MF1 STATIQUE DES FLUIDES

Programme ATS

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Description d'un fluide statique	
Échelle mésoscopique.	Définir et connaitre des ordres de grandeurs des dimensions de l'échelle mésoscopique dans le cas des liquides et des gaz.
Champ de pression dans un fluide. Force de pression.	Citer des ordres de grandeur de valeurs de pression dans des situations usuelles. Calculer la force de pression s'exerçant sur une surface, la pression étant uniforme.
Forces volumiques associées à un champ de pression non uniforme. Opérateur gradient.	Démontrer l'expression de la résultante des forces de pression s'exerçant sur un volume élémentaire de fluide dans le cas d'une variation unidirectionnelle de la pression. Généraliser sans démonstration pour une situation quelconque en utilisant l'opérateur gradient. Exploiter l'expression générale admise de la force volumique associée aux forces de pression, l'expression de l'opérateur gradient étant fournie.
Relation de la statique des fluides.	Énoncer et établir la relation de la statique des fluides dans le cas d'un fluide soumis uniquement à la pesanteur, supposée uniforme.
Pression dans un fluide incompressible. Pression dans une atmosphère isotherme.	Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible. Citer une application pratique. Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'une atmosphère isotherme assimilée à un gaz parfait. **Capacité numérique :** mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide d'un langage de programmation pour simuler l'évolution de la pression pour une atmosphère non isotherme dans le cadre du modèle du gaz parfait.
Poussée d'Archimède	Expliquer l'origine de la poussée d'Archimède. Citer et exploiter l'expression de la poussée d'Archimède.

I) MODELISATION D'UN FLUIDE

Fluide = milieu matériel qui a la propriété de s'écouler = liquide ou gaz

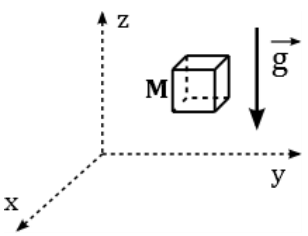
I)1) Différentes échelles

Echelle	**Echelle microscopique**	**Echelle mésoscopique**	**Echelle macroscopique**
Ordre de grandeur	Taille des atomes / molécules : $nm = 10^{-9}m$	Particule de fluide $\mu m = 10^{-6}m$ à $mm = 10^{-3}m$	Distances perceptibles $mm = 10^{-3}m$ à $km = 10^{3}m$
Grandeurs intensives *p, T, v,* ρ*, u, h, s*	Fluctuantes (car mouvements désordonnés, chocs, …)	VALEURS MOYENNES localement UNIFORMES	Non uniformes
Description du fluide	Trop fine : nombre trop important de particules, mouvement désordonné	ADAPTEE	Trop grossière

Particule de fluide = Système fermé, à **l'échelle mésoscopique**, contenant un grand nombre d'atomes / particules (de l'ordre de 10^{10} à 10^{15}).

I)2) Pression dans un fluide

- La **force de pression** subie par une particule sur sa frontière est une **force surfacique**.
Cette force de pression est liée aux chocs exercés par les atomes ou les molécules de fluide ou à la réaction de la paroi des récipients.



$$\overrightarrow{dF_S} = p.\overrightarrow{dS}$$

$$\overrightarrow{dF_S} = p.dS.\vec{n}$$

Attention : il y a 6 surfaces

p = pression (Pa, pascals)

- La **force de pesanteur** subie par la particule de fluide est une **force volumique**.

$$d\vec{P} = dm.\vec{g} = \rho.dV.\vec{g}$$

III)3) Unités de pression

- **Dimension :**

$$[pression] = \frac{[force]}{[surface]}$$

> **Unité légale de** *pression : le pascal, de symbole* **Pa** *:*
>
> *1 Pa = 1 N.m^{-2} = 1 kg.m^{-1}.s^{-2}*

Le pascal ayant l'inconvénient d'être une « petite unité », on utilise couramment des unités dérivées, en particulier le **bar.**

- **Autres unités**

- le bar $\mathbf{1\ bar = 10^5\ Pa}$ pression « standard » ; unité adaptée à la pression atmosphérique

D'autres unités du langage courant ou historique se rencontrent également.

