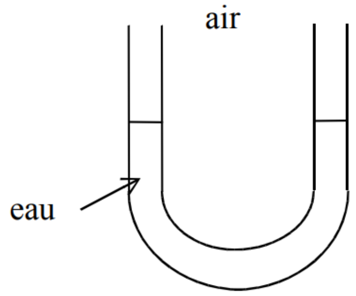
Le sondage d'une région, propice à la spéléologie, indique la présence d'une cavité souterraine partiellement remplie d'eau et ayant approximativement la forme suivante :



Que vaut la pression de l'air enfermé dans la cavité ?

Exercice 2 : Tube en U (*)

Dans un tube en U de section 1cm², on place de l'eau comme l'indique le schéma ci-dessous :

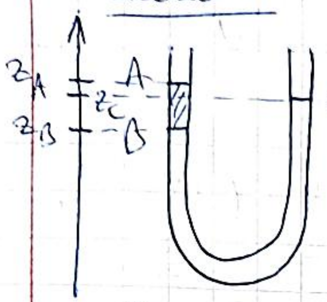


On ajoute dans la partie gauche du tube 20 cm³ d'essence de masse volumique 0,8 g/cm³ non miscible à l'eau.

De combien se déplace le niveau de l'eau dans la partie droite ?

Données : L'eau a une masse volumique ρ=1000kg/m³ et g=9,8m/s².

Exercice 1



$\rho_e = \rho_{essence}$ $\quad \rho = \rho_{eau}$

Essence :

$P_A + \rho_e g z_A = P_B + \rho_e g z_B$

Eau :

$P_B + \rho g z_B = P_C + \rho g z_C$

$P_A = P_C = P_{atm}$

$$\begin{cases} P_A = P_B + \rho_e g z_B - \rho_e g z_A & (1) \\ P_C = P_B + \rho g z_B - \rho g z_C & (2) \end{cases}$$

(1) − (2)

$0 = 0 + \rho_e g z_B - \rho_e g z_A - \rho g z_B + \rho g z_C$

$\rho_e g (z_A - z_B) = \rho g (z_C - z_B)$

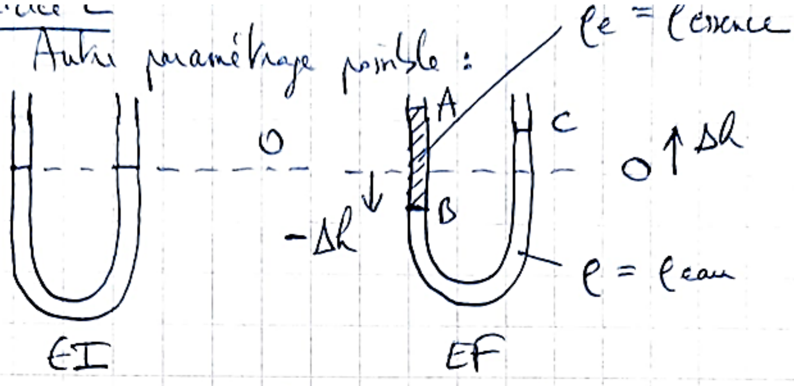
$z_C - z_B = \frac{\rho_e}{\rho}(z_A - z_B)$

$= \frac{0{,}8}{1} \times 20 = 16$ cm.

$\Delta h = \frac{z_C - z_B}{2}$! $\longrightarrow \Delta h = 8$ cm

Exercice 2

Autre paramétrage possible :



$$z_C - z_B = 2\Delta h$$

En ajoutant de l'essence à gauche, le niveau à droite monte de Δh, mais descend à gauche de Δh

$$p_B = p_{Bas} = p_A + \rho_e \cdot g \cdot (z_A - z_B) \quad (1) \text{ (essence)}$$

$$= p_C + \rho \cdot g \cdot (z_C - z_B) \quad (2) \text{ (Eau)}$$

$(1) - (2) = 0$

$$p_A + \rho_e \cdot g \cdot (z_A - z_B) = p_C + \rho \cdot g \cdot (z_C - z_B)$$

$$\cancel{p_{atm}} + \rho_e \cdot g \cdot (z_A - z_B) = \cancel{p_{atm}} + \rho \cdot g \cdot (z_C - z_B)$$