- l'atmosphère $\mathbf{1\ atm = 1,013\ bar}$ pression atmosphérique moyenne

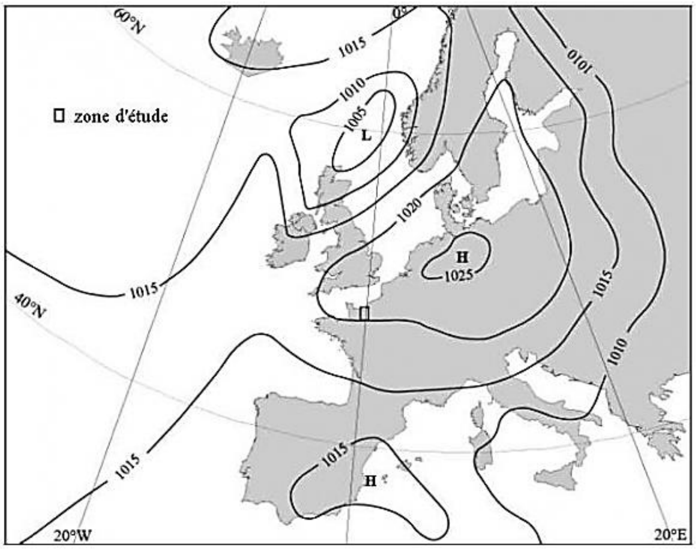
Les premiers baromètres fonctionnant par mesure du niveau de mercure dans un tube, l'unité historique de pression était le **millimètre de mercure mmHg et le centimètre de mercure cmHg** (attention, une hauteur n'est pas une unité de pression !)

- le torr $1\ \mathrm{torr} = 1\ \mathrm{mm\ Hg}$ 1mmHg = 133Pa soit 1 atm = 760mmHg.
- le psi (pound per square inch) $1\ psi = 6894\ Pa$ (unité anglo-saxonne)

- **Ordres de grandeur**

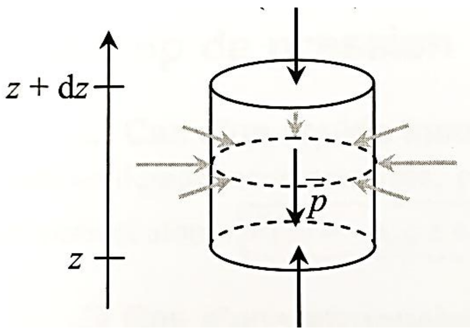
10^{-14} Pa	Pression atmosphérique sur la lune
$20\ \mu\mathrm{Pa}$	Seuil audition humaine
$100\ \mathrm{Pa}$	Seuil de la douleur pour audition
$2{,}3\ \mathrm{bar}$	Pression pneumatique voiture (en réalité surpression)
$5\ \mathrm{bar}$	Pression dans une bouteille de champagne, pression pneumatique VTC (en réalité surpression)
$10\ \mathrm{MPa}$	Nettoyeur haute pression
15 MPa	Pression dans le circuit primaire d'un réacteur nucléaire à eau pressurisée
$20\ \mathrm{MPa}$	Pression d'une bouteille de plongée
100 MPa	Pression au fond de la fosse des Mariannes (≈ 10 km de profondeur)

Carte météorologique :



II) RELATION DE LA STATIQUE DES FLUIDES

II)1) Mise en équation



Elément de volume d'axe vertical, de section *dS* et de hauteur *dz* :

Hypothèse : *dz* << *z*

$\rho(z)$ masse volumique à l'altitude *z*

$\rho(z) = cte$ dans le cyclindre

$p(z)$ pression à l'altitude *z*

Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) s'exerçant sur le cylindre :

- Poids du cylindre :

$$\overrightarrow{dP} = dm.\vec{g} = \rho.dV.\vec{g} = -\rho.dS.dz.g.\overrightarrow{e_z}$$

- Les forces de pression sur les surfaces latérales se compensent
- Forces de pression sur les surfaces haute et basse :

$$\overrightarrow{dF_S}(z) = p(z).dS.\overrightarrow{e_z}$$
$$\overrightarrow{dF_S}(z+dz) = -p(z+dz).dS.\overrightarrow{e_z}$$