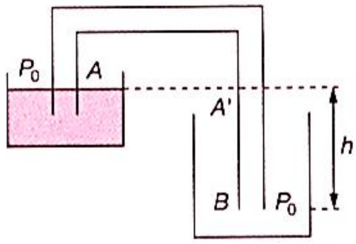
$$\rho_e \cdot \cancel{g} \cdot \frac{V_e}{S} = \rho \cdot \cancel{g} \cdot 2\Delta h$$

$$\Delta h = \frac{\rho_e}{\rho} \cdot \frac{V_e}{2S}$$

$$\text{cm} \leftarrow \Delta h = d_e \cdot \frac{V_e}{2S} = 0{,}8 \times \frac{20 \; (\text{cm}^3)}{2 \times 1 \; (\text{cm}^2)}$$

$$\Delta h = 8 \text{ cm}$$

Exercice 3 : Fonctionnement d'un siphon (*)



Un siphon peut être représenté comme un tube en U à l'envers dans un récipient (ci-contre).

a) Le siphon a été amorcé, c'est-à-dire qu'on l'a rempli d'eau en aspirant en B. En supposant qu'il y a équilibre, relier les pressions en A et B. On notera h la distance entre B et A'.

b) Expliquer pourquoi l'équilibre n'est pas possible.

c) Que se passe-t-il et jusqu'à quand ?

Exercice 3

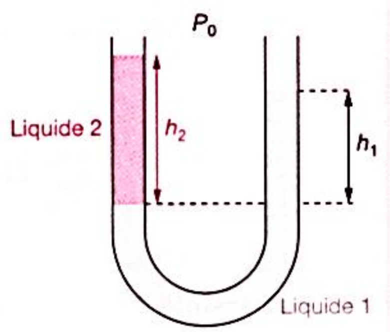
a) $P_B = P_A + \rho g h$

b) $P_B = P_{atm}$ et $P_A = P_{atm}$

$\Rightarrow$ impossible

c) Écoulement jusqu'à ce que $h_B = h_A$.

Exercice 4 : Tube en U (2) (*)



Le tube en U représenté ci-contre contient deux liquides non miscibles de masses volumiques ρ_1 et ρ_2. Ces deux liquides sont en contact avec l'air libre à la pression P_0.

a) Exprimer la masse volumique ρ_2 en fonction de ρ_1, h_1 et h_2.

b) Quel est le liquide le plus dense ?

c) Que dire du principe des vases communicants ?

Exercice 4

a) $\cancel{P_0} + \rho_2 g h_2 = \cancel{P_0} + \rho_1 g h_1$ (Pression à la frontière entre 1 et 2).

$\rho_2 = \rho_1 \dfrac{h_1}{h_2}$

b) $h_1 < h_2 \Rightarrow \rho_2 < \rho_1$

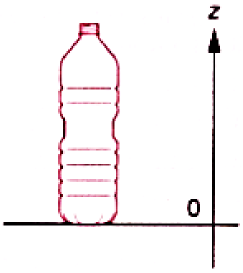
$\Rightarrow$ liquide 1 plus dense

c) 1 seul liquide !

Exercice 5 : Evolution de la pression dans un récipient (*)

Une bouteille plastique de hauteur h = 30 cm est ouverte et remplie d'air (Ci-contre). En z=0, la pression est P_{atm}. Le système est à l'équilibre à la température T_0.

a) Rappeler quelle est la loi d'évolution de la pression dans la bouteille.



b) En déduire $\alpha = \frac{P(h)-P(0)}{P(0)}$, variation relative de la pression dans la bouteille.

On donne : T_0 = 25 °C, masse molaire de l'air M = 29 g.mol^{-1}, constante des gaz parfaits R = 8,3 J.K^{-1}.mol^{-1}, le champ de gravité g = 9,8 m.s^{-2}.

c) En appliquant directement la relation de statique des fluides incompressibles, estimer à nouveau α. Trouve-t-on un résultat similaire ? Pourquoi ?

d) Au final, peut-on parler de « la pression » du gaz dans la bouteille ?