- Principe Fondamental de la Statique :

$$\overrightarrow{dP} + \overrightarrow{dF_S}(z) + \overrightarrow{dF_S}(z+dz) = \vec{0}$$
$$-\rho.dS.dz.g.\overrightarrow{e_z} + p(z).dS.\overrightarrow{e_z} - p(z+dz).dS.\overrightarrow{e_z} = \vec{0}$$

- Projection sur l'axe *z* :

$$-\rho.dz.g + p(z) - p(z+dz) = 0$$
$$p(z+dz) - p(z) = -\rho.g.dz$$
$$dp = -\rho.g.dz$$

- Différenciation :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial z}.dz = \frac{dp}{dz}.dz = -\rho.g.dz$$

$$\boldsymbol{\frac{dp}{dz} = -\rho.g}$$

+ Relation entre $dp = \frac{\partial p}{\partial z}.dz$ avec la dérivée en maths $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Remarque : Forme générale de la Relation Fondamentale de la Statique des Fluides :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}(\boldsymbol{p}) = \overrightarrow{\boldsymbol{f_v}}$$

$\overrightarrow{\boldsymbol{f_v}}$: densité volumique de forces à distance (N.m^{-3})

$$\overrightarrow{f_v} = \rho.\vec{g} = \rho.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} = -\rho g\overrightarrow{e_z} \text{ pour la pesanteur}$$

$$\overrightarrow{grad}(p) = \vec{\nabla}(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial p}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial p}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial p}{\partial z}\overrightarrow{e_z} = 0.\overrightarrow{e_x} + 0.\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial p}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$

$0.\overrightarrow{e_x} + 0.\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial p}{\partial z}\overrightarrow{e_z} = -\rho g\overrightarrow{e_z}$ d'où : $\boldsymbol{\frac{dp}{dz} = -\rho.g}$

Opérateur « Nabla » $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ (Voir analyse vectorielle)

Relation Fondamentale de la Statique des Fluides :

$\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{\rho\vec{g}}$

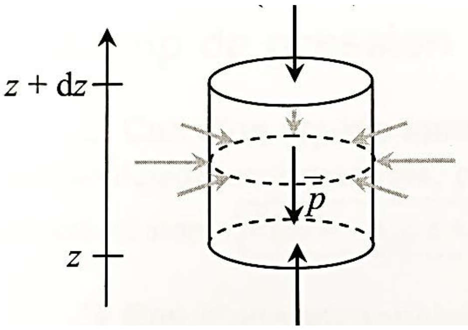
$\boldsymbol{\frac{dp}{dz}} = -\boldsymbol{\rho.g}$ si z orienté vers le haut (verticale ascendante)

$\boldsymbol{\frac{dp}{dz}} = +\boldsymbol{\rho.g}$ si z orienté vers le bas (verticale descendante)

Attention aux **signes** ! vérifier la cohérence de l'expression utilisée : la pression augmente avec la profondeur et diminue avec l'altitude !

II)2) Poussée d'Archimède

Elément solide de volume d'axe vertical, de section *dS* et de hauteur *dz* , totalement immergé dans un fluide.



- Masse volumique du solide constante : ρ_S
- Masse volumique du fluide constante : ρ_L

Système : **Elément solide de masse $dm = \rho_S.dV$**

- Forces de pression sur les surfaces haute et basse :

$$\overrightarrow{dF_S}(z) = p(z).dS.\overrightarrow{e_z}$$
$$\overrightarrow{dF_S}(z+dz) = -p(z+dz).dS.\overrightarrow{e_z}$$

- Résultante des forces de pression appliquées sur le système :

$$\overrightarrow{dF_S}(z) + \overrightarrow{dF_S}(z+dz) = p(z).dS.\overrightarrow{e_z} - p(z+dz).dS.\overrightarrow{e_z} = -\frac{\partial p}{\partial z}.dz.dS.\overrightarrow{e_z}$$

Avec : $\frac{dp}{dz} = -\rho_L.g$, on obtient :

$$\overrightarrow{dF_S}(z) + \overrightarrow{dF_S}(z+dz) = \rho_L.g.dz.dS.\overrightarrow{e_z} = \rho_L.g.dV.\overrightarrow{e_z} = g.dm_L.\overrightarrow{e_z}$$

$\boldsymbol{g.dm_L}$ correspond au **poids du volume de fluide déplacé**.