Exercice 5

a) $p(z) = p_{atm} \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$

b) $\alpha = \frac{p(z) - p_{atm}}{p_{atm}} = \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right)$

$= \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$ $\quad H = \frac{RT_0}{Mg}$

$\simeq -3{,}4 \cdot 10^{-5}$

c) $dP = -\rho g\, dz = -\rho_0 g\, dz$

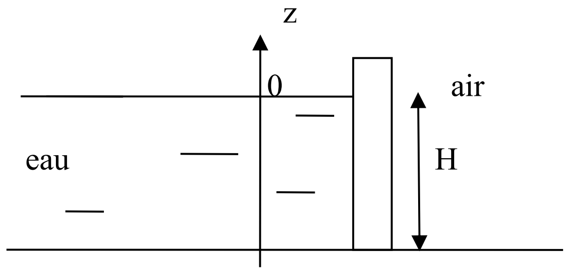
avec $\rho_0 = \frac{p_{atm} M}{RT_0}$

$\alpha = -\frac{Mgz}{RT_0}$ D.L. de b) Dvp. limité !

ρ ne varie pas sur 30 cm !

Exercice 6 : Barrage (**)

Un mur de barrage a le profil suivant :



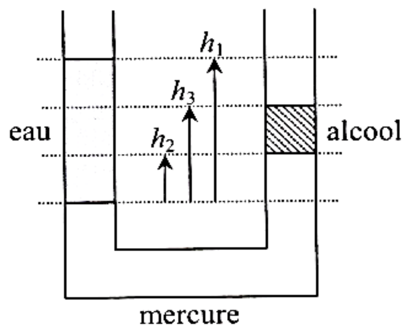
Hauteur immergée H = 25m sur une largeur L = 300m.
Données : masse volumique de l'eau ρ = 1000kg/m^3 et g = 9,8m/s^2.

a) Exprimer la pression à la profondeur z (z<0).
b) En considérant une bande de largeur L et de hauteur dz (infiniment petite) située à la côte z, calculer la force de pression infinitésimale dF qui s'exerce de la part de l'eau sur cette bande.
c) En déduire la force totale exercée par l'eau sur l'ouvrage et la force résultante si on tient compte de l'air situé de l'autre côté du barrage.

Exercice 7 : Équilibre de trois liquides non miscibles (**)

1. Montrer, à partir de l'équation locale de la statique des fluides, que la pression est une fonction affine de l'altitude z dans un liquide incompressible.

2. Un système de trois liquides incompressibles non miscibles (eau, mercure, alcool) est en équilibre dans un tube en U ouvert à l'air libre. On note respectivement ρ_1, ρ_2 et ρ_3 les masses volumiques de l'eau, du mercure et de l'alcool. Calculer ρ_3 en fonction de ρ_1, ρ_2, h_1, h_2 et h_3.



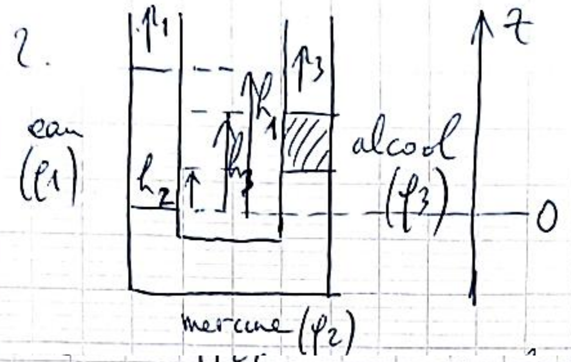
A.N. : h_1 = 0,80 m, h_2 = 0.050 m, h_3 = 0.20 m, $\rho_1 = 1{,}0.10^3\ kg.m^{-3}$, $\rho_2 = 1{,}4.10^4\ kg.m^{-3}$

1. $\frac{dP}{dz}(z) = -\rho_0 g$

Par intégration : $\frac{dP}{dz}(z) = -\rho_0 g = cte$

$\Rightarrow P(z) = -\rho_0 g z + P_0$

2.