> La résultante des forces de pression appliquées par le fluide **au repos** sur le **solide totalement immergé** est orientée **vers le haut** et correspond au **poids du volume de fluide déplacé** = **Poussée d'Archimède**.

⇒ Exercices 9 et 10

III) CAS PARTICULIERS

III)1) Cas d'un fluide incompressible

Fluide incompressible = Fluide dans lequel la masse volumique $\boldsymbol{\rho}$ est indépendante de la pression $\boldsymbol{p}$ et de l'altitude $\boldsymbol{z}$.

Hypothèse : $\boldsymbol{\rho = constante = \rho_0}$

$$\frac{dp}{dz}(z) = -\rho_0.g$$

On intègre :

$$p(z) = -\rho_0.g.z + cte$$

Condition aux Limites (C.L.) :

$$p(0) = cte = p_0$$

D’où :

$$\boldsymbol{p(z) = -\rho_0 . g . z + p_0}$$

Ou on intègre par variables séparées :

$$dp = -\rho_0 . g . dz$$

$$\int_{p_0}^{p} dp = \int_{0}^{z} -\rho_0 . g . dz$$

$$[p]_{p_0}^{p} = -\rho_0 . g . [z]_0^z$$

$$\boldsymbol{p - p_0 = -\rho_0 . g . z}$$

Autres écritures possibles :

$$\boldsymbol{p_1 + \rho . g . z_1 = p_2 + \rho . g . z_2}$$

$$\boldsymbol{p_{bas} = p_{haut} + \rho . g . h}$$

avec $\boldsymbol{\rho} = constante$ (fluide incompressible)

<u>Propiété :</u> la pression dans un fluide ne dépend que de la hauteur de fluide (« Hauteur de Colonne de Fluide », unité mCF).

Expérience du tonneau de Pascal :

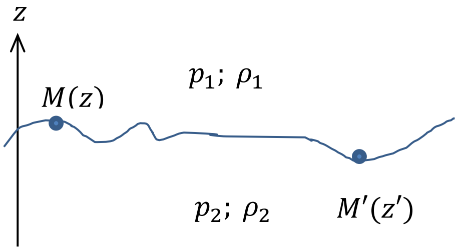
[EM98 Défi: faire exploser le tonneau de Pascal! - video Dailymotion](#) (10’ à 15’)

⇒ Exercices 2 et 7

III)2) Fluides incompressibles : conséquences

III)2)a) Interface entre 2 fluides

- **Interface entre deux fluides non miscibles incompressibles**



Conditions aux limites et relations de la statique des fluides incompressibles :

$$\begin{cases} p_1(M) = p_2(M) \\ p_1(M') = p_2(M') \end{cases} \quad \text{avec}$$

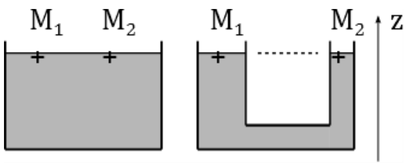
$$\begin{cases} p_1(M) + \rho_1 gz = p_1(M') + \rho_1 gz' \\ p_2(M) + \rho_2 gz = p_2(M') + \rho_2 gz' \end{cases}$$

En soustrayant avec $\rho_1 \neq \rho_2$, on trouve $z = z'$: les deux points sont nécessairement à la même altitude.

- **Surface libre (contact avec l'atmosphère) d'un fluide incompressible au repos**

Conditions aux limites et relations de la statique des fluides incompressibles (p_0 pression atmosphérique) :

$$\begin{cases} p_0 = p(M_1) \\ p_0 = p(M_2) \end{cases} \quad \text{avec } p(M_1) + \rho g z_1 = p(M_2) + \rho g z_2$$



On obtient $z_1 = z_2$: les deux points sont nécessairement à la même altitude.

- **Interface entre 2 fluides immiscibles** de masses volumiques différentes dans le champ de pesanteur uniforme : **horizontale.**
- **Cas particulier :** fluide au repos dont la surface est en contact avec l'air.

III)2)b) Théorème de Pascal

On suppose que le fluide considéré est **incompressible,** et que les points du fluide sont **à l'équilibre** (donc restent immobiles).

Si on exerce en un point A du fluide une force supplémentaire impliquant une surpression Δp_A, en un point M quelconque du fluide, il y aura une surpression Δp_M =Δp_A :

$$\begin{cases} E.I.: & p(M) + \rho g z = p_A + \rho g z' \\ E.F.: & p(M) + \Delta p_M + \rho g z = p_A + \Delta p_A + \rho g z' \end{cases}$$

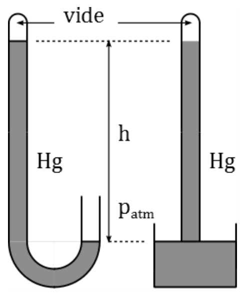
Toute variation de pression en un point d’un fluide incompressible immobile est transmise en tout point du fluide.

III)3) Applications : mesures de pression

- **Manomètres :** appareils de mesure de la pression.
- **Baromètres :** appareils de mesure de la pression de l’air.

En règle générale, mesure d’une différence de pression Δp. On peut accéder à des valeurs allant de 10^{-14} bar à 10^4 bar.

Baromètre à mercure de Torricelli (baromètre absolu)

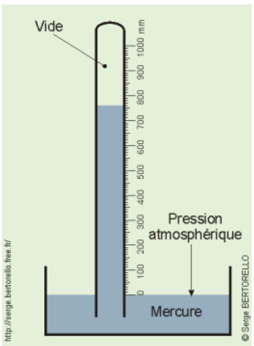


Baromètre le plus simple, constitué d’un tube rempli de mercure de masse volumique ρ et renversé sur une cuve remplie du même liquide, ou encore d’un tube en vertical contenant du mercure, l’une des branches étant fermée avec le volume situé au-dessus du mercure étant vide (ou quasi) et l’autre branche étant ouverte à la pression atmosphérique.

La dénivellation est proportionnelle à la pression exercée par l’atmosphère sur la surface libre du mercure et permet donc une mesure de la pression.

Application : baromètre à mercure de Torricelli

Evangelista Torricelli (1608 - 1647) est un physicien et un mathématicien italien du XVII^{e} siècle, connu notamment pour avoir inventé le baromètre par le biais de l’expérience décrite ci-dessous.



Mettons un liquide (du mercure, dans l’expérience de Torricelli) dans un tube fermé d'un côté ; ce tube est immergé dans une bassine de ce même liquide (il se remplit intégralement), puis est placé verticalement, le côté fermé en haut, le côté ouvert trempant dans la bassine.

La pression atmosphérique s'exerçant sur la surface du liquide dans la bassine fait monter le liquide dans le tube (ou l’empêche de se vider). Si le tube est suffisamment grand, du vide est obtenu au-dessus de la colonne de liquide dans le tube (en fait, il s'y trouve en quantité faible de la vapeur de liquide à sa pression de vapeur saturante).

1) Expliquer comment la mesure de la hauteur h de la colonne permet de déterminer la pression atmosphérique.

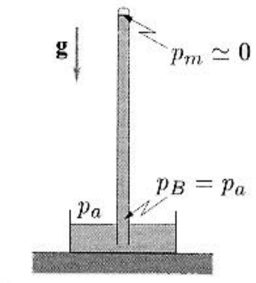
2) Retrouver la hauteur h de mercure dans le cas de l’expérience de Torricelli lorsque la pression atmosphérique est de $P_0 = 1$ atm.

Données : densité du mercure : $d = 13{,}6,$ pression de vapeur saturante du mercure : $P_{sat} =$ 0,00163 mbar (20 °C) ; accélération de la pesanteur : $g = 9{,}81$ m.s^{-2}

Application 4 : baromètre à mercure de Torricelli

$$P_{atm} = P_0 = P_{sat,Hg} + \rho_{eau} dgh$$

$h = \frac{P_0 - P_{sat}}{\rho_{eau} dg}$. A.N. : $h = 0{,}759\ m\ \approx 76\ cm = 760\ mm$ de mercure