$h_0 = 0$

$$\begin{cases} p_0 + \rho_1 g h_0 = p_1 + \rho_1 g h_1 & (1) \quad (\text{Eau}) \\ p_0 + \rho_2 g h_0 = p_2 + \rho_2 g h_2 & (2) \quad (\text{Mercure}) \\ p_2 + \rho_3 g h_2 = p_3 + \rho_3 g h_3 & (3) \quad (\text{Alcool}) \\ p_1 = p_3 = p_{atm} \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow p_1 = p_0 - \rho_1 g h_1 \quad (4)$

$(3) \Rightarrow p_3 = p_2 + \rho_3 g h_2 - \rho_3 g h_3 \quad (5)$

$(4) - (5) \Rightarrow 0 = p_0 - p_2 - \rho_1 g h_1 - \rho_3 g h_2 + \rho_3 g h_3$

Or : $(2) \Rightarrow 0 = p_0 - p_2 = \rho_2 g h_2$

d'où :

$0 = \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1 - \rho_3 g h_3 + \rho_3 g h_3$

$0 = \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1 + \rho_3 g (h_3 - h_2)$

$$\boxed{\rho_3 = \frac{\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2}{h_3 - h_2}} = 0{,}67 \cdot 10^3 \ kg \cdot m^{-3}$$

Exercice 8 : Modèles d'atmosphère (**)

L'air de la troposphère (partie de l'atmosphère dans laquelle nous vivons) est considéré comme un gaz parfait de masse molaire M. On suppose le champ de pesanteur uniforme. Au niveau du sol (z = 0), la pression est P_0 et la température T_0.

1. On suppose que la température de l'atmosphère est uniforme. À partir de la relation fondamentale de la statique des fluides, établir la loi de variation de la pression en fonction de l'altitude z. On introduira une hauteur caractéristique H du phénomène.

2. On suppose maintenant que la température de l'air décroît linéairement avec l'altitude z selon la loi $T(z) = T_0 - \lambda z$ (avec $\lambda > 0$).

a) Montrer que la pression à l'altitude z est de la forme $P(z) = P_0 \left(1 - \frac{\lambda}{T_0} z\right)^{\frac{T_0}{\lambda H}}$.

b) Calculer, dans ce modèle, la pression au sommet de l'Everest (8850 m).

3. Pour $z << H$, montrer que les résultats obtenus à l'aide des deux modèles précédents conduisent à une même fonction affine $P(z)$ donnant la pression en fonction de l'altitude.

On donne :

M = 29 g.mol^{-1}, g = 9,8 m.s^{-2}, P_0 = 1,0 bar, T_0 = 310 K et λ = 5,0.10^{-3} K.m^{-1}

1. $\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{m}{V} g$ isotherme

$pV = nRT_0 \Rightarrow V = \frac{nRT_0}{p}$

$\frac{dp}{dz} = -\frac{mpg}{nRT_0} = -\frac{Mpg}{RT_0}$

$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT_0} dz$

$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT_0} \int_0^z dz$ $\left(\ln p - \ln p_0 = \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{Mg}{RT_0} z \right.$

$p = p_0 \exp\left(-\frac{Mg}{RT_0} z\right) = p_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$

avec $H = \frac{RT_0}{Mg}$

2. a) $T(z) = T_0 - \lambda z$ Non isotherme

$pV = nR(T_0 - \lambda z)$

$V = \frac{nR(T_0 - \lambda z)}{p}$

$\frac{dp}{dz} = -\frac{Mpg}{R(T_0 - \lambda z)}$

$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = \int_0^z -\frac{Mg}{R(T_0 - \lambda z)} dz = \int_0^z -\frac{Mg}{R}(T_0 - \lambda z)^{-1} dz$

$= \frac{Mg}{\lambda R}\left[\ln(T_0 - \lambda z) - \ln T_0\right]$

$\alpha \ln a = \ln(a^\alpha)$

$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{Mg}{\lambda R} \ln\left[\frac{T_0 - \lambda z}{T_0}\right] = \ln\left[\left[\frac{T_0 - \lambda z}{T_0}\right]^{\frac{Mg}{\lambda R}}\right]$