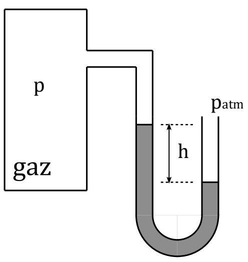


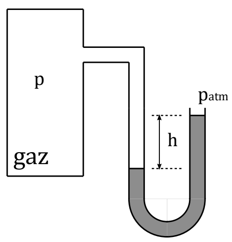
La pression normale ($1\ atm$) correspond à une dénivellation de $760\ mm$ de mercure :

$$\mathbf{1\ atm \equiv 760\ mm\ Hg}$$

<u>Baromètre différentiel</u>

Il permet de mesurer la **pression différentielle**, c'est-à-dire l'**écart entre la pression du fluide et la pression atmosphérique locale**.





$$\boldsymbol{p = p_{atm} \pm \rho g h}$$ ***Attention au signe !***

<u>Manomètre différentiel</u>

Selon le même principe que le baromètre différentiel, il permet de mesurer la différence de pression entre deux fluides.

Il est en général constitué par un tube en U, la différence de hauteur entre les deux branches étant directement liée à la différence de pression entre les deux fluides.

- Liquide = **eau** : avec $g\ = 9{,}8$ m.s^{-2} et $\rho\ = 10^3$ kg.m^{-3}, une variation de pression d'un bar se traduit par une dénivellation de l'ordre de 10 mètres ! Baromètres à eau usuels constitués de tubes de longueur de l'ordre du mètre, et permettent donc d'accéder à des variations de pression inférieures à **0,1 bar**.
- Liquide = **mercure,** avec $g\ = 9{,}8$ m.s^{-2} et $\rho\ = 1{,}36.10^4$ kg.m^{-3}, une variation de pression d'une atmosphère se traduit par une dénivellation de 760 mmHg.

III)4) Cas d'un gaz parfait isotherme

Hypothèse : $\boldsymbol{T = constante = T_0}$

$pV = nRT$ d'où : $V = \frac{nRT}{p} = \frac{nRT_0}{p}$

Masse volumique du gaz : $\rho = \frac{m}{V} = \frac{mp}{nRT_0} = \frac{Mp}{RT_0}$ avec $M = \frac{m}{n}$ masse molaire du gaz

$\frac{dp}{dz} = -\rho . g$ devient :

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{Mpg}{RT_0} = -\frac{Mg}{RT_0}p$$

En séparant les variables :

$$\boldsymbol{\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT_0}dz} \ \textbf{(1)}$$

Intégration par variables séparées :

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p} = \int_0^z -\frac{Mg}{RT_0}dz = -\frac{Mg}{RT_0}\int_0^z dz$$

$$[lnp]_{p_0}^{p} = -\frac{Mg}{RT_0}[z]_0^z$$

$$lnp - lnp_0 = ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{Mg}{RT_0}z$$

$$\boxed{\boldsymbol{p = p_0 . \exp\left(-\frac{Mg}{RT_0}z\right) = p_0 . \exp\left(-\frac{z}{H}\right)}}$$

avec $\boldsymbol{H = \frac{RT_0}{Mg}}$ **Hauteur caractéristique**

Homogénéité :

$$[H] = \left[\frac{RT_0}{Mg}\right] = \left[\frac{mRT_0}{Mmg}\right] = \left[\frac{nRT_0}{mg}\right] = \frac{J}{N} = \frac{N.m}{N} = m$$

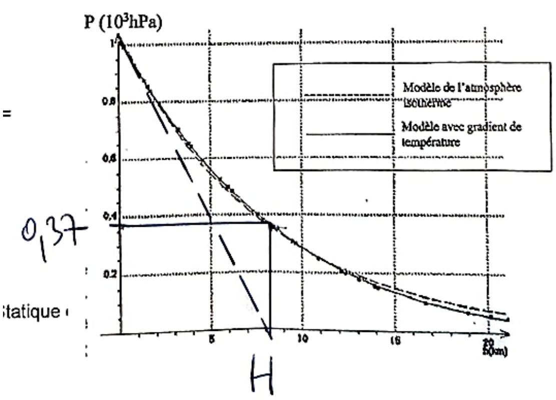
Pour l'air :

$R = 8.3\, J.K^{-1}.mol^{-1}$ $T_0 = 293\, K$ $M = 29\, g.mol^{-1}$ $g = 9.8\, m.s^{-1}$

$$H = \frac{RT_0}{Mg} = 8.5.10^3\, m = 8.5\, km$$

Allure de la courbe :

- Tracer H (100 % - 33% = 37%) ou H (taux)



⇒ Exercice 8

■ **Point Méthode**

Nature du fluide	**Nature du fluide**
liquide : modèle PCII	**gaz :** modèle G.P.
$\rho = cte$ $P_{bas} = P_{haut} + \rho g h$ C.L.	$\rho = \frac{PM}{RT}$ varie avec z ! $\frac{dP}{dz} = \pm \rho g$

$z \uparrow \quad p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2$

$z \downarrow \quad p_1 - \rho g z_1 = p_2 - \rho g z_2$

$\frac{dP}{dz} = -\rho g$ si $z \nearrow$ $p \searrow$

$\frac{dP}{dz} = +\rho g$ si $z \nearrow$ $p \nearrow$

III)5) Cas d'un gaz parfait avec modèle non isotherme

Hypothèse : loi $T(z) = T_0 - \lambda z$ (avec $\lambda > 0$)

D'après l'équation (1) de III)4), on a : $\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{R(T_0 - \lambda z)} dz$

$R = 8.3\, J.K^{-1}.mol^{-1}$ $M = 29\, g.mol^{-1}$ $g = 9.8\, m.s^{-1}$ T_0 = 293 K et λ = 5,0.10^{-3} K.m^{-1}

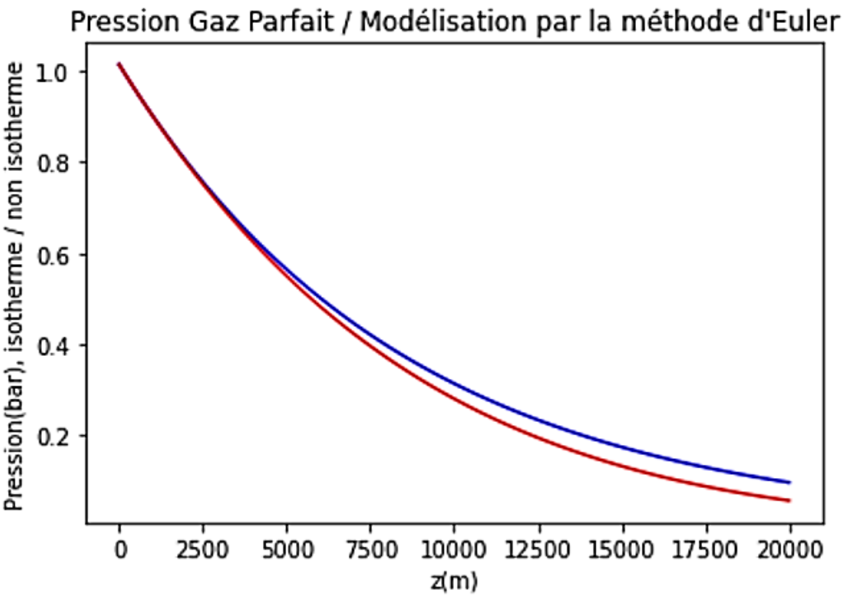
- Résolution mathématique : voir TD (Exercice 8)
- Résolution par la méthode d'Euler : voir programme ci-dessous + Cahier de Prepa

$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{R(T_0 - \lambda z)} dz$ devient :

$\frac{p(n+1) - p(n)}{p(n)} = -\frac{Mg}{R(T_0 - \lambda z(n+1))} dz$ ou encore :