$\frac{p}{p_0} = \left[\frac{T_0 - \lambda z}{T_0}\right]^{\frac{Mg}{\lambda R}}$

$p = p_0 \left(\frac{T_0 - \lambda z}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{\lambda R}}$ avec $\frac{Mg}{\lambda R} = \frac{T_0}{\lambda H}$

car $\frac{RT_0}{Mg} = H$.

d'où : $p = p_0\left(1 - \frac{\lambda}{T_0} z\right)^{\frac{T_0}{\lambda H}}$

2)b) $p = 1{,}0 \times \left(1 - \frac{5.10^{-3}}{310} \times 8850\right)^{\frac{310}{5.10^{-3} \times 9053}}$

$H = \frac{RT_0}{Mg} = \frac{8{,}3 \times 310}{29.10^{-3} \times 9{,}8} = 9053 \text{ m}$

$p = 0{,}35$ bar

3) $z \ll H$

$\Rightarrow$ Développement limité ordre 1

Modèle 1 : $e^{x} \simeq 1 + x$

$$p \simeq p_0\left(1 - \frac{z}{H}\right)$$

Modèle 2 : $(1+x)^{\alpha} \simeq 1 + \alpha x$

$$p \simeq p_0\left(1 - \frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{T_0}} \frac{\cancel{T_0}}{\cancel{\lambda} H} z\right)$$

$$\simeq p_0\left(1 - \frac{z}{H}\right).$$

Exercice 9 : La partie émergée de l'iceberg (*)

Considérons un iceberg de volume total V flottant sur l'eau. Soit v le volume de la partie émergée.

Déterminer le rapport $\frac{v}{V}$.

On donne les masses volumiques respectives de l'eau, de la glace et de l'air :

$\rho_e = 1{,}0.10^3\ kg.m^{-3}$, $\rho_g = 0{,}9.10^3\ kg.m^{-3}$, $\rho_a = 1\ kg.m^{-3}$

Partie émergée déplace v d'air
Partie immergée déplace $V - v$ d'eau.

Poussée d'Archimède :

$$\vec{F_A} = -[\rho_a v + \rho_e (V - v)]\vec{g}$$

PFD : $\vec{P} + \vec{F_A} = \vec{0}$

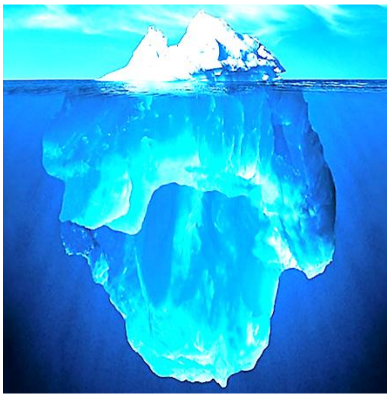
$$\rho_g V \cancel{\vec{g}} - [\rho_a v + \rho_e (V - v)]\cancel{\vec{g}} = \vec{0}$$

$$\rho_g V - \rho_a v - \rho_e V + \rho_e v = 0$$

$$V(\rho_g - \rho_e) = -v(\rho_e - \rho_a)$$

$$V(\rho_e - \rho_g) = v(\rho_e - \cancel{\rho_a})$$

$$\frac{v}{V} = \frac{\rho_e - \rho_g}{\rho_e} \simeq 0{,}1 = 10\%$$



Exercice 10 : Poussée d'Archimède et système oscillatoire (**)

Un cylindre solide cylindrique de section S et de hauteur H est partiellement immergé dans un liquide (eau). Le cylindre est immergé sur une hauteur h.

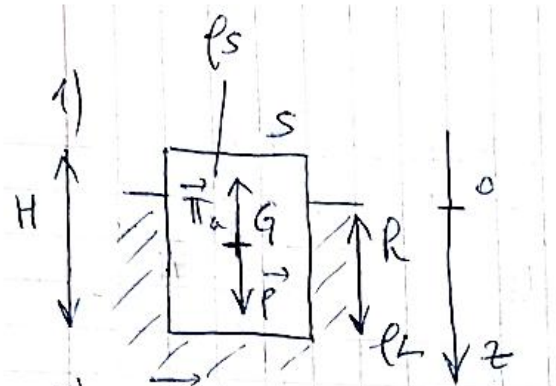
On donne :

- Masse volumique du fluide constante : ρ_L
- Masse volumique du solide constante : $\rho_S < \rho_L$
- Pression de l'air : P_0 = 1 bar

1) Faire un schéma de la situation.
2) Montrer que la poussée d'Archimède que subit le cylindre correspond à la résultante des forces de pression appliquées sur le cylindre.

On écarte verticalement le cylindre de sa position d'équilibre.

3) En considérant l'eau comme non visqueuse, déterminer l'équation différentielle du mouvement vertical du cylindre.
4) En déduire l'expression de la période d'oscillation T_0, en fonction de H, g, ρ_L et ρ_S. Vérifier l'homogénéité du résultat.
5) Application numérique : comparer la période T_0 calculée à celle estimée par l'expérience (faire les mesures nécessaires).



2) $\vec{\Pi}_a = -m_L \cdot g \cdot \vec{e_z} = -\rho_L \cdot V_{depl} \cdot g \cdot \vec{e_z}$
$= -\rho_L \cdot S h g \cdot \vec{e_z}$

ou

Forces de pression appliquées au cylindre :

* faces latérales se compensent.
* face supérieure :
$\vec{F_S} = P_0 \cdot S \cdot \vec{e_z}$
* face inférieure :
$P_i = P_0 + \rho_L g h$
d'où :
$\vec{F_i} = -(P_0 + \rho_L g h) S \vec{e_z}$

On obtient :

$\vec{F_i} + \vec{F_S} = -(P_0 + \rho_L g h) S \vec{e_z} + P_0 S \vec{e_z}$

$\vec{F_i} + \vec{F_S} = -\rho_L g h S \vec{e_z}$

3) BAME : $\vec{P} = m_S \cdot g \cdot \vec{e_z}$
$= \rho_S S H g \vec{e_z}$

ou $h + z = Z$

$\vec{\Pi}_a = -\rho_L S (h + z) g \vec{e_z}$

PFD : $\vec{P} + \vec{\Pi}_a = m_S \vec{a} = \rho_S S H \ddot{z} \vec{e_z}$

$\rho_S \cancel{S} H g \cancel{\vec{e_z}} - \rho_L \cancel{S} (h + z) g \cancel{\vec{e_z}} = \rho_S \cancel{S} H \ddot{z} \cancel{\vec{e_z}}$

$$\rho_S H g - \rho_L (h+z) g = \rho_S H \ddot{z}$$

$$g - \frac{\rho_L}{\rho_S}\frac{h}{H} g = \ddot{z} + \frac{\rho_L}{\rho_S}\frac{g}{H} z$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_L g}{\rho_S H}} \qquad \omega_0^2$$

4) $$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_S H}{\rho_L g}}$$

$$[T_0] = \left(\frac{\cancel{kg \cdot m^{-3}} \cdot \cancel{m}}{\cancel{kg \cdot m^{-3}} \cdot \cancel{m} \cdot s^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}} = s \quad \text{ok}$$

Exercice 11 : Ressort et tube en U (**) (E.Thibierge)

On dispose dans un tube en U un bouchon de masse m et de section S égale à la section du tube dans lequel il oscille sans frottement. Un ressort de raideur k est accroché d'une part au bouchon et d'autre part à un point fixe, voir figure 1. Une graduation se trouve à une hauteur h au dessus de la position initiale du bouchon. On note $\Delta\ell_0$ son allongement dû à la pesanteur.

On remplit le tube d'un liquide de masse volumique ρ inconnue jusqu'à la graduation. Le bouchon remonte de Δz par rapport à sa position initiale. On note P la pression au niveau du point M et P_{atm} la pression atmosphérique.