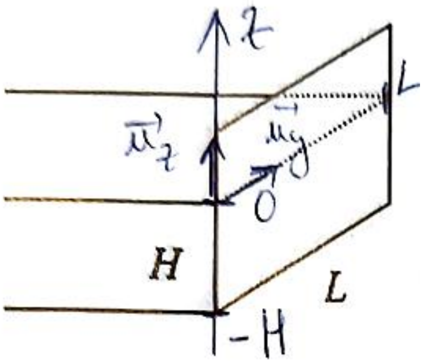
$$p(n+1) = p(n) * \left(1 - \frac{Mg}{R(T_0 - \lambda z(n+1))} dz\right)$$

```python
# On cherche à simuler l'évolution de la pression pour un Gaz Parfait :
# p1 : dans le cas d'une atmosphère isotherme T = T0
# p2 : dans le cas d'une atmosphère non isotherme de modèle T = T0-lam*z

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

plt.close('all')

g = 9.8 # accélération de la pesanteur (m.s-2)
R = 8.3 # constante des gaz parfaits (J.K-1.mol-1)
M = 29e-3 # masse molaire de l'air (kg.mol-1)
T0 = 293 # température au sol (K)
lam = 5e-3 # coefficient de température (K.m-1)

# Définition de l'intervalle de temps étudié (zimn,zmax)
# Découpage de cet intervalle en N segments
# Calcul du pas dz

zmin = 0
zmax = 20e3
N = 100

z = np.linspace(zmin, zmax, N)

dz = (zmax-zmin)/N

print("dz = ",dz, "m")
print("L'intervalle est découpé en ", N, "segments")

# Construction du tableau des pressions

p1 = np.zeros_like(z)   # modele isotherme

p1[0] = 1.013     # pression atmospherique a z = 0
for n in range(z.size-1):
    p1[n+1] = p1[n]*(1-(M*g*dz)/(R*T0))

p2 = np.zeros_like(z)   # modele non isotherme

p2[0] = 1.013     # pression atmospherique a z = 0

for n in range(z.size-1):
    p2[n+1] = p2[n]*(1-(M*g*dz)/(R*(T0-lam*z[n])))

plt.plot(z,p1,'b')
plt.plot(z,p2,'r')
plt.title("Pression Gaz Parfait / Modélisation par la méthode d'Euler") # titre
plt.xlabel("z(m)") # Grandeur et unité des abscisses
plt.ylabel("Pression(bar), isotherme / non isotherme") # Grandeur et unité des
plt.show()
```


Pression Gaz Parfait / Modélisation par la méthode d'Euler
Pression(bar), isotherme / non isotherme
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
2500
5000
7500
10000
12500
15000
17500
20000
z(m)

V) RESULTANTE D'UNE FORCE DE PRESSION

Exemple : Résultante des forces de pression sur un barrage



Un barrage est constitué d'une paroi verticale de largeur *L*. De l'eau, assimilée à un fluide incompressible de masse volumique ρ_0, appuie sur une hauteur *H* sur une des faces du barrage. La pression atmosphérique P_0 s'exerce sur l'autre face du barrage et sur la surface libre de l'eau. L'axe vertical (Oz) est vertical ascendant et le champ de pesanteur *g* est uniforme.

➢ Exprimer la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le barrage.

$dS = dy.dz$ (élément de surface).

Force élémentaire exercée par l'eau :

$$\vec{dF} = p.dS.\vec{u_x}$$

Force élémentaire exercée par l'air :

$$\vec{dF'} = -p'.dS.\vec{u_x}$$

Avec : $p = p_0 - \rho_0 g z$ (Axe z orienté vers le haut) (Pression de l'eau)

$p' = p_0$ (Pression de l'air)

D'où :

$$\vec{dF_T} = \vec{dF} + \vec{dF'} = (p_0 - \rho_0 g z) dS \vec{u_x} - p_0 . dS . \vec{u_x}$$
$$= -\rho_0 g z \, dS \, \vec{u_x}$$
$$= -\rho_0 g z \, dy \, dz \, \vec{u_x}$$

Force totale sur le barrage :

$$\vec{F_T} = \iint_S \vec{dF_T}$$

$$F_T = \iint_S dF_T = \iint_S -\rho_0 g z \, dy \, dz$$

$$= \int_0^L dy \int_0^{-H} -\rho_0 g z \, dz \quad \text{(en séparant variables } y \text{ et } z\text{)}$$

$$= -\rho_0 g \left[y\right]_0^L \left[\frac{z^2}{2}\right]_{-H}^0$$

$$= -\rho_0 g (L-0) \cdot \left(0 - \frac{H^2}{2}\right) = \frac{\rho_0 g L H^2}{2}$$

$$\boxed{\vec{F_T} = \frac{\rho_0 g L H^2}{2} \vec{u_x}}$$