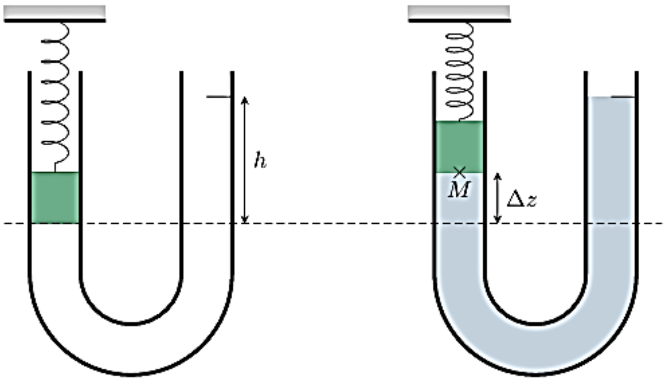


Figure 1 – Ressort dans un tube en U.

1 - Déterminer l'expression de $\Delta\ell_0$ en fonction de k et m.

2 - Écrire l'équation d'équilibre du bouchon en fonction des pressions et de $\Delta\ell$.

3 - Déterminer l'expression de ρ en fonction des données du problème.

4 - Calculer ρ pour un tube de diamètre $d = 2\,\text{cm}$, avec $\Delta z = 1\,\text{cm}$, $h = 10{,}7\,\text{cm}$, et $k = 30\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.

Exercice 12 : Tunnel d'aquarium (***) (E.Thibierge)

L'aquarium Nausicaa de Boulogne-sur-Mer est le plus grand d'Europe. Parmi les divers espaces dans lesquels il propose à ses visiteurs d'observer les animaux marins figure un tunnel sous-marin long de 18 m. Ce tunnel peut être approximé par un demi-cylindre de rayon $a = 3\,\mathrm{m}$ et de longueur $L = 18\,\mathrm{m}$ se trouvant au fond d'un bassin profond de $H = 8\,\mathrm{m}$. On cherche à estimer la résultante des forces pressantes subies par les vitres constituant le tunnel.

1 - Exprimer le champ de pression $P(y)$ dans l'eau de l'aquarium.

2 - Montrer sans calcul que la résultante des forces pressantes subies par le tunnel est dirigée selon $-\vec{e}_y$.

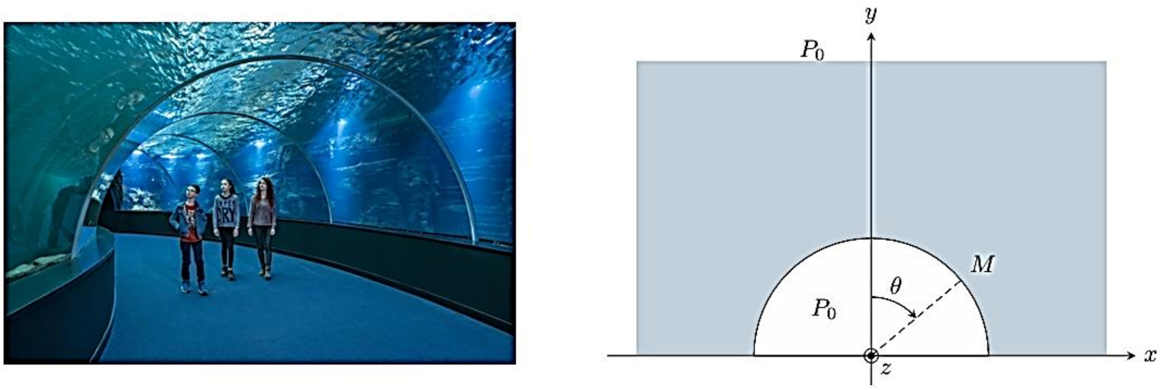


Figure 2 – **Tunnel de l'aquarium Nausicaa.**

3 - Montrer que la composante $\mathrm{d}F_{p,y}$ de la force pressante subie par l'élément de surface $\mathrm{d}S$ centré sur le point M s'écrit

$$\mathrm{d}F_{p,y} = \left(\frac{1}{2}\rho g a^2 - \rho g H a \cos\theta + \frac{1}{2}\rho g a^2 \cos(2\theta)\right) \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}z\,.$$

4 - En déduire la résultante des forces pressantes. Calculer sa valeur numérique